

Análise de Desempenho de Modelos de Linhas de Transmissão a Parâmetros Discretos

Pablo Torrez Caballero
Sérgio Kurokawa
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Estadual Paulista
Ilha Solteira, Brasil

Eduardo Coelho Marques da Costa
Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétrica
Universidade de São Paulo
São Paulo, Brasil

Resumo— Uma análise completa da cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência é apresentada. As equações que representam o sistema tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência são encontradas e comparadas com a solução hiperbólica das linhas de transmissão. A importância de cada um dos parâmetros que descrevem o sistema é descrita e é mostrado que a cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência é precisa e confiável para representação de linhas de transmissão longas e simulação de transitórios rápidos. Foi determinado que uma cascata de 150 circuitos π com 8 elementos R e L em paralelo é suficiente para simular transitórios rápidos em linhas de até 1000 km de comprimento.

Palavras chave—Transmission lines, Power distribution, Power system analysis computing, Power system faults.

I. INTRODUÇÃO

Operações de manobra, faltas, ou perturbações externas (e.g. descargas atmosféricas) podem produzir ondas eletromagnéticas viajantes em sistemas de potência. Estas ondas e os reflexos associados alteram a forma e magnitude das tensões e correntes, que podem chegar a superar as capacidades dos equipamentos conectados ao sistema. A modelagem adequada das linhas de transmissão permite uma boa previsão das tensões e correntes devido a estes transitórios eletromagnéticos. Por este motivo, a modelagem adequada é importante para o dimensionamento dos equipamentos de proteção e isolamento no sistema elétrico.

É bem sabido que os parâmetros transversais de uma linha de transmissão, R e L, são fortemente dependentes da frequência, especialmente a parcela devido ao efeito solo. Devido à dependência da frequência, à natureza distribuída dos parâmetros de transmissão e à existência de elementos não lineares no sistema, é complicado obter modelos exatos para representar as linhas de transmissão.

Dentro da literatura técnica, existem vários modelos desenvolvidos diretamente no domínio do tempo e no domínio da frequência, um dos modelos desenvolvidos no domínio do tempo é a cascata de circuitos π com parâmetros fixos. Este modelo apresenta várias limitações e sua exatidão foi amplamente discutida [1]. Com o objetivo de melhorar o desempenho deste modelo, a dependência da frequência nos

parâmetros longitudinais foi inserida na cascata de circuitos π através do uso de funções racionais [2]. No entanto, o desempenho da cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência não foi amplamente estudado.

O objetivo do nosso trabalho é avaliar a resposta da cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência, tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo. Expor a influência do número de elementos em cascata assim como a influência da quantidade de blocos que representam o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais.

II. INCLUSÃO DO EFEITO DA FREQUÊNCIA NA CASCATA DE CIRCUITOS π

Como foi mencionado anteriormente, a impedância longitudinal é fortemente dependente da frequência. A impedância longitudinal é basicamente a soma da impedância externa, da impedância interna e da impedância devido ao efeito solo.

Nesta seção, apresentamos o método pelo qual o efeito da frequência é inserido na cascata de circuitos π , as equações resultantes no domínio do tempo e no domínio da frequência.

A. Ajustando a Impedância Longitudinal

No caso das linhas de transmissão, a impedância longitudinal $Z'(\omega)$ é obtida por meio de equações analíticas que podem ser descritas por séries numéricas em função da velocidade angular ω . A impedância longitudinal $Z'(\omega)$ pode ser representada aproximadamente por meio de uma função racional $F(\omega)$ cujos polos são todos reais negativos e os resíduos são números reais positivos [2]. Desse modo, $F(\omega)$ pode ser escrita como sendo: [3]

$$F(\omega) = \frac{Z'(\omega) - R'_{dc}}{j\omega} \quad (1)$$

R'_{dc} é o valor da resistência extraída de $Z'(\omega)$ para $\omega = 0$. $F(\omega)$ pode ser representada por uma função racional do tipo:

