

Análise de Funções de Complementaridade na Reformulação do Fluxo de Potência Ótimo como Equações Não-Lineares

Manoel Jardim de Sá Neto
Universidade Federal de Pernambuco
Email: manoeljardim1@hotmail.com

Geraldo Leite Torres
Universidade Federal de Pernambuco
Email: gltorres@ufpe.br

Resumo—Com os sistemas de potência operando cada vez mais próximos dos seus limites de carregamento, há uma necessidade crescente por algoritmos de fluxo de potência ótimo (FPO) com convergência global. Um algoritmo de FPO globalmente convergente desenvolvido recentemente faz uso de três técnicas: (i) reformulação do problema de FPO como um sistema de equações não-lineares, usando funções de complementaridade, (ii) reformulação do sistema de equações como um problema de minimização irrestrita, e (iii) minimização irrestrita robusta usando um método de região de confiança. O presente artigo analisa o desempenho desse algoritmo de FPO quanto a escolha da função de complementaridade na reformulação do FPO como um sistema de equações, e quanto a escolha de parâmetros no método de região de confiança. O algoritmo de FPO foi implementado em MATLAB, e seu desempenho avaliado sobre os sistemas testes do IEEE com até 300 barras.

Palavras-chave—Fluxo de Potência Ótimo, Método de Região de Confiança, Função de Complementaridade, Convergência Global.

I. INTRODUÇÃO

Programas computacionais de fluxo de potência ótimo (FPO) têm um papel importante na operação econômica e segura de sistemas de potência. Todavia, a reestruturação do setor elétrico tem originado problemas de FPO cada vez mais complexos, requerendo algoritmos de otimização mais flexíveis, robustos e confiáveis. Convergência global é uma propriedade desejável para qualquer algoritmo de otimização, possibilitando obter uma solução ótima, se uma existir, com qualquer escolha de ponto inicial. Há duas abordagens clássicas para globalizar um algoritmo localmente convergente: uso de busca em linha e região de confiança [1]. Embora o FPO seja um problema de otimização restrita, este artigo concentra-se num método de região de confiança para otimização irrestrita.

Cada iteração de um método de busca em linha calcula uma direção de busca e a seguir decide o quão distante mover ao longo daquela direção, definindo um comprimento de passo. O sucesso de um procedimento de busca em linha depende da escolha efetiva de ambos a direção de busca e o comprimento de passo [2]. Por outro lado, métodos de região de confiança definem uma região em torno da iteração corrente dentro da qual eles *confiam* um modelo ser uma representação adequada da função objetivo e das restrições, e então escolhem o passo como um mínimo aproximado do modelo nessa região.

Métodos de região de confiança [1] operam transformando um problema de programação não-linear (PNL) em uma sequência de subproblemas bem comportados, chamados de subproblemas de região de confiança. Os subproblemas são obtidos aproximando as funções objetivo e de restrições por modelos quadráticos e lineares, e adicionando uma restrição de região de confiança para assegurar a validade desse modelo. Os modelos resultantes geralmente são quadráticos (objetivo quadrático e restrições lineares) e podem ser resolvidos por métodos bastante conhecidos para programação quadrática (PQ). Assim, a solução do problema de PNL por um método de região de confiança envolve iterações *externas* e *internas*. Em cada iteração externa um subproblema de região de confiança é formulado. As iterações internas são aquelas para resolver cada subproblema de região de confiança formulado.

Recentemente, Souza *et al.* [3] aplicaram a técnica de região de confiança de Byrd-Omojokun para resolver o FPO não-linear. Diferentemente de [3], o algoritmo de região de confiança usado em [4] e neste artigo é para otimização irrestrita. Para esse fim, primeiro as condições necessárias de otimalidade do problema de FPO são reformuladas como um sistema de equações não-lineares usando a técnica de função de complementaridade descrita em [5]. Como o método de Newton pode falhar na convergência para uma solução das equações não-lineares, o sistema de equações é então reformulado como um problema de minimização irrestrita, cujo objetivo é a soma dos quadrados dos resíduos. Finalmente, para globalizar a solução do problema de minimização irrestrita, um método de região de confiança é empregado.

O presente artigo tem como objetivo principal avaliar o desempenho prático do algoritmo de FPO globalmente convergente usando função de complementaridade e região de confiança, proposto em [4], usando diferentes escolhas da função de complementaridade na reformulação do problema como um sistema de equações não-lineares. Outro objetivo é avaliar o desempenho/sensibilidade do algoritmo de FPO quanto a escolha de parâmetros do método de região de confiança. Os principais aspectos da implementação do algoritmo de FPO são discutidos, e o seu desempenho é avaliado usando os sistemas testes do IEEE com até 300 barras.

