

# Algoritmo Heurístico Construtivo para o Planejamento da Expansão de Sistemas de Distribuição

Leonardo H. Macedo

Rubén Romero

Departamento de Engenharia Elétrica  
UNESP – Universidade Estadual Paulista  
Ilha Solteira, Brasil

leohfmp@gmail.com, ruben@dee.feis.unesp.br

**Resumo**—Neste trabalho apresenta-se um novo algoritmo heurístico construtivo (AHC) para resolver o problema de planejamento da expansão de sistemas de distribuição (PESD) de energia elétrica. Na formulação deste problema, considera-se a expansão de novas subestações, o reforço de subestações existentes, a adição de novos alimentadores em novos caminhos e a troca de alimentadores existentes. Um novo modelo exato de programação não linear inteira mista para o PESD, adequado para ser resolvido pelo AHC, é apresentado. A configuração radial do sistema é obtida utilizando-se uma estratégia baseada no algoritmo de Kruskal, em que os valores dos arcos do grafo são calculados em cada iteração a partir da resolução do modelo de programação não linear (PNL), obtido a partir da relaxação da integralidade das variáveis de investimento do modelo exato. O AHC foi escrito em linguagem AMPL e os subproblemas de PNL foram resolvidos utilizando-se o solver IPOPT. Foram realizados testes em um sistema de 54 barras e os resultados indicam que a metodologia proposta é capaz de encontrar soluções de boa qualidade para o problema.

**Palavras-chave**—Algoritmo heurístico construtivo, planejamento da expansão de sistemas de distribuição, programação não linear.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Conjuntos:

|                        |                                       |
|------------------------|---------------------------------------|
| $\Omega_n, \Omega_n^l$ | Conjuntos de barras e barras de carga |
| $\Omega_b$             | Conjunto de ramos                     |
| $\Omega_S$             | Conjunto de barras de subestação      |
| $Y$                    | Conjuntos de opções de condutores     |

### Parâmetros:

|                          |                                                                                                |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta c_{ij,y}^L$      | Incremento de custo da escolha da opção de condutor $y$ no caminho $ij$ , em relação a $y - 1$ |
| $c_i^S$                  | Custo de construção ou repotenciação da subestação na barra $i$                                |
| $\rho$                   | Parâmetro de penalização                                                                       |
| $P_i^D, Q_i^D$           | Demandas de potência ativa e reativa na barra $i$                                              |
| $\underline{V}, \bar{V}$ | Limites mínimo e máximo de tensão no sistema                                                   |

|                                        |                                                                                                    |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta r_{ij,y}$                      | Incremento da resistência da opção $y$ , ramo $ij$                                                 |
| $\Delta x_{ij,y}$                      | Incremento da reatância da opção $y$ , ramo $ij$                                                   |
| $\Delta z_{ij,y}$                      | Incremento da impedância da opção $y$ , ramo $ij$                                                  |
| $\Delta \bar{I}_{ij,y}$                | Incremento da capacidade de corrente da opção $y$ , ramo $ij$                                      |
| $\bar{S}_i^o, \bar{S}_i^n$             | Capacidade da subestação existente e capacidade adicional da construção/repotenciação na barra $i$ |
| $\underline{w}_{ij,y}, \bar{w}_{ij,y}$ | Limites mínimo e máximo de $w_{ij,y}$ , definidos no AHC                                           |
| $\bar{u}_{ij}$                         | Limite máximo de $u_{ij}$ , definido no AHC                                                        |
| $\underline{v}_i$                      | Limite mínimo de $v_i$ , definido no AHC                                                           |

### Variáveis:

|                            |                                                                 |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $w_{ij,y}$                 | Construção da linha do tipo $y$ no ramo $ij$                    |
| $u_{ij}$                   | Indica a construção de uma linha no ramo $ij$                   |
| $v_i$                      | Indica a construção ou repotenciação da subestação na barra $i$ |
| $P_i^S, Q_i^S$             | Geração de potência ativa e reativa na barra $i$                |
| $P_{ij}, Q_{ij}$           | Fluxos de potência ativa e reativa no ramo $ij$                 |
| $g_i^P, g_i^Q$             | Cortes de carga ativa e reativa na barra $i$                    |
| $R_{ij}^{eq}, X_{ij}^{eq}$ | Resistência e reatância equivalentes do ramo $ij$               |
| $Z_{ij}^{eq}$              | Módulo da impedância equivalente do ramo $ij$                   |
| $V_i^{sq}$                 | Quadrado da magnitude de tensão na barra $i$                    |
| $I_{ij}^{sq}$              | Quadrado da magnitude da corrente no ramo $ij$                  |
| $f_{ij}^V$                 | Variável de folga da queda de tensão no ramo $ij$               |

## I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho é proposto um algoritmo heurístico construtivo (AHC), para resolver o problema de planejamento da expansão de sistemas de distribuição (PESD) de energia elétrica estático, ou seja, considerando apenas um estágio. Neste problema, o objetivo é encontrar o plano ótimo de expansão do sistema de distribuição para o horizonte de planejamento. Neste contexto, são dados do problema a topologia base ou topologia corrente do ano base, com as subestações e alimentadores existentes, a carga futura em cada barra de carga para o horizonte de planejamento e as opções de expansão, isto é, as subestações que podem ser reforçadas, novas subestações que podem ser construídas, novos alimentadores que podem ser construídos em novos caminhos e as opções de troca de alimentadores existentes. A partir destes dados, deve-se encontrar o plano ótimo de expansão, isto é, determinar quais destes novos componentes devem ser construídos para que o sistema opere de forma adequada no horizonte de planejamento, com custo mínimo de expansão e de operação do sistema elétrico.