$$F(\omega) = d + \sum_{n=1}^m \frac{c_n}{j\omega - a_n} \quad (2)$$

Por associação entre (1) e (2), obtém-se:

$$Z'(\omega) = R'_{dc} + j\omega d + \sum_{n=1}^m \frac{j\omega c_n}{j\omega - a_n} \quad (3)$$

a_n e c_n são os polos e resíduos, respectivamente, da função racional ajustada $F(\omega)$ [2]. O método *Vector Fitting* [4] pode ser usado para produzir os polos a_n e resíduos c_n .

A impedância descrita em (3) pode ser resolvida numericamente, e é relativa ao circuito da Fig. 1, cuja impedância equivalente por unidade de comprimento é:

$$Z'(\omega) = R'_0 + j\omega L'_0 + \sum_{i=1}^m \frac{j\omega R'_i}{j\omega + \frac{R'_i}{L'_i}} \quad (4)$$

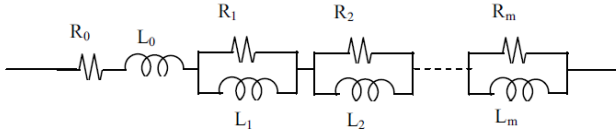


Fig. 1 Circuito relativo à função $F(w)$

A faixa de frequências que a função racional $F(\omega)$ consegue representar, depende do número m de circuitos de resistências e indutâncias em paralelo.

B. Cascata de Circuitos π com Inclusão da Frequência no Domínio do Tempo

Com uma modificação à cascata de π , é possível obter um modelo cujos parâmetros sejam dependentes da frequência. A sintetização das impedâncias longitudinais e a inserção da dependência da frequência, podem ser representadas por m associações paralelas de R e L , como é mostrado na Fig. 2 [5].

Na Fig. 2, os elementos concentrados R_i e L_i são calculados a partir dos parâmetros por unidade de comprimento R'_i e L'_i e dependem do comprimento da linha D_l e da quantidade de elementos n em cascata:

$$R_i = R'_i \frac{D_l}{n} \quad (5)$$

$$L_i = L'_i \frac{D_l}{n} \quad (6)$$

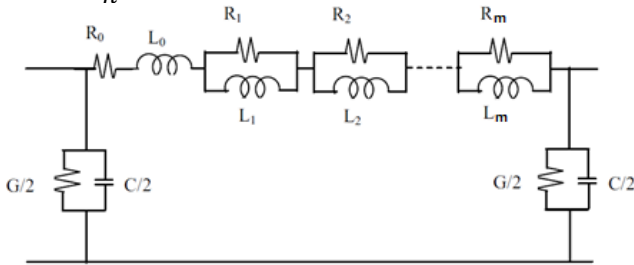


Fig. 2 Circuito π que considera o efeito da frequência

Se definimos as correntes nos indutores e as tensões nos capacitores como variáveis de estado, o sistema de equações diferenciais resultantes para o circuito da Fig. 2 pode ser escrito como:

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B][u] \quad (7)$$

Em (7), os vetores $[X]$ e $[B]$ tem $(m+2)n$ elementos e a matriz $[A]$ é $(m+2)n \times (m+2)n$. Os vetores $[X]$, $[B]$ e a matriz $[A]$ são definidas da seguinte maneira: [2]

$$[X]^T = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n] \quad (8)$$

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & [A_{(n-1)(n-2)}] & [A_{(n-1)(n-1)}] & [A_{(n-1)n}] \\ & & [A_{n(n-1)}] & [A_{nn}] \end{bmatrix} \quad (10)$$

Em (8), o vetor genérico $[X_k]$ é constituído pelas correntes nos indutores e as tensões nos capacitores no k -ésimo circuito π da cascata. Cada elemento $[X_k]$ tem $(m+2)$ elementos:

$$[X_k]^T = [i_{k0} \quad i_{k1} \quad \dots \quad i_{km} \quad V_k] \quad (11)$$