O restante do artigo está estruturado na seguinte forma: A Seção 2 descreve a reformulação do problema de FPO

como um sistema de equações não-lineares, usando funções de complementaridade. A Seção 3 descreve a reformulação do sistema de equações como um problema de otimização irrestrita, e a solução robusta usando um método de região de confiança. Alguns aspectos da implementação computacional são discutidos na Seção 4. A Seção 5 apresenta os resultados numéricos, e a Seção 6 apresenta as conclusões finais.

II. REFORMULAÇÃO DO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO COMO EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Este artigo trata da solução robusta de problemas de FPO não-lineares que podem ser expressos na forma geral:

$$\min f(x) \quad (1a)$$

$$\text{sujeito a: } g(x) = 0 \quad (1b)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (1c)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de decisão; $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ é um vetor de funções não-lineares de restrições, incluindo as equações convencionais de fluxo de potência e outras restrições de igualdade, tal como balanço de potência entre sistemas interligados numa operação em *pool*; e $\underline{x}$ e $\bar{x}$ são limites inferiores e superiores sobre as variáveis x , correspondentes a limites físicos e operacionais do sistema.

Sob uma qualificação das restrições (condição de regularidade), se x_* é um mínimo local para (1), então existem vetores de multiplicadores de Lagrange $(\lambda_*, \pi_*, v_*) \in \mathbb{R}^{m \times n \times n}$ que satisfazem as condições necessárias de otimalidade de primeira-ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [5]:

$$S\pi = 0, \quad s \geq 0, \quad \pi \geq 0, \quad (2a)$$

$$Zv = 0, \quad z \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (2b)$$

$$\underline{x} + s - x = 0, \quad (2c)$$

$$x + z - \bar{x} = 0, \quad (2d)$$

$$g(x) = 0, \quad (2e)$$

$$\nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \pi + v = 0, \quad (2f)$$

em que s e z são vetores de variáveis de folga que transformam as desigualdades em (1) nas igualdades (2c) e (2d); S e Z são matrizes diagonais com $S_{ii} = s_i$ e $Z_{ii} = z_i$; $\nabla f(x)$ é o vetor gradiente de $f(x)$, e $\nabla g(x)$ é a matriz gradiente de $g(x)$.

Sabe-se da literatura que a maior dificuldade na resolução das condições de KKT (2) está principalmente relacionada às condições de complementaridade (2a) e (2b). Primeiramente, o método de Newton para encontrar raízes de equações quando aplicado à (2) não pode automaticamente assegurar as condições de não-negatividade $(s, z, \pi, v) \geq 0$. Segundo, a solução numérica das equações de complementaridade $S\pi = 0$ e $Zv = 0$ é intrincada, porque se uma das variáveis tornar-se nula por acaso, durante as iterações, será fatal, uma vez que o algoritmo não mais será capaz de modificar essa variável.

Em [5], uma técnica de função de complementaridade é proposta para tratar (2a) e (2b). A característica atrativa desta técnica é que ela reformula as condições de KKT (2) como um sistema de equações não-lineares, permitindo o uso do método de Newton na solução. As condições de

sinais $(s, z, \pi, v) \geq 0$ são automaticamente satisfeitas no ponto limite, sem imposição de condições adicionais durante as iterações. O sistema de equações não-lineares é obtido tratando cada condição de complementaridade em (2a) e (2b) por uma função de complementaridade, a qual é uma função $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ que possui a propriedade

$$\psi(a, b) = 0 \iff ab = 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0. \quad (3)$$

Assim, a i -ésima condição de complementaridade em (2a),

$$s_i \pi_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad \pi_i \geq 0,$$

é equivalente a equação não-linear

$$\psi(s_i, \pi_i) = 0. \quad (4)$$

Explorando a propriedade (3), as condições de KKT (2) podem ser reformuladas como o sistema de equações não-lineares:

$$h(y) = \begin{pmatrix} \psi(s, \pi) \\ \psi(z, v) \\ \underline{x} + s - x \\ x + z - \bar{x} \\ g(x) \\ \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda - \pi + v \end{pmatrix} = 0, \quad (5)$$

em que $y = (s, z, \pi, v, \lambda, x)$ é um vetor com todas as variáveis.

Uma vantagem da reformulação de equação (5) é que, diferentemente das condições de KKT (2), ele pode ser resolvido por métodos numéricos bastante conhecidos para solução de equações não-lineares [2]. As condições de sinais $(s, z, \pi, v) \geq 0$ são automaticamente asseguradas pela função de complementaridade ψ no ponto limite das iterações.