Para ser factível, uma solução do problema de PESD deve ser radial (deve ter a estrutura de uma árvore geradora, do ponto de vista de teoria de grafos), e deve cumprir com as seguintes restrições operacionais: 1) limites de tensão nas barras do sistema; 2) capacidade de corrente dos alimentadores; 3) as duas leis de Kirchhoff e 4) capacidade das subestações.

Existem vários trabalhos que abordam o problema de PESD, propondo várias técnicas de solução, como heurísticas, meta-heurísticas e modelos aproximados ou relaxados para serem resolvidos com métodos exatos. A referência [1] foi o primeiro trabalho a abordar o PESD como um problema de otimização, utilizando programação linear. Uma revisão completa sobre os trabalhos que abordam o problema de PESD é feita em [2]. Neste trabalho são apresentadas várias abordagens para o problema de PESD, dentre elas, o planejamento com segurança e com incertezas, e as várias técnicas de solução já utilizadas. Nos primeiros trabalhos que abordam o PESD, o modelo de operação considerado para a rede era o DC.

Diferentes meta-heurísticas foram utilizadas para resolver o problema de PESD [3]–[6], destacando-se o uso de algoritmos genéticos. A referência [3] apresenta um algoritmo genético para o problema de PESD multistágio. Os resultados são apresentados considerando-se otimização multiobjetivo, levando em conta investimentos e confiabilidade. A referência [4] apresenta um algoritmo genético para resolver o problema de PESD em sistemas de distribuição de energia elétrica (SDEE) de grande porte. Em [5] é apresentado um algoritmo de colônia de formigas para o PESD. Em [6] é apresentada uma abordagem utilizando um algoritmo genético multiobjetivo considerando custos de expansão e índices de faltas.

A referência [7] apresenta um algoritmo heurístico construtivo para o problema de PESD. Em cada etapa do algoritmo, os pesos dos ramos são obtidos resolvendo-se um modelo relaxado do problema exato de programação não linear inteira mista (PNLIM). Na metodologia proposta são consideradas as equações de fluxo de carga para sistemas de transmissão. Uma fase de melhoria local também é utilizada. Em [8] é abordado o tema de como se considerar a restrição de radialidade em problemas de otimização de sistemas de distribuição.

Recentemente, modelos exatos mais realistas foram propostos para o problema de PESD, como exemplo [9]–[12], que consideram a operação AC do sistema. Em [9] é apresentado um modelo de programação linear inteira mista (PLIM) para o problema de seleção ótima de condutores. Em [10] apresenta-se um modelo de programação cônica inteira mista para o problema de PESD. A referência [11] apresenta um modelo de programação cônica de segunda ordem inteira mista para o problema de PESD, considerando também alocação simultânea de bancos de capacitores. Finalmente, em [12] é apresentado um modelo de PLIM para o problema de PESD multistágio considerando também a alocação de bancos de capacitores e reguladores de tensão simultaneamente.

A principal contribuição deste trabalho é um novo algoritmo heurístico construtivo para o problema de PESD, que utiliza uma nova estratégia para o problema de seleção de condutores e recondutoramento. Um novo modelo de PNLIM para o problema de PESD, mais adequado de ser resolvido iterativamente pelo AHC, também é apresentado.

## II. MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE PESD

### A. Operação em Regime Permanente de SDEE

A operação em regime permanente de um sistema de distribuição radial é modelada nesse artigo assumindo-se que: (a) a carga é representada como demandas de potência ativa e reativa constantes; (b) as perdas de potência ativa e reativa do ramo  $ij$  estão concentradas na barra  $i$ ; (c) o sistema é balanceado, e pode ser representado por um equivalente monofásico. Estas três considerações são mostradas na Fig. 1. Os termos  $R_{ij}I_{ij}^2$  e  $X_{ij}I_{ij}^2$  representam as perdas de potência ativa e reativa do ramo  $ij$ , respectivamente.

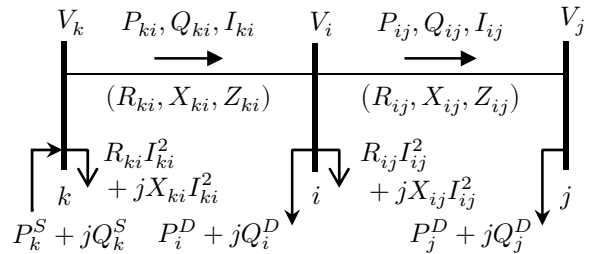


Figura 1. Sistema de distribuição ilustrativo com três barras.

As equações que representam a operação em regime permanente de um SDEE radial são mostradas em (1)–(4) [9]. Estas equações são utilizadas no método de fluxo de carga por varredura [13].

$$\sum_{ki \in \Omega_b} P_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_b} (P_{ij} + R_{ij}I_{ij}^2) + P_i^S = P_i^D \quad \forall i \in \Omega_n \quad (1)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_b} Q_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_b} (Q_{ij} + X_{ij}I_{ij}^2) + Q_i^S = Q_i^D \quad \forall i \in \Omega_n \quad (2)$$

$$V_i^2 - V_j^2 = 2(R_{ij}P_{ij} + X_{ij}Q_{ij}) + Z_{ij}I_{ij}^2 \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (3)$$

$$I_{ij}^2 V_j^2 = P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (4)$$

As equações de balanço de potência ativa e reativa (lei de Kirchhoff das correntes) em todas as barras são representadas por (1) e (2). A aplicação sistemática da lei de Kirchhoff das tensões ao sistema é expressa em (3) e (4).