Sendo:

i_{ki} Corrente no indutor L_i do k -ésimo circuito

V_k Tensão no terminal receptor do k -ésimo circuito

Em (10), $[A]$ é uma matriz tri-diagonal composta por submatrizes $[A_{ij}]$ definidas:

$$[A_{kk}] = \begin{bmatrix} -\frac{\sum_{j=0}^m R_j}{L_0} & \frac{R_1}{L_0} & \frac{R_2}{L_0} & \dots & \frac{R_m}{L_0} & -\frac{1}{L_0} \\ \frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{R_m}{L_m} & 0 & 0 & \dots & -\frac{R_m}{L_m} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[A_{(k-1)k}] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{C} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[A_{k(k-1)}] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \frac{1}{L_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$[A]$ sendo uma matriz composta tri-diagonalmente por outras sub-matrizes, pode ser armazenada considerando somente os elementos não nulos e definindo as operações matriciais sem implicar os elementos nulos.

C. Cascata de Circuitos π com Inclusão da Frequência no Domínio da Frequência

No domínio da frequência, a cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência pode ser descrita através do circuito da Fig. 3.

Na Fig. 3, Z_{fit} é a impedância longitudinal ajustada, representada pelo circuito da Fig. 1 no domínio da frequência, e Y é a admitância transversal do k -ésimo circuito π na cascata. Estes elementos são calculados como:

$$Z_{fit}(\omega) = Z'(\omega) \frac{D_l}{n} \quad (15)$$

$$Y(\omega) = (G' + j\omega C') \frac{D_l}{2n} \quad (16)$$

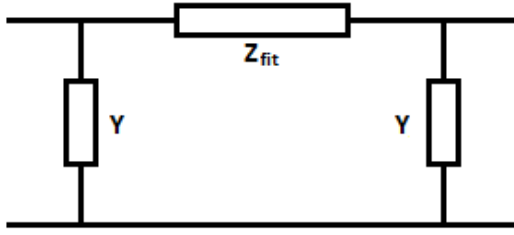


Fig. 3 Circuito π que considera o efeito da frequência no domínio da frequência

Em (16), a capacitância transversal por unidade de comprimento C' pode ser assumida a constante e a condutância G' geralmente é desprezada [6].

Com essas definições, o sistema de equações que descreve o comportamento da cascata de circuitos π da Fig. 2 no domínio da frequência, pode ser escrito na forma:

$$[B(\omega)] = [A(\omega)][X(\omega)] \quad (17)$$

Sendo:

$$[X(\omega)]^T = [I_{in1} \quad V_{out1} \quad I_{in2} \quad \dots \quad V_{outn}] \quad (18)$$

$$[B(\omega)]^T = [V_{in1} \quad V_{in1} \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (19)$$

$$[A(\omega)] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & [A_{(n-1)(n-2)}] & [A_{(n-1)(n-1)}] & [A_{(n-1)n}] \\ & & & [A_{n(n-1)}] & [A_{nn}] \end{bmatrix} \quad (20)$$

Sendo:

I_{ink} Corrente de entrada do k -ésimo circuito

V_{outk} Tensão de saída do k -ésimo circuito

V_{in1} Tensão de alimentação

Em (20), $[A]$ é uma matriz tri-diagonal composta por submatrizes $[A_{ij}]$ definidas:

$$[A_{kk}(\omega)] = \begin{bmatrix} \frac{Z}{1 + ZY} & \frac{1}{1 + ZY} \\ \frac{1}{Y} & -1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[A_{(k-1)k}(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{Y} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[A_{k(k-1)}(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Similar à representação no domínio do tempo, $[A(\omega)]$ é tri-diagonal e é altamente esparsa.

III. RESULTADOS

Para a avaliação do desempenho da cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência, as respostas tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência são comparadas com a solução hiperbólica de uma linha de transmissão para vários comprimentos de linha.