O método de Newton é o método mais popular para resolver sistemas de equações não-lineares. Entretanto, como ele pode divergir para escolhas ruins de pontos iniciais, um controle do tamanho de passo pode ser utilizado para melhorar a convergência, ou seja, dado um ponto y_k , resolva o sistema de Newton para o termo de correção Δy ,

$$\nabla h(y_k)^T \Delta y = -h(y_k), \quad (6)$$

e calcule a nova estimativa da solução por

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_k \Delta y. \quad (7)$$

A matriz de coeficientes $\nabla h(y_k)$ é a matriz gradiente de $h(y)$ avaliada em y_k , e $\alpha_k \in (0, 1]$ é o parâmetro comprimento de passo para melhorar a convergência.

III. GLOBALIZAÇÃO DA CONVERGÊNCIA USANDO REGIÃO DE CONFIANÇA

Resolver o sistema de equações não-lineares (5) é equivalente a resolver o problema de minimização irrestrita

$$\min_y \phi(y) = \frac{1}{2} h(y)^T h(y). \quad (8)$$

Qualquer raiz y_* de $h(y)$ tem $\phi(y_*) = 0$, e uma vez que $\phi(y) \geq 0$ para todo y , cada raiz de $h(y)$ é um mínimo de $\phi(y)$. O inverso nem sempre é verdadeiro; mínimos locais de $\phi(y)$ com $\phi(y_*) > 0$ não são raízes de $h(y)$. Entretanto, mínimos

locais como estes (que não são raízes de $h(y)$) satisfazem uma propriedade interessante [1]. Um vez que

$$\nabla\phi(y_*) = \nabla h(y_*)h(y_*) = 0 \quad (9)$$

podemos ter $h(y_*) \neq 0$ apenas se $\nabla h(y_*)$ é singular. Porém, $\nabla h(y_*)$ é a matriz de coeficientes no sistema de Newton (6) para resolver as equações de KKT, e, sob uma qualificação de restrições (condição de regularidade), $\nabla h(y_*)$ é não-singular.

Um método de região de confiança para resolver (8) opera sobre uma *função modelo* m_k cujo comportamento próximo ao ponto de aproximação y_k deve ser similar a $\phi(y)$. A função modelo m_k é geralmente uma função quadrática derivada da expansão em série de Taylor de $\phi(y)$ em torno de y_k ,

$$m_k(y_k + d) = \phi(y_k) + \nabla\phi(y_k)^T d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2\phi(y_k)d, \quad (10)$$

em que $\nabla\phi(y)$ é o gradiente e $\nabla^2\phi(y)$ é a Hessiana de $\phi(y)$.

Se o ponto $y = y_k + d$ for distante de y_k a função modelo $m_k(y_k + d)$ pode não ser uma boa aproximação para $\phi(y)$. Portanto, $d_* = \arg \min m_k(y_k + d)$ nem sempre faz sentido como um passo de minimização para $\phi(y)$. Por exemplo, a Hessiana $\nabla^2\phi(y_k)$ pode ser indefinida, e há direções ao longo das quais $m_k(y_k + d)$ é ilimitada por baixo, de forma que $\|d\|$ é infinito. Para globalizar o algoritmo, a busca por um mínimo de $m_k(y_k + d)$ é restrita a alguma região em torno de y_k , chamada de *região de confiança*. Esta região é geralmente uma bola definida por $\|d\|_2 \leq \Delta_k$, em que o escalar Δ_k é chamado de *raio da região de confiança*.

A. O Subproblema de Região de Confiança

O subproblema de região de confiança em torno do ponto y_k para o problema de minimização irrestrita (8) é como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi(y_k) + \nabla\phi(y_k)^T d + \frac{1}{2}d^T \nabla^2\phi(y_k)d \\ \text{sujeito a:} \quad & \|d\|_2 \leq \Delta_k. \end{aligned} \quad (11)$$

Se o novo ponto $y_{k+1} = y_k + d_k$ não produz um decréscimo suficiente em $\phi(y)$, então a região de confiança definida pelo raio Δ_k é muito grande. Assim, Δ_k é reduzido e o subproblema de região de confiança é resolvido novamente.

B. Atualização do Raio da Região de Confiança

A estratégia para atualização do raio da região de confiança Δ_k é crítica para o desempenho do algoritmo [1]. Se Δ_k é muito pequeno, o algoritmo perde uma oportunidade de fazer um progresso substancial para a solução. Se Δ_k é muito grande, o mínimo do modelo pode estar distante do mínimo da função objetivo na região, e podemos ter que reduzir o tamanho da região e tentar novamente.

A atualização de Δ_k é geralmente baseada na concordância entre o modelo da função m_k e a função objetivo $\phi(y)$ nas iterações. Dado o passo d_k , um fator de redução ρ_k é calculado

$$\rho_k = \frac{\phi(y_k) - \phi(y_k + d_k)}{m_k(0) - m_k(d_k)}. \quad (12)$$

O numerador é a *redução real* na função objetivo original, e o denominador é a *redução prevista* (a redução em $\phi(y)$ prevista

pelo modelo m_k). A redução prevista é sempre negativa, uma vez que d_k é obtido minimizando-se o modelo m_k numa região que inclui $d = 0$. Assim, se ρ_k é negativo é claramente porque $\phi(y_k + d_k) \geq \phi(y_k)$, e o passo d_k deve ser rejeitado. Se ρ_k é próximo de 1, então há boa concordância entre m_k e $\phi(y)$ nesse passo, e é seguro expandir a região de confiança para a próxima iteração. Se ρ_k é positivo mas significativamente menor do que 1, então o tamanho da região não é alterado.