### B. Modelagem Alternativa para a Seleção de Condutores

Diferentemente dos modelos matemáticos apresentados em [9]–[12], que consideram em cada ramo do sistema uma variável binária de investimento para cada opção de condutor, e que apenas uma dessas variáveis deve ser igual a “1”, indicando a opção escolhida, neste trabalho, a lógica de seleção de um condutor pelo modelo é feita de maneira diferente. O propósito desta modelagem alternativa é tornar o modelo mais adequado no contexto do AHC que será apresentado.

A principal dificuldade que aparece ao se tentar resolver os modelos tradicionais utilizando AHCs é a de que um condutor em um ramo definido em uma iteração do algoritmo não tenha capacidade de corrente suficiente nas iterações finais, levando a subproblemas de PNL infatíveis.

O modelo apresentado neste trabalho considera em cada ramo  $ij$  do sistema, para cada opção de condutor, uma variável de investimento binária  $w_{ij,y}$ . Considere o seguinte exemplo ilustrativo: no caminho  $ij$  podem ser instalados três tipos de condutores, de tipo 1, 2 ou 3. Neste caso, se  $w_{ij,1} = 1$  e  $w_{ij,2} = w_{ij,3} = 0$ , o condutor de tipo 1 é o escolhido; se  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = 1$  e  $w_{ij,3} = 0$ , o condutor de tipo 2 é o escolhido; finalmente, se  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = w_{ij,3} = 1$ , o condutor de tipo 3 é o escolhido. Assim, os parâmetros dos condutores devem ser redefinidos como incrementos. Para  $y = 1$  define-se  $\Delta r_{ij,1} = R_1 l_{ij}$ ,  $\Delta x_{ij,1} = X_1 l_{ij}$ ,  $\Delta z_{ij,1}^2 = (R_1^2 + X_1^2) l_{ij}$  e  $\Delta \bar{I}_{ij,1}^2 = \bar{I}_1^2$ . Para  $y > 1$ :

$$\Delta r_{ij,y} = R_y l_{ij} - R_{y-1} l_{ij} \quad (5)$$

$$\Delta x_{ij,y} = X_y l_{ij} - X_{y-1} l_{ij} \quad (6)$$

$$\Delta z_{ij,y}^2 = (R_y^2 + X_y^2) l_{ij} - (R_{y-1}^2 + X_{y-1}^2) l_{ij} \quad (7)$$

$$\Delta \bar{I}_{ij,y}^2 = \bar{I}_y^2 l_{ij} - \bar{I}_{y-1}^2 l_{ij} \quad (8)$$

Os equivalentes são calculados utilizando-se (9)–(11).

$$R_{ij}^{eq} = \sum_{y \in Y} \Delta r_{ij,y} w_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (9)$$

$$X_{ij}^{eq} = \sum_{y \in Y} \Delta x_{ij,y} w_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (10)$$

$$Z_{ij}^{2,eq} = \sum_{y \in Y} \Delta z_{ij,y}^2 w_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (11)$$

Como exemplo, considere um caminho  $ij$ , com  $l_{ij} = 1$  km, e as quatro opções de condutores mostradas na Tabela I [9].

TABELA I CARACTERÍSTICAS DOS TIPOS DE CONDUTORES

| Tipo $y$ | $R_y$ (Ω/km) | $X_y$ (Ω/km) | $\bar{I}_y$ (A) |
|----------|--------------|--------------|-----------------|
| 1        | 0,3655       | 0,2520       | 150             |
| 2        | 0,2921       | 0,2466       | 250             |
| 3        | 0,2359       | 0,2402       | 350             |
| 4        | 0,1932       | 0,2279       | 450             |

Neste caso:  $\Delta r_{ij,1} = 0,3655 \text{ Ω}$ ,  $\Delta r_{ij,2} = -0,0734 \text{ Ω}$ ,  $\Delta r_{ij,3} = -0,0562 \text{ Ω}$  e  $\Delta r_{ij,4} = -0,0427 \text{ Ω}$ . Tem-se que:

$$R_{ij}^{eq} = \Delta r_{ij,1} w_{ij,1} + \Delta r_{ij,2} w_{ij,2} + \Delta r_{ij,3} w_{ij,3} + \Delta r_{ij,4} w_{ij,4} \quad (12)$$

Assim, se:

- i.  $w_{ij,1} = 1$  e  $w_{ij,2} = w_{ij,3} = w_{ij,4} = 0$ :  $R_{ij}^{eq} = 0,3655 \text{ Ω}$ ;
- ii.  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = 1$  e  $w_{ij,3} = w_{ij,4} = 0$ :  $R_{ij}^{eq} = 0,2921 \text{ Ω}$ ;
- iii.  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = w_{ij,3} = 1$  e  $w_{ij,4} = 0$ :  $R_{ij}^{eq} = 0,2359 \text{ Ω}$ ;
- iv.  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = w_{ij,3} = w_{ij,4} = 1$ :  $R_{ij}^{eq} = 0,1932 \text{ Ω}$ .

Note que em (i)  $R_{ij}^{eq}$  corresponde à escolha do condutor do tipo 1, em (ii) à escolha do tipo 2, em (iii) à escolha do tipo 3 e em (iv) à escolha do tipo 4. Os outros parâmetros e os respectivos equivalentes podem ser calculados utilizando a mesma lógica.