A. Dados da Linha de Transmissão

Para o cálculo das impedâncias por unidade de comprimento, é considerado a linha de transmissão monofásica da Fig. 4.

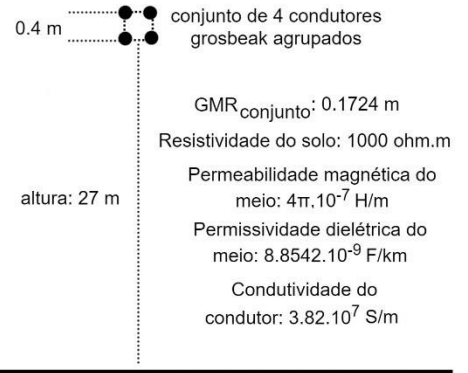


Fig. 4 Linha aérea de transmissão

B. Ajuste dos Parâmetros da Linha

Considerando os dados da linha da Fig. 4, calculou-se os parâmetros longitudinais da linha $R'(\omega)$ e $L'(\omega)$. Posteriormente, realizou-se o ajuste dos parâmetros com o método Vector Fitting para vários valores de m (quantidade de circuitos paralelos). Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 5 e Fig. 6.

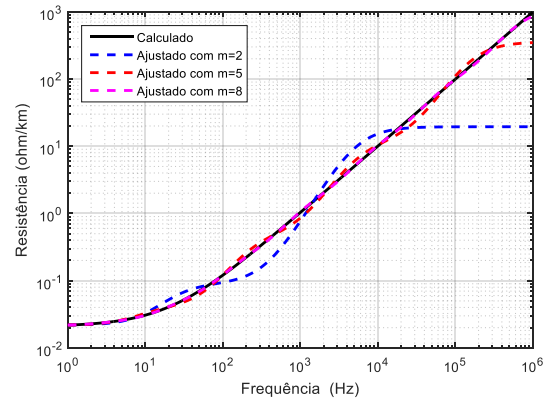


Fig. 5 Resistência por unidade de comprimento

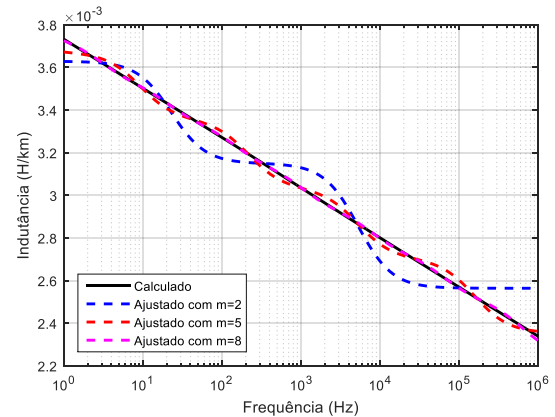


Fig. 6 Indutância por unidade de comprimento

Pode-se observar nas Fig. 5 e Fig. 6 como um maior número de elementos m garante um ajuste com maior qualidade, abrangendo uma faixa de frequências maior. Com $m = 8$, pode-se obter um ajuste fiel até uma faixa de 1 MHz.

A capacitância por unidade de comprimento calculada é $9.69 \eta F/km$ e a condutância é desprezada.

C. Cascata de Circuitos π com Inclusão da Frequência no Domínio da Frequência

Dentro dos modelos a parâmetros distribuídos que representam uma linha de transmissão, encontra-se a solução hiperbólica no domínio da frequência. A solução hiperbólica das equações diferenciais de uma linha, geralmente é usada como referência para validar outros modelos devido a sua “exatidão”. Porém, não é amplamente usada porque apresenta várias limitações, e.g., precisa de transformadas inversas para obter soluções no domínio do tempo, a representação no domínio da frequência de elementos não lineares não é simples.