Baseado no Algoritmo 4.1 em [1], os principais passos do algoritmo de região de confiança para resolver (8) são:

- 1) Faça $k = 0$, defina o raio máximo da região de confiança $\bar{\Delta} > 0$, escolha $\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta})$ e $\eta \in [0, \frac{1}{4})$.
- 2) Monte e resolva aproximadamente o subproblema de região de confiança (11) para d_k . Calcule a taxa de redução ρ_k por (12).
- 3) Se $\rho_k < \frac{1}{4}$, faça $\Delta_{k+1} = \frac{1}{4}\|d_k\|$ e vá para o passo 5. Caso contrário, vá para o passo 4.
- 4) Se $\rho_k > \frac{3}{4}$ e $\|d_k\| = \Delta_k$, faça $\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \bar{\Delta})$. Caso contrário, faça $\Delta_{k+1} = \Delta_k$.
- 5) Se $\rho_k > \eta$, então $x_{k+1} = x_k + d_k$. Caso contrário, $x_{k+1} = x_k$. Faça $k = k + 1$ e retorne para o passo 2.

Observe do passo 4 que Δ_k é aumentado apenas quando $\|d_k\|$ atinge a fronteira da região de confiança (ou seja, $\|d_k\| = \Delta_k$). Se o passo permanece estritamente dentro da região, então podemos inferir que o valor de Δ_k não está interferindo com o progresso do algoritmo, e assim deixamos o tamanho do raio da região inalterado para a próxima iteração.

C. Resolvendo o Subproblema de Região de Confiança

Como mostrado em [6], um vetor d_* é uma solução global para (11) se e apenas se ele é viável (ou seja, $\|d_*\| \leq \Delta_k$) e há um multiplicador de Lagrange $\sigma_* \geq 0$ tal que

$$(\nabla^2\phi(y_k) + \sigma_* I)d_* = -\nabla\phi(y_k), \quad (13a)$$

$$\sigma_*(\Delta_k - \|d_*\|) = 0, \quad (13b)$$

$$(\nabla^2\phi(y_k) + \sigma_* I) \text{ é positiva semidefinida.} \quad (13c)$$

A condição (13b) é uma condição de complementaridade que declara que pelo menos uma das quantidades não-negativas $\sigma_* \geq 0$ e $(\Delta_k - \|d_*\|) \geq 0$ deve ser zero. Assim, quando $\|d_*\| < \Delta_k$ devemos ter $\sigma_* = 0$ e, de (13a), $\nabla^2\phi(y_k)d_* = -\nabla\phi(y_k)$. Se $\sigma_* > 0$ então a solução d_* é colinear com o gradiente negativo de m_k e perpendicular aos seus contornos.

Embora a princípio buscamos a solução ótima de (11), é suficiente, para o propósito de convergência global, obter uma solução aproximada d_k que localiza-se dentro da região de confiança e fornece um decréscimo suficiente no modelo m_k [1]. Esta solução aproximada pode ser obtida, por exemplo, usando o método *dogleg* de Powell [7]. Outra estratégia é a minimização no subespaço bi-dimensional. Enquanto o primeiro método pode ser usado apenas quando a matriz $\nabla^2\phi(y_k)$ é definida positiva, a última estratégia é mais geral e pode tratar direções de curvatura negativa. O método *dogleg* de Powell é utilizado neste artigo.

D. O Método Dogleg de Powell

O método *dogleg* foi utilizado na solução de subproblemas de região de confiança num algoritmo de FPO usando região de confiança. Para descrever o método *dogleg* é necessário definir os passos de Cauchy e de Newton.

1) *O Passo de Cauchy*: O ponto de Cauchy para o subproblema (11) é o mínimo restrito na direção de máxima declividade em $d = 0$. Assim, ele é obtido por

$$d_c = -\alpha_k \nabla \phi(y_k) \quad (14)$$

em que α_k é o comprimento de passo ótimo dado por:

$$\min_{\alpha > 0} \nabla \phi_k^T (-\alpha \nabla \phi_k) + \frac{1}{2} (\alpha \nabla \phi_k)^T \nabla^2 \phi_k (\alpha \nabla \phi_k) \quad (15a)$$

$$\text{s. a: } \|\alpha \nabla \phi_k\| \leq \Delta_k \quad (15b)$$

cujas solução é dada por

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\nabla \phi_k^T \nabla \phi_k}{\delta_k} & \text{se } \delta_k > 0 \text{ e } \frac{(\nabla \phi_k^T \nabla \phi_k)^{3/2}}{\delta_k} \leq \Delta_k \\ \frac{\Delta_k}{\|\nabla \phi_k\|} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (16)$$

em que, para simplificação, $\delta_k = \nabla \phi_k^T \nabla^2 \phi_k \nabla \phi_k$.