Os incrementos dos custos são definidos como mostrado em (13)–(16), onde  $t_{ij}$  representa o tipo de condutor existente no ramo  $ij$ ,  $C_{t_{ij},y}^L$  é o custo, por unidade de comprimento, de se trocar o condutor do tipo  $t_{ij}$  pelo tipo  $y$  e  $M$  é um número grande, muito maior que todos os outros custos, para indicar que o recondutoramento não é uma proposta vantajosa, pois envolve a troca de um condutor por outro de menor capacidade.

$$\Delta c_{ij,y}^L = C_{t_{ij},y}^L l_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_b, y \in Y | y = 1 \text{ e } t_{ij} \leq 1 \quad (13)$$

$$\Delta c_{ij,y}^L = C_{t_{ij},y}^L l_{ij} - C_{t_{ij},y-1}^L l_{ij} \quad (14)$$

$$\forall ij \in \Omega_b, y \in Y | (y > 1 \text{ e } t_{ij} \leq 1) \text{ ou } (t_{ij} > 1 \text{ e } y > t_{ij})$$

$$\Delta c_{ij,y}^L = M \quad \forall ij \in \Omega_b, y \in Y | t_{ij} > 1 \text{ e } y < t_{ij} \quad (15)$$

$$\Delta c_{ij,y}^L = -M(t_{ij} - 1) \quad (16)$$

$$\forall ij \in \Omega_b, y \in Y | t_{ij} > 1 \text{ e } y = t_{ij}$$

O custo da escolha de um condutor do tipo  $y$  para o caminho  $ij$ ,  $c_{ij}^L$ , é obtido como mostrado em (17).

$$c_{ij}^L = \sum_{y \in Y} \Delta c_{ij,y}^L w_{ij,y} \quad (17)$$

Como exemplo do cálculo do custo da escolha de um condutor do tipo  $y$  para um ramo  $ij$ , com  $l_{ij} = 1$  km, considere que inicialmente exista um condutor do tipo  $t_{ij} = 2$  instalado nesse ramo. Adicionalmente, considere os custos de instalação e recondutoramento mostrados na Tabela II [9].

TABELA II CUSTO DE RECONDUTORAMENTO DO CONDUTOR DO TIPO  $t_{ij}$  PARA O TIPO  $y$  ( $10^3$  US\$/km)

|                  |   | Para o tipo $y$ |     |     |    |
|------------------|---|-----------------|-----|-----|----|
|                  |   | 1               | 2   | 3   | 4  |
| Do tipo $t_{ij}$ | 0 | 30              | 35  | 42  | 46 |
|                  | 1 | 0               | 34  | 41  | 44 |
|                  | 2 | $M$             | 0   | 40  | 41 |
|                  | 3 | $M$             | $M$ | 0   | 40 |
|                  | 4 | $M$             | $M$ | $M$ | 0  |

Neste caso, utilizando-se (15):  $\Delta c_{ij,1}^L = M \times 10^3$  US\$, por (16):  $\Delta c_{ij,2}^L = -M \times 10^3$  US\$, e por (14):  $\Delta c_{ij,3}^L = 40 \times 10^3$  US\$ e  $\Delta c_{ij,4}^L = 1 \times 10^3$  US\$. Tem-se que:

$$c_{ij}^L = \Delta c_{ij,1}^L w_{ij,1} + \Delta c_{ij,2}^L w_{ij,2} + \Delta c_{ij,3}^L w_{ij,3} + \Delta c_{ij,4}^L w_{ij,4} \quad (18)$$

Assim, se:

- i.  $w_{ij,1} = 1$  e  $w_{ij,2} = w_{ij,3} = w_{ij,4} = 0$ :  $c_{ij}^L = M \times 10^3$  US\$;
- ii.  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = 1$  e  $w_{ij,3} = w_{ij,4} = 0$ :  $c_{ij}^L = 0 \times 10^3$  US\$;
- iii.  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = w_{ij,3} = 1$  e  $w_{ij,4} = 0$ :  $c_{ij}^L = 40 \times 10^3$  US\$;
- iv.  $w_{ij,1} = w_{ij,2} = w_{ij,3} = w_{ij,4} = 1$ :  $c_{ij}^L = 41 \times 10^3$  US\$.

As situações, (i), (ii), (iii) e (iv) correspondem ao custo de se trocar um condutor do tipo  $t_{ij} = 2$  por um condutor do tipo  $y = 1, y = 2, y = 3$  ou  $y = 4$ , respectivamente.

Na seção seguinte é apresentado o modelo completo de PLIM para o problema de PESD, com as considerações feitas.