Uma linha de transmissão de comprimento D_L conectada a uma carga resistiva R_L , pode ser descrita no domínio da frequência através da função de transferência (24), que descreve a relação entre a tensão de saída V_r e a tensão de entrada V_s :

$$\frac{V_r}{V_s} = \frac{1}{\cosh(\gamma D_L) + \frac{Z_o \sinh(\gamma D_L)}{R_L}} \quad (24)$$

Sendo

$$\gamma = \sqrt{(R'_i + j\omega L'_i)(j\omega C_i)} \quad (25)$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{(R'_i + j\omega L'_i)}{(j\omega C_i)}} \quad (26)$$

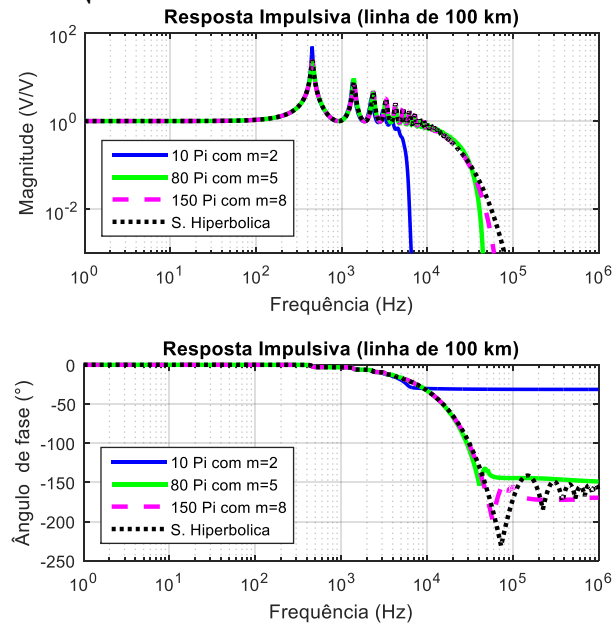


Fig. 7 Resposta impulsiva para uma linha de 100 km

Considerando uma carga R_L elevada (circuito aberto), obteve-se a resposta impulsiva da cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência para várias combinações de associações paralelas m , elementos em cascata n e

comprimentos de linha D_L . Os resultados obtidos foram comparados com a resposta impulsiva (24) e são apresentados na Fig. 7, Fig. 8 e Fig. 9.