2) *O Passo de Newton*: O passo de Newton é o mínimo irrestrito do problema (11), o qual é dado por

$$d_n = -\nabla^2 \phi(y_k)^{-1} \nabla \phi(y_k). \quad (17)$$

Devido o passo de Newton ser um mínimo irrestrito, ele pode não satisfazer a restrição de região de confiança.

Se o passo de Newton d_n está dentro da região de confiança (ou seja, se $\|d_n\| \leq \Delta_k$), então ele é uma solução aproximada para (11). Se ele está fora, então o método *dogleg* encontra o mínimo restrito no *caminho dogleg* sujeito a $\|d\| \leq \Delta_k$. O *caminho dogleg* consiste de dois segmentos de linhas de $d = 0$ a $d = d_c$ e de $d = d_c$ a $d = d_n$, definido por

$$d(\tau) = \begin{cases} \tau d_c & \text{para } \tau \in [0, 1] \\ d_c + (\tau - 1)(d_n - d_c) & \text{para } \tau \in (1, 2]. \end{cases} \quad (18)$$

Dois propriedades tornam o método *dogleg* bem definido: (i) o ponto de Newton é sempre mais distante do que o ponto de Cauchy (ou seja, $\|d_n\| > \|d_c\|$), e (ii) o objetivo quadrático decresce monotonicamente ao longo do *caminho dogleg*. Portanto, o mínimo restrito é a interseção do *caminho dogleg* $d(\tau)$ com a fronteira da região de confiança, caracterizado por

$$\|d_c + (\tau - 1)(d_n - d_c)\|^2 = \Delta_k^2, \quad (19)$$

em que

$$\tau = \frac{\sqrt{(d_c^T d_{nc})^2 - \|d_{nc}\|^2 (\|d_c\|^2 - \Delta_k^2)} - d_c^T d_{nc}}{\|d_{nc}\|^2} + 1 \quad (20)$$

e $d_{nc} = d_n - d_c$. Os principais passos do método *dogleg* são:

- 1) Obtenha d_n por (17). Se $\|d_n\| \leq \Delta_k$, então faça $d_k = d_n$ (o passo de Newton é a solução aproximada).
- 2) Obtenha d_c por (14). Se $\|d_c\| \geq \Delta_k$, então faça $d_k = d_c$ (o passo de Cauchy é a solução aproximada).

- 3) Dados d_n e d_c nos passos 1 e 2, obtenha $d(\tau)$ por (18) e (20), e faça $d_k = d(\tau)$ (a interseção do *caminho dogleg* com a fronteira da região é a solução aproximada).

O maior esforço no método *dogleg* está na montagem e solução do sistema linear (17) para calcular d_n .

IV. ESCOLHA DE FUNÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE

A função de complementaridade de Fischer-Burmeister,

$$\psi_{FB}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (21)$$

atraiu bastante atenção de pesquisadores. Ela é diferenciável em todos os pontos exceto na origem. A aproximação suave

$$\psi_\mu(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu} \quad (22)$$

é diferenciável em todo ponto para qualquer $\mu > 0$. No entanto, os zeros de (22) são caracterizados por

$$\psi_\mu(a, b) = 0 \iff ab = \mu, \quad a > \mu, \quad b > \mu, \quad (23)$$

e quando μ tende a zero, a propriedade (23) aproxima (3).

Outra função suave é a de Chen-Harker-Kanzow-Smale:

$$\psi_{CHKS}(a, b) = a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu}. \quad (24)$$

Reformulações utilizando funções semi-suaves são também atrativas. Algumas delas são:

$$\psi_\theta(a, b) = \theta \psi_{FB}(a, b) + (1 - \theta) a_+ b_+ \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (25)$$

$$\psi_\kappa(a, b) = a + b - \sqrt{(a - b)^2 + \kappa ab}, \quad 0 \leq \kappa \leq 4 \quad (26)$$

$$\psi_p(a, b) = a + b - \|(a, b)\|_p \quad (27)$$

$$\psi_{RS}(a, b) = \min\{a, b\} \quad (28)$$

em que θ em (25) e κ em (26) são parâmetros fixos arbitrários, $a_+ = \max\{a, 0\}$, $b_+ = \max\{b, 0\}$, e $\|\cdot\|_p$ é a norma- p de Hölder [1]. Observe que: (25) é uma combinação convexa de (21) com $a_+ b_+$; (27) generaliza (21); e (28) é o resíduo real.