### C. Modelo de PNLIM para o PESD

O modelo exato para o problema de PESD é apresentado em (19)–(40). A função objetivo (19) minimiza o investimento em linhas e em subestações, e o corte de carga penalizado.

$$\min \sum_{ij \in \Omega_b} \sum_{y \in Y} \Delta c_{ij,y}^L w_{ij,y} + \sum_{i \in \Omega_S} c_i^S v_i + \rho \sum_{i \in \Omega_n} (g_i^P + g_i^Q) \quad (19)$$

No modelo (1)–(4) as variáveis correspondentes à magnitude de tensão nas barras e a magnitude da corrente nos ramos aparecem todas elevadas ao quadrado, desta forma a troca de variáveis mostrada em (20) pode ser feita.

$$I_{ij}^{sq} = I_{ij}^2 \text{ e } V_i^{sq} = V_i^2, I_{ij}^{sq} \geq 0 \text{ e } V_i^{sq} \geq 0 \quad (20)$$

As restrições de balanço de potência ativa e reativa, em todas as barras do sistema, são apresentadas em (21) e (22).

$$\sum_{ki \in \Omega_b} P_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_b} (P_{ij} + R_{ij}^{eq} I_{ij}^{sq}) + P_i^S + g_i^P = P_i^D \quad (21)$$

$$\sum_{ki \in \Omega_b} Q_{ki} - \sum_{ij \in \Omega_b} (Q_{ij} + X_{ij}^{eq} I_{ij}^{sq}) + Q_i^S + g_i^Q = Q_i^D \quad (22)$$

$$\forall i \in \Omega_n$$

As restrições (23)–(25) representam a aplicação da segunda lei de Kirchhoff ao sistema. Na situação em que não existe um condutor instalado no ramo  $ij$ ,  $u_{ij} = 0$ , e desta forma a variável de folga  $f_{ij}^V$  está livre para variar, deixando a queda de tensão expressa em (23) folgada.

$$V_i^{sq} - V_j^{sq} - f_{ij}^V = 2(R_{ij}^{eq} P_{ij} + X_{ij}^{eq} Q_{ij}) + Z_{ij}^{2,eq} I_{ij}^{sq} \quad (23)$$

$$|f_{ij}^V| \leq (\bar{V}^2 - \underline{V}^2) (1 - u_{ij}) \quad (24)$$

$$I_{ij}^{sq} V_j^{sq} = P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \quad (25)$$

$$\forall ij \in \Omega_b$$

A resistência, reatância e quadrado do módulo da impedância equivalentes de todos os ramos do sistema são calculados em (26)–(28).

$$R_{ij}^{eq} = \sum_{y \in Y} \Delta r_{ij,y} w_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (26)$$

$$X_{ij}^{eq} = \sum_{y \in Y} \Delta x_{ij,y} w_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (27)$$

$$Z_{ij}^{2,eq} = \sum_{y \in Y} \Delta z_{ij,y}^2 w_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (28)$$

O limite de tensão nas barras do sistema é representado em (29), enquanto (30) representa o limite de capacidade de corrente nos condutores.

$$\underline{V}^2 \leq V_i^{sq} \leq \bar{V}^2 \quad \forall i \in \Omega_n \quad (29)$$

$$0 \leq I_{ij}^{sq} \leq \sum_{y \in Y} \Delta \bar{I}_{ij,y}^2 w_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (30)$$

Como o modelo apresentado considera a adição sucessiva de linhas em um caminho para a obtenção dos equivalentes das opções, a adição deve ser sequencial, isto é representado em (31). A restrição (32) representa o cálculo da variável binária auxiliar  $u_{ij}$ , que indica se uma linha foi instalada no ramo  $ij$ .

$$w_{ij,y} \leq w_{ij,y-1} \quad \forall ij \in \Omega_b, \forall y \in Y | y > 1 \quad (31)$$

$$w_{ij,y} \leq u_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_b, \forall y \in Y \quad (32)$$

A equação (33) é uma condição necessária para radialidade do sistema, que em conjunto com as restrições de balanço de potência, na situação em que todas as cargas são diferentes de zero, garante que a solução do problema será radial [8]. A restrição (34) é uma restrição de cerca, que visa diminuir a região factível do problema relaxado, impondo que à cada barra de carga esteja conectado pelo menos um condutor.

$$\sum_{ij \in \Omega_b} u_{ij} = |\Omega_n| - |\Omega_S| \quad (33)$$

$$\sum_{\substack{ij \in \Omega_b \\ i=k \text{ ou } j=k}} u_{ij} \geq 1 \quad \forall k \in \Omega_n^l \quad (34)$$

A restrição (35) representa o limite de potência aparente das subestações.

$$(P_i^S)^2 + (Q_i^S)^2 \leq (\bar{S}_i^o)^2 + [2\bar{S}_i^o \bar{S}_i^n + (\bar{S}_i^n)^2] v_i \quad \forall i \in \Omega_S \quad (35)$$

A restrição (36) impõe que as gerações fictícias ativa e reativa devem ser não negativas nas barras de carga e (37) as fixam em zero nas subestações.

$$g_i^P, g_i^Q \geq 0 \quad \forall i \in \Omega_n^l \quad (36)$$

$$g_i^P, g_i^Q = 0 \quad \forall i \in \Omega_S \quad (37)$$

A natureza binária da variável de investimento correspondente a construção de linhas e recondutoramento é expressa em (38). A restrição (39) indica a natureza binária da variável que indica se existe uma linha construída no ramo  $ij$ . Finalmente, (40) representa a característica binária da variável de construção ou repotenciação de cada subestação.

$$w_{ij,y} \in \{0,1\} \quad \forall ij \in \Omega_b, \forall y \in Y \quad (38)$$

$$u_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (39)$$

$$v_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \Omega_S \quad (40)$$

Como (21)–(23) apresenta produto de variáveis, (25) apresenta produto de variáveis e variáveis ao quadrado, (35) apresenta variáveis ao quadrado e (38)–(40) definem variáveis binárias, o modelo (19)–(40) é de PNLIM, não convexo, de difícil solução e com características de apresentar explosão combinatória e comportamento multimodal.