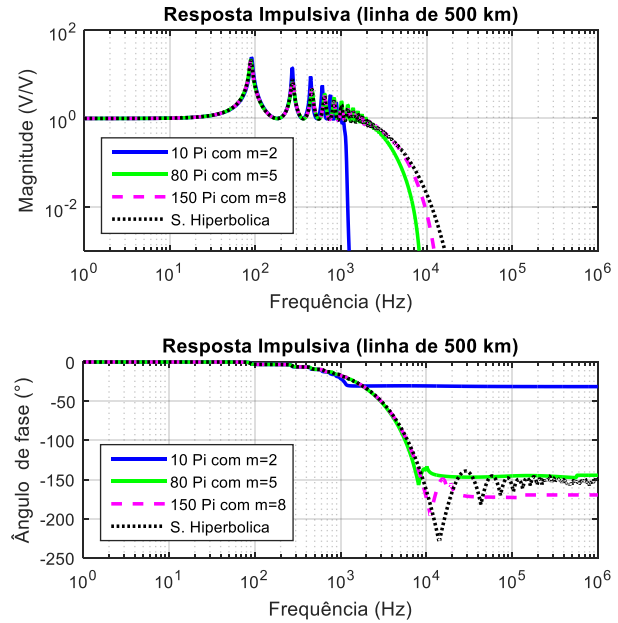


Fig. 8 Resposta impulsiva para uma linha de 500 km

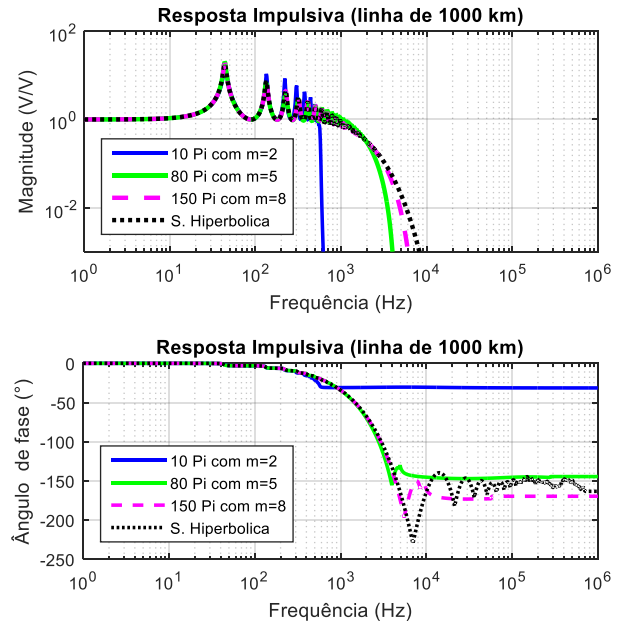


Fig. 9 Resposta impulsiva para uma linha de 1000 km

Na Fig. 7, pode-se observar como uma cascata de 150 π com $m = 8$ representa fielmente a resposta impulsiva da solução hiperbólica até aproximadamente 70 kHz. Nota-se nas 3 figuras que os sinais com frequências superiores a 100 kHz são consideravelmente amortecidos pela linha de transmissão.

Na linha de 500 km (Fig. 8) e de 1000 km (Fig. 9), pode-se ver que os componentes mais importantes da função de transferência se encontram na faixa de até 20 kHz e 7 kHz respectivamente.

Para uma correta representação da solução hiperbólica, dentro da faixa representativa (até 30 kHz), tanto na linha de 500 km como de 1000 km, precisou-se de 150 circuitos π em cascata com 8 elementos R e L em paralelo.

D. Cascata de Circuitos π com Inclusão da Frequência no Domínio do Tempo

Baseados nos resultados obtidos no domínio da frequência, implementou-se a cascata de circuitos π com inclusão do efeito da frequência no domínio do tempo para a linha de 100 km (Fig. 10), 500km (Fig. 11) e 1000km (Fig. 12), sometida a um frente de onda 1.2/50 μ s (descarga atmosférica) que abrange uma faixa de até 1 MHz.

A cascata no domínio do tempo é implementada computacionalmente na linguagem C solucionando (7) através do método de Heun. Para cada cascata usou-se 150 π com $m = 8$. Cada resposta é comparada com as equações hiperbólicas transformadas para o domínio do tempo conforme [7].

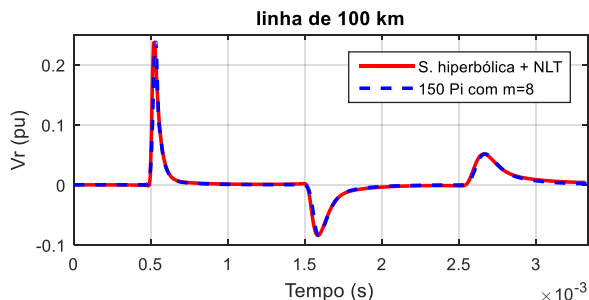


Fig. 10 Linha de 100 km sometida a um frente de onda 1.2/50 μ s

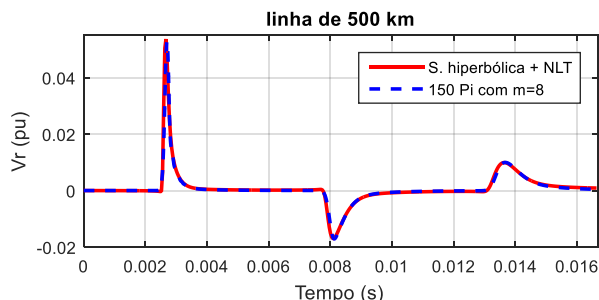


Fig. 11 Linha de 500 km sometida a um frente de onda 1.2/50 μ s

Pode-se ver como uma cascata de 150 π com $m = 8$ é suficiente para representar fielmente uma linha monofásica de até 1000 km, tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo.