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

O algoritmo de FPO globalmente convergente utilizando funções de complementaridade não-lineares e região de confiança foi aplicado aos sistemas testes do IEEE com 30, 57, 118 e 300 barras. O algoritmo de FPO foi implementado em MATLAB, e nas simulações utiliza os parâmetros de região de confiança $\Delta_0 = 1$, $\bar{\Delta} = 5$ e $\eta = 0.25$, a exceção das simulações de análise de escolha de parâmetros.

O problema de FPO resolvido é o problema clássico de minimização de perdas ativas na transmissão. As restrições incluem as equações de balanço de potência ativa e reativa para todas as barras, e limites mínimos e máximos sobre magnitudes de tensões nas barras, tapes de transformadores,

susceptâncias shunts, potência reativa de geradores, e fluxos em circuitos selecionados. A formulação matemática é:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} g_{ij}(V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \theta_{ij}) \\
\text{s. a:} \quad & P_i(\theta, V, t) - P_{G_i} + P_{D_i} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \\
& Q_i(\theta, V, t) - Q_{G_i} + Q_{D_i} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{G} \\
& Q_i(\theta, V, t) - Q_{G_i} + Q_{D_i} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{F} \\
& Q_i(\theta, V, t) + Q_{D_i} + b_i^{\text{sh}} V_i^2 = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E} \\
& F_{ij}(\theta, V, t) - f_{ij} = 0, \quad \{(i, j)\} \subset \mathcal{B} \\
& V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{N} \\
& t_{ij}^{\min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}, \quad \{(i, j)\} \subset \mathcal{T} \\
& b_i^{\min} \leq b_i^{\text{sh}} \leq b_i^{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{E} \\
& Q_i^{\min} \leq Q_{G_i} \leq Q_i^{\max}, \quad \forall i \in \mathcal{G} \\
& f_{ij}^{\min} \leq f_{ij} \leq f_{ij}^{\max}, \quad \{(i, j)\} \subset \mathcal{B}
\end{aligned} \quad (29)$$

em que

$$P_i(\theta, V, t) = V_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}), \quad (30)$$

$$Q_i(\theta, V, t) = V_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}), \quad (31)$$

V_i e θ_i são magnitude e ângulo de fase da tensão; P_{G_i} e P_{D_i} são geração e demanda de potência ativa; Q_{G_i} e Q_{D_i} são geração e demanda de potência reativa, e b_i^{sh} é a susceptância shunt, todos da barra i ; g_{ij} é a condutância do circuito conectando a barra i a barra j ; $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$ é o elemento ij da matriz admitância de barra Y ; $\mathcal{N}$ é o conjunto dos índices de todas as barras do sistema, $\mathcal{G}$ os índices de barras de geração, $\mathcal{F}$ os índices de barras de carga com compensação shunt fixa, $\mathcal{E}$ os índices de barras de carga com compensação shunt controlável, $\mathcal{B}$ os índices de circuitos, e $\mathcal{T}$ os índices dos transformadores com comutação de tape sob carga.

A Tabela I mostra os tamanhos dos conjuntos de índices $\mathcal{N}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$, e $\mathcal{T}$ para os diversos sistemas testes, bem como o número de variáveis primais n , o número de restrições de igualdade m , e o número de restrições de limites mínimo e máximo p . A Tabela II mostra as cargas totais ativa e reativa, e as perdas ativas na transmissão para a condição base, ou seja, antes da aplicação de qualquer procedimento de otimização.

A. Escolha da Função de Complementaridade

1) *Combinação Convexa*: Aqui são comparadas as funções ψ_{FB} em (23) e ψ_θ em (25). O termo adicional introduzido pela combinação convexa ψ_θ tem como objetivo penalizar violações das condições de complementaridade. A função ψ_θ tem menos contornos planos, sendo menos susceptível a derivadas nulas. Os resultados obtidos, em termos de número de iterações de região de confiança, são mostrados na Tabela III. O melhor desempenho global ocorreu com ψ_θ usando $\theta = 0.9$. Todavia, o desempenho é idêntico ao de ψ_{FB} quando excluído o menor sistema teste (IEEE 30 barras). Conclui-se que no geral as funções ψ_{FB} e ψ_θ apresentaram desempenhos semelhantes nos testes considerados.