#### D. Modelo Relaxado de PNL para o PESD

De forma a resolver o modelo de PESD de forma aproximada por um AHC, considera-se relaxar a integralidade das variáveis binárias do problema. Desta forma (38)–(40) são substituídas por (41)–(43).

$$\underline{w}_{ij,y} \leq w_{ij,y} \leq \bar{w}_{ij,y} \quad \forall ij \in \Omega_b, \forall y \in Y \quad (41)$$

$$0 \leq u_{ij} \leq \bar{u}_{ij} \quad \forall ij \in \Omega_b \quad (42)$$

$$\underline{v}_i \leq v_i \leq 1 \quad \forall i \in \Omega_S \quad (43)$$

Em (41)–(43),  $\underline{w}_{ij,y}$ ,  $\bar{w}_{ij,y}$ ,  $\bar{u}_{ij}$  e  $\underline{v}_i$  são parâmetros do AHC. O modelo relaxado que será resolvido em cada iteração do AHC é apresentado em (44)–(45).

$$\min \sum_{ij \in \Omega_b} \sum_{y \in Y} \Delta c_{ij,y}^L w_{ij,y} + \sum_{i \in \Omega_S} c_i^S v_i + \rho \sum_{i \in \Omega_n^L} (g_i^P + g_i^Q) \quad (44)$$

$$\text{Sujeito a: (21)–(37), (41)–(43).} \quad (45)$$

A próxima seção apresenta o AHC proposto.

#### III. ALGORITMO HEURÍSTICO CONSTRUTIVO PARA O PESD

O AHC para o problema de PESD é mostrado na Fig. 2.

1. **Inicialização:** Faça  $\underline{w}_{ij,y} = 0$  e  $\bar{w}_{ij,y} = 1 \quad \forall ij \in \Omega_b, \forall y \in Y$ ;  $\bar{u}_{ij} = 1 \quad \forall ij \in \Omega_b$ ; e  $\underline{v}_i = 0 \quad \forall i \in \Omega_S$ . Resolva (44)–(45).
2. **Seleção dos condutores e construção de subestações:**  
**Enquanto**  $\sum_{ij \in \Omega_b} \sum_{y \in Y} \Delta c_{ij,y}^L (w_{ij,y} - \underline{w}_{ij,y}) > 0$  **repita:**
  - a) Calcule o índice de sensibilidade  $IS_{ij}^L$ :
$$IS_{ij}^L = \sum_{y \in Y} (w_{ij,y} - \underline{w}_{ij,y}) / (1 + C_{ij,y}^L l_{ij})$$
  - b) Escolha o ramo  $ij$  com maior valor de  $IS_{ij}^L$ . Se esse ramo não forma laço com os ramos já construídos, ou conecte duas subestações, faça  $\delta_{ij} = \sum_{y \in Y} \underline{w}_{ij,y} + 1$  e  $\underline{w}_{ij,\delta_{ij}} = 1$ , e vá para 2.c). Caso contrário, faça  $\bar{u}_{ij} = 0$  e vá para 2.d).
  - c) Se o ramo construído conecta uma barra de subestação  $i$  ainda não construída, faça  $\underline{v}_i = 1$ . Reinicie o processo de seleção de condutores:  $\underline{w}_{ij,y} = 0$  e  $\bar{w}_{ij,y} = 1 \quad \forall ij \in \Omega_b, \forall y \in Y$ ;  $\bar{u}_{ij} = 1 \quad \forall ij \in \Omega_b$ ;
  - d) Resolva o modelo (44)–(45).
3. **Repotenciação de subestações existentes:**  
**Fixe**  $\bar{w}_{ij,y} = 0 \quad \forall ij \in \Omega_b, \forall y \in Y | \underline{w}_{ij,y} = 0$ ;  
**Enquanto**  $\sum_{i \in \Omega_S} c_i^S (v_i - \underline{v}_i) > 0$  **repita:**
  - a) Calcule o índice de sensibilidade das subestações,  $IS_i^S$ :
$$IS_i^S = v_i - \underline{v}_i$$
  - b) Para a barra de subestação  $i$  com o maior  $IS_i^S$ , faça  $\underline{v}_i = 1$ ;
  - c) Resolva o modelo (44)–(45).
4. **Verificar a possibilidade de se trocar um condutor novo por outro de menor capacidade:**  
**Enquanto** existir um ramo  $ij$  ainda não analisado com a corrente  $I_{ij}$  menor que a capacidade do condutor imediatamente inferior **faça:**
  - a) Para o ramo com menor  $I_{ij}$ , calcule  $\delta_{ij} = \sum_{y \in Y} \underline{w}_{ij,y}$  e faça  $\underline{w}_{ij,\delta_{ij}} = 0$ ;
  - b) Resolva o modelo (44)–(45).
  - c) Se  $\sum_{ij \in \Omega_b} \sum_{y \in Y} \Delta c_{ij,y}^L (w_{ij,y} - \underline{w}_{ij,y}) > 0$ , **faça:**  $\underline{w}_{ij,\delta_{ij}} = 1$ ;

Figura 2. AHC para o problema de PESD.

No algoritmo apresentado na Fig. 2, a etapa 1 corresponde a inicialização dos parâmetros. Desta forma, os limites inferiores para  $w_{ij,y}$  e  $v_i$  são fixados em zero, enquanto os limites superiores de  $w_{ij,y}$  e  $u_{ij}$  são fixados em um. Em seguida resolve-se o modelo de PNL (44)–(45).