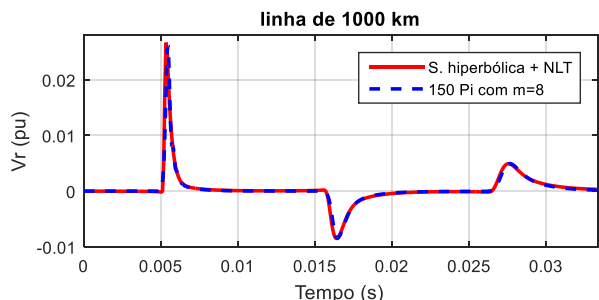


Fig. 12 Linha de 1000 km sometida a um frente de onda 1.2/50 μ s

A cascata de 150 π com $m = 8$ contém uma matriz $[A]$ esparsa de dimensão 1500×1500 que sendo tratada corretamente demora na ordem de 1-3 ms por passo de cálculo, não representando uma grande carga computacional.

IV. CONCLUSÕES

Dos testes realizados, observou-se que na cascata de circuitos π com inclusão da frequência, a quantidade de elementos R e L em paralelo m , determina os principais picos na função de transferência do sistema. Assim, uma quantidade razoável de elementos amortece os picos relativos à fixação dos parâmetros, representando o comportamento da linha mais adequadamente.

A quantidade de elementos π em cascata, determina a faixa de frequências até onde a impedância longitudinal será corretamente representada. No entanto, pode-se observar que a variação no ângulo de fase acontece quando os componentes da função de transferência (24) são quase nulos.

Os componentes mais representativos da função de transferência (24) variam em função do comprimento. Desta forma, quanto menor o comprimento da linha, maior será a frequência dos principais picos da função de transferência.

Para linhas de até 1000 km, uma cascata de 150 π com 8 circuitos R e L em paralelo (para representação do efeito da frequência), é suficiente para simular transitórios de alta frequência, e.g., frente de onda 1.2/50 μ s.

A análise apresentada no presente trabalho pode ser expandida para linhas trifásicas através da decomposição da linha de transmissão nos seus modos e ajuste dos respectivos modos. Desta forma, cada modo pode ser simulado como um conjunto de linhas monofásicas com a cascata de circuitos π com inclusão da frequência. Posteriormente, as tensões simuladas no terminal receptor têm que ser transformadas para o modo das fases.

REFERÊNCIAS

1. Y. Tang, C. Heng, H. Wang, F. Dai and S. Jiang, "Transmission Line Models Used in Traveling Wave Studies," in *1999 IEEE Transmission and Distribution Conf.*, pp. 549-557.
2. S. Kurokawa, F. N. R. Yamanaka, A. J. Prado and J. Pissolato, "Using State-Space Techniques to Represent Frequency Dependent Single-Phase Lines Directly in Time domain," in *2008 IEEE/PES Transmission and Distribution Conf. and Exposition: Latin America*, pp. 1-5.
3. M. S. Sarto, A. Scarlatti and C. L. Holloway, "On the use of fitting models for the time-domain analysis of problems with frequency-dependent parameters," in *2001 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pp. 588-593.
4. B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, pp. 1052-1061, Jul. 1999.
5. M. S. Mamis, "Computation of electromagnetic transients on transmission lines with nonlinear components," *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, vol. 150, pp. 200-204, march 2003.
6. M. S. Martinez, B. Gustavsen and D. Durbak, "Parameter determination for modeling system transients-Part I: overhead lines," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, pp. 2038-2044, july 2005.
7. P. Moreno and A. RAMIREZ, "Implementation of the Numerical Laplace Transform: A Review," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 23, pp. 2599-2609, may 2008.