Tabela I
TAMANHO DOS SISTEMAS DE POTÊNCIA E DO FPO NÃO-LINEAR (1)

Sistema	$\mathcal{N}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{T}$	n	m	p
IEEE 30	30	6	5	41	4	63	60	75
IEEE 57	57	7	5	80	10	123	114	143
IEEE 118	118	54	12	186	9	244	236	311
IEEE 300	300	69	12	411	50	649	600	727

Tabela II
CARREGAMENTO INICIAL (ATIVO E REATIVO) E PERDAS ATIVAS

Sistema	Carga MW	Carga MVar	Perdas MW
IEEE 30	283.40	126.20	17.63
IEEE 57	1250.80	336.40	27.86
IEEE 118	3668.00	1438.00	132.48
IEEE 300	23246.87	7787.97	408.32

Tabela III
NÚMERO DE ITERAÇÕES USANDO AS FUNÇÕES ϕ_{FB} E ϕ_θ

Sistema Teste	ψ_{FB}	$\theta = 0,9$	ψ_θ $\theta = 0,8$	$\theta = 0,7$
IEEE 30	11	5	6	8
IEEE 57	6	6	7	7
IEEE 118	7	7	8	9
IEEE 300	10	10	10	12
Total	34	28	31	36

Tabela IV
NÚMERO DE ITERAÇÕES USANDO A FUNÇÃO ϕ_p

Sistema Teste	$p = 2$	$p = 4$	ψ_p $p = 8$	$p = 80$
IEEE 30	11	10	10	8
IEEE 57	6	6	6	6
IEEE 118	7	7	7	7
IEEE 300	10	10	10	10
Total	34	33	33	31

2) *Funções Usando Norma- p* : Essas funções generalizam a função de Fischer-Burmeister. A função ψ_p em (27) para $p = 2$ é a mesma função ψ_{FB} em (23). Os resultados na Tabela IV comparam o uso da norma- p para alguns valores de p par. Não há diferença notável no desempenho quanto a escolha de p , apenas uma pequena diferença no número de iterações com o menor sistema (IEEE 30 barras). Conclui-se que a escolha de p não é significativa, no tocante ao número de iterações, recomendando assim a escolha mais simples ($p = 2$), com o necessário tratamento da não-diferenciabilidade na origem.

B. Escolha de Parâmetros da Região de Confiança

O desempenho do algoritmo de FPO também foi avaliado para diferentes escolhas dos parâmetros do algoritmo de região de confiança. A Tabela V exibe os números de iterações para diferentes escolhas do raio inicial Δ_0 . Como esperado, Δ_0 não deve ser muito pequeno nem muito grande. Com um raio muito pequeno o modelo é confiável e o passo é aceito, porém pouco progresso é feito com um raio muito pequeno, elevando o número de iterações de região de confiança. No outro extremo, com um raio muito grande, o modelo pode não ser confiável e o passo obtido ser descartado, ocasionando também um aumento no número de iterações. O melhor desempenho global ocorreu com escolha de Δ_0 entre 0.75 e 2.

A Tabela VI exibe os números de iterações para diferentes escolhas do raio máximo $\bar{\Delta}$. O número de iterações é altamente sensível a escolha de $\bar{\Delta}$ muito pequeno e pouco sensível

Tabela V
NÚMERO DE ITERAÇÕES DE ACORDO COM O RAIO INICIAL Δ_0

Sistema Teste	Tamanho do raio inicial Δ_0							
	0,05	0,1	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	3,0
IEEE 30	10	7	7	8	11	8	9	9
IEEE 57	16	13	7	6	6	10	11	11
IEEE 118	19	15	8	7	7	6	6	9
IEEE 300	31	25	17	11	10	11	8	11
Total	76	60	39	34	34	35	34	76

Tabela VI
NÚMERO DE ITERAÇÕES DE ACORDO COM O RAIO MÁXIMO $\bar{\Delta}$

Sistema Teste	Tamanho do raio máximo $\bar{\Delta}$							
	0,2	0,5	1,0	3,0	5,0	6,0	8,0	
IEEE 30	9	8	8	11	11	11	11	
IEEE 57	11	7	6	6	6	6	6	
IEEE 118	23	11	8	7	7	7	7	
IEEE 300	62	26	15	10	10	10	10	
Total	105	52	37	34	34	34	34	

Tabela VII
NÚMERO DE ITERAÇÕES COM O LIMAR DE ρ_k PARA REDUÇÃO DE Δ_k

Sistema Teste	Limiar de ρ_k para redução do raio							
	-1	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
IEEE 30	8	8	8	8	8	8	8	8
IEEE 57	17	20	20	20	20	20	20	20
IEEE 118	26	30	30	30	30	30	39	46
IEEE 300	26	41	41	41	41	41	41	55
Total	77	99	99	99	99	99	108	129