A etapa 2 do algoritmo corresponde à seleção dos condutores e a construção de subestações novas. Esta etapa é repetida enquanto o custo de investimento em condutores, para as variáveis ainda não fixadas no AHC, for maior que zero. No passo 2.a), calcula-se o índice de sensibilidade  $IS_{ij}^L$ , para todos os ramos do sistema. Em 2.b) o condutor é adicionado ao ramo  $ij$  com o maior  $IS_{ij}^L$ . Nesta etapa, um contador  $\delta_{ij}$  indica o tipo do condutor imediatamente acima do existente. Desta forma, inicialmente, adiciona-se o condutor de menor capacidade (menor custo) ao ramo  $ij$ , e nas iterações seguintes ocorre a troca por condutores de maior capacidade, caso necessário, utilizando a lógica mostrada na subseção II-B. Note que neste passo, um condutor não pode formar laço e nem conectar duas subestações. Esta estratégia é baseada no algoritmo de Kruskal para árvore geradora mínima [14]. No passo 2.c), verifica-se se uma nova subestação deve ser construída. Uma subestação é construída na situação em que uma barra de carga é conectada à uma barra de subestação ainda não existente. Adicionalmente, neste passo, o processo é reiniciado (fixando-se a subestação construída). No passo 2.d) o modelo (44)–(45) é novamente resolvido, para o cálculo do  $IS_{ij}^L$  da próxima iteração.

Na etapa 3 do AHC verifica-se a necessidade de se repotenciar subestações existentes. Nesta etapa a topologia da rede e os tipos de condutores já estão definidos. A subestação com o melhor índice de sensibilidade é repotenciada em cada iteração, até que não haja a necessidade de investimento adicional.

Finalmente, na etapa 4 do AHC, verifica-se se existe algum condutor sobredimensionado no sistema. Caso em algum ramo  $ij$  exista um condutor com custo inferior ao que foi obtido na etapa 2, e que ainda assim tenha capacidade suficiente de corrente para garantir a operação factível do sistema, é feita a troca pelo condutor de menor capacidade. Caso a troca leve a infactibilidade do modelo, devido, por exemplo, a violação do limite inferior de tensão nas barras, o tipo de condutor definido na etapa 2 é mantido (passo 4.c)). Essa etapa é repetida para todos os ramos do sistema em que seja possível a troca, e deve ser iniciada pelos ramos com o menor valor de fluxo de corrente. Adicionalmente, se ocorre uma troca em um ramo  $ij$ , este deve ser novamente analisado.

#### IV. RESULTADOS

O AHC proposto foi implementado na linguagem de programação matemática AMPL [15] e os subproblemas de PNL foram resolvidos com o solver de IPOPT [16] em um computador com um processador Intel Core i7-4770 de 3,4 GHz.

O desempenho da metodologia foi avaliado com o sistema de 54 barras adaptado de [3]. Nos testes, assume-se  $\underline{V} = 0,95$  p.u. e  $\bar{V} = 1,00$  p.u. Os dados dos condutores são mostrados nas Tabelas I e II, e os das subestações na Tabela III. Os dados completos estão disponíveis em [17]. Nas barras 51 e 52 as subestações já existem, e podem ser repotenciadas. Nas barras 53 e 54 não existem subestações, e estas podem ser construídas.

TABELA III DADOS DAS SUBESTAÇÕES

| Barra $i$ | $\bar{S}_i^o$ (MVA) | $\bar{S}_i^n$ (MVA) | $c_i^S$ (MUS\$) |
|-----------|---------------------|---------------------|-----------------|
| 51        | 16,70               | 16,70               | 1,0             |
| 52        | 16,70               | 16,70               | 1,0             |
| 53        | —                   | 22,00               | 2,0             |
| 54        | —                   | 22,00               | 2,4             |

Nos ramos 51–1, 3–51, 4–3, 7–4, 5–4, 6–5, 9–1, 2–1, 10–9, 14–52, 15–14, 16–15, 11–52, 12–11 e 13–12 existem condutores instalados do tipo 1. Em todos os outros ramos não existem condutores. A tensão nas subestações é de 13,5 kV. A Fig. 1 ilustra o resultado do planejamento para o sistema. As subestações das barras 53 e 54 foram construídas, enquanto que as das barras 51 e 52 não necessitaram ser repotenciadas. Os números entre parênteses indicam o tipo de condutor.

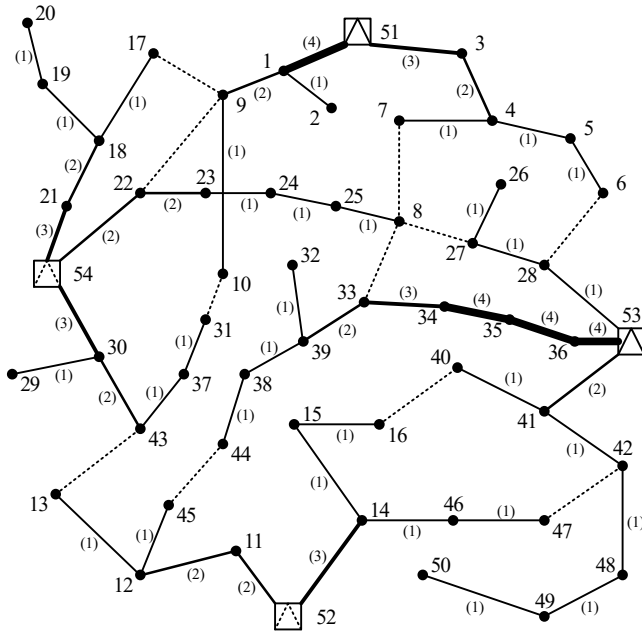


Figura 3. Resultado para o sistema de 54 barras.