Tabela VIII
NÚMERO DE ITERAÇÕES COM O LIMAR DE ρ_k PARA AUMENTO DE Δ_k

Sistema Teste	Limiar de ρ_k para aumento do raio							
	0,1	0,3	0,55	0,65	0,75	0,85	0,9	0,95
IEEE 30	8	8	8	8	8	8	8	8
IEEE 57	21	20	20	20	20	17	17	23
IEEE 118	25	26	28	28	30	32	32	36
IEEE 300	37	37	36	40	41	39	39	39
Total	91	91	92	96	99	96	96	106

a escolha de $\bar{\Delta}$ grande. Se $\bar{\Delta}$ é muito pequeno os passos calculados serão pequenos (limitados por $\bar{\Delta}$) e pouco progresso é conseguido numa iteração, elevando o número de iterações. Já $\bar{\Delta}$ muito grande pouco influencia o desempenho do método quanto ao número de iterações. Em geral, a confiabilidade do modelo é maior na proximidade da solução, e naturalmente na proximidade da solução os passos são pequenos, raramente atingindo o limite da região. A Tabela VI mostra um número grande de iterações para $\bar{\Delta}$ igual a 0,2 e 0,5, e praticamente o mesmo número de iterações para $\bar{\Delta}$ entre 1 e 8.

A Tabela VII mostra os resultados quanto a escolha do limiar de ρ_k para redução ou manutenção do raio da região. O melhor desempenho global foi obtido para o limiar de até 0,3. Valores maiores elevam o número de iterações, uma vez que aumenta as chances de recusa do passo calculado e redução do raio da região. A Tabela VIII mostra os resultados quanto a escolha do limiar de ρ_k para manutenção ou aumento do raio. Quanto maior é esse limiar maior será a possibilidade de manutenção do raio, em detrimento do aumento do raio e de um maior passo na próxima iteração. Os resultados sugerem a escolha desse limiar até 0,9.

A Tabela IX mostra os resultados quanto a escolha do fator de redução do raio da região, quando a análise de ρ_k

Tabela IX
NÚMERO DE ITERAÇÕES DE ACORDO COM FATOR DE REDUÇÃO DE Δ_k

Sistema Teste	Fator de redução do tamanho do raio							
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
IEEE 30	8	8	8	8	8	8	8	8
IEEE 57	21	19	21	20	21	23	26	35
IEEE 118	23	23	27	30	30	30	33	40
IEEE 300	52	42	34	41	39	36	39	49
Total	104	98	90	99	98	97	106	132

Tabela X
NÚMERO DE ITERAÇÕES DE ACORDO COM FATOR DE AUMENTO DE Δ_k

Sistema Teste	Fator de aumento do tamanho do raio							
	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	3,0
IEEE 30	8	9	9	11	12	11	11	11
IEEE 57	20	21	22	19	19	16	15	18
IEEE 118	30	17	20	16	16	22	19	74
IEEE 300	41	18	36	15	19	35	36	21
Total	99	65	87	61	66	84	81	124

determina. Observa-se um maior número de iterações para fatores de redução muito pequenos ou muito grandes. Reduções grandes no raio podem impedir um melhor progresso na próxima iteração, aumentando o número de iterações. Já uma redução muito pequena pode resultar num novo descarte do passo e nova redução do raio, também elevando o número de iterações. A Tabela X mostra os resultados quanto a escolha do fator de aumento do tamanho da região de confiança.

VI. CONCLUSÕES

O artigo apresentou um algoritmo de FPO que combina funções de complementaridade e região de confiança para globalização da convergência, e avaliou o seu desempenho quanto a escolha da função de complementaridade e dos parâmetros do algoritmo de região de confiança. As funções de complementaridade testadas apresentaram desempenhos semelhantes, com uma ligeira vantagem para a combinação convexa ϕ_θ no trato da diferenciabilidade. O desempenho do algoritmo é mais sensível quanto a escolha dos parâmetros de região de confiança, com a melhor escolha de parâmetros da forma: raio inicial entre 0,75 e 2, raio máximo maior do que 1, limiar de ρ_k para redução do raio inferior a 0,3, limiar de ρ_k para aumento do raio até 0,9, e fatores de redução e aumento do raio em torno de 0,5 e 1,5, respectivamente.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer, 1999.
- [2] J. E. Dennis Jr. and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Philadelphia: SIAM Classics In Applied Mathematics, 1996.
- [3] A. A. Sousa, G. L. Torres, and C. A. Cañizares, "Robust optimal power flow solution using trust region and interior-point methods," *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 1–13, Aug. 2010.
- [4] G. L. Torres, "Globally convergent optimal power flow using complementarity functions and trust region methods," in *Proc. of the 17th Power Systems Computation Conference*, Stockholm, Sweden, Aug. 2011.
- [5] G. L. Torres and V. H. Quintana, "Optimal power flow by a nonlinear complementarity method," *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1028–1033, Aug. 2000.
- [6] J. J. More and D. C. Sorensen, "Computing a trust region step," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, pp. 553–572, 1983.
- [7] M. J. D. Powell, "A hybrid method for nonlinear equations," in *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Gordon and Breach Science, 1970, pp. 87–144.