O custo total do planejamento foi de US\$ 4.822.526,00, sendo US\$ 4.400.000,00 o custo de construção das subestações e US\$ 422.526,00 o custo de instalação dos condutores e do recondutoramento. As perdas no sistema são de 390,89 kW, e a magnitude de tensão mínima é 0,98 p.u., na barra 44. As gerações das subestações são:  $S_{51}^S = 15798,69$  kVA,  $S_{52}^S = 11023,90$  kVA,  $S_{53}^S = 19444,79$  kVA,  $S_{54}^S = 19272,75$  kVA. No AHC foram resolvidos 168 problemas de PNL e o tempo total de processamento foi de 2 minutos. Adicionalmente, os cortes de cargas na solução de todos problemas de PNL foram zero, e o IPOPT convergiu em todas iterações do AHC.

Finalmente, o problema foi resolvido com o modelo convexo de programação cônica de segunda ordem inteira mista apresentado em [11], sem considerar alocação de bancos de capacitores. A solução obtida apresenta custo de investimento de US\$ 4.812.148,00, enquanto que o tempo computacional foi de 7 horas. Como a proposta de [11] garante convergência para o ótimo global do problema de PESD, o resultado obtido pelo AHC proposto difere em apenas 0,2% da solução ótima.

## V. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um algoritmo heurístico construtivo para o problema de planejamento da expansão de sistemas de distribuição de energia elétrica, considerando a construção e repotenciação de subestações e a construção e o recondutoramento de linhas. Uma lógica diferente para a seleção de condutores e recondutoramento foi utilizada na modelagem matemática do problema, tornando-a mais adequada para ser resolvida pelo algoritmo construtivo.

A metodologia proposta foi aplicada a um sistema de 54 barras, disponível na literatura, e foi capaz de encontrar uma solução factível para o problema. Comparando a solução obtida utilizando-se um método presente na literatura, verifica-se que a metodologia proposta forneceu uma solução de excelente qualidade, demonstrando-se, portanto, eficiente para ser aplicada ao PESD.

## REFERÊNCIAS

- [1] U. G. W. Knight, "The logical design of electrical networks using linear programming methods," in *Proc. 1960 IEE-Part A: Power Engineering*, pp. 306–314.
- [2] S. Ganguly, N. C. Sahoo, e D. Das, "Recent advances on power distribution system planning: a state-of-the-art survey," *Energy Syst.*, vol. 4, no. 2, pp. 165–193, Jan. 2013.
- [3] V. Miranda, J. V. Ranito, e L. M. Proença, "Genetic algorithms in optimal multistage distribution network planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 9, no. 4, pp. 1927–1933, Nov. 1994.
- [4] I. J. Ramirez-Rosado e J. L. Bernal-Aguistin, "Genetic algorithms applied to the design of large power distribution systems," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 13, no. 2, pp. 696–703, Mai. 1998.
- [5] J. F. Gómez *et al.*, "Ant colony system algorithm for the planning of primary distribution circuits," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 19, no. 2, pp. 996–1004, Mai. 2004.
- [6] E. G. Carrano *et al.*, "Electric distribution network multiobjective design using a problem-specific genetic algorithm," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 21, no. 2, pp. 995–1005, Abr. 2006.
- [7] M. Lavorato, M. J. Rider, A. V. Garcia, e R. Romero, "A constructive heuristic algorithm for distribution system planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 25, no. 3, pp. 1734–1742, Aug. 2010.
- [8] M. Lavorato, J. F. Franco, M. J. Rider, e R. Romero, "Imposing radiality constraints in distribution system optimization problems," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 172–180, Feb. 2012.
- [9] J. F. Franco, M. J. Rider, M. Lavorato, e R. Romero, "Optimal conductor size selection and reconductoring in radial distribution systems using a mixed-integer LP approach," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 1, pp. 10–20, Fev. 2013.
- [10] R. A. Jabr, "Polyhedral formulations and loop elimination constraints for distribution network expansion planning," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 2, pp. 1888–1897, Mai. 2013.
- [11] J. F. Franco, M. J. Rider, e R. Romero, "A mixed-integer quadratically-constrained programming model for the distribution system expansion planning," *Int. J. Elec. Power*, vol. 62, pp. 265–272, Nov. 2014.
- [12] A. Tabares, J. F. Franco, M. Lavorato, e M. J. Rider, "Multistage long-term expansion planning of electrical distribution systems considering multiple alternatives," *IEEE Trans. Power Syst.*, in press.
- [13] R. G. Céspedes, "New method for the analysis of distribution networks," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 5, no. 1, pp. 391–396, Jan. 1990.
- [14] J. M. Harris, J. L. Hirst, e M. J. Mosinghoff, *Combinatorics and graph theory*. 2nd ed. New York: Springer, 2008.
- [15] R. Fourer, D. M. Gay, e B. W. Kernighan, *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. 2nd ed. Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003.
- [16] A. Wächter e L. T. Biegler, "On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming," *Math. Program.*, vol. 106, no. 1, pp. 25–57, Mar. 2006.
- [17] *LaPSEE Power System Test Cases Repository*. (2015, Nov. 20). [Online]. Disponível: <http://www.feis.unesp.br/#/lapsee>