

Estruturas fractais em bandas de cisalhamento e propriedades anômalas de transporte

Melina Prado de Oliveira

UERJ, Rio de Janeiro, Brasil, melina_uerj@yahoo.com.br

Rodrigo Bird Burgos

UERJ, Rio de Janeiro, Brasil, rburgos@eng.uerj.br

Armando Prestes de Menezes Filho

UERJ, Rio de Janeiro, Brasil, armandopmf@yahoo.com.br

RESUMO: O presente trabalho tem por objetivo investigar propriedades anômalas de transporte em um meio rochoso fractal elasto-plástico. Mais especificamente, bandas de cisalhamento auto-selhantes foram produzidas a partir de um modelo numérico em elementos finitos bidimensional, com elementos triangulares de 3 nós do tipo deformação constante em um contínuo clássico elasto-plástico perfeito, utilizando-se de uma lei de plastificação do tipo Mohr – Coulomb associativa, em que heterogeneidades do meio foram introduzidas por intermédio da variação do módulo de elasticidade, segundo uma dada distribuição de probabilidades. Os parâmetros de coesão, ângulo de atrito e de dilatação foram mantidos constantes durante as simulações. Condições do tipo velocidade foram impostas no contorno, de modo a se produzir um número considerável de bandas de cisalhamento, suficientes o bastante para possibilitar análises estatísticas com considerável robustez. A fractalidade do meio foi analisada, determinando-se a sua dimensão fractal D_0 fazendo-se uso do método de contagem de caixas. Em seguida, utilizando-se de um modelo de autômatas celulares do tipo percolação por invasão, simulou-se a difusão de um fluido a partir de um ponto do meio rochoso, transporte este restrito ao sistema de bandas de cisalhamento, desta feita consideradas como um sistema de fraturas condutoras. As análises mostraram que, efetivamente, a estruturação fractal do meio rochoso, obtida pelas simulações numéricas, condicionou o transporte segundo evolução temporal totalmente anômala, característica de fenômenos superdifusivos.

PALAVRAS-CHAVE: Fractais, percolação por invasão, bandas de cisalhamento, elasto-plasticidade de Mohr-Coulomb, Difusão anômala.

1 INTRODUÇÃO

A ausência de escala de certas feições geológicas encontradas no campo é uma constatação de há muito percebida pelos geólogos. Bird (2003) mostrou que a distribuição estatística das áreas das placas tectônicas na crosta terrestre obedece a uma lei de potência, sendo as leis que governam os fenômenos sísmicos - lei de Gutenberg-Richter, de Omori, etc - consequências naturais da distribuição fractal de fraturas na crosta terrestre

(Turcotte, 1995).

Padrões de fraturas (multi)fractais geradas numericamente utilizando-se o programa elasto-plástico em diferenças finitas FLAC (Cundall e Board, 1988) foram investigadas por Herrmann e colaboradores (Polyakov *et al.*, 1994a, 1994b), em que suas dimensões fractais foram determinadas e comparadas com as de campo, sendo seus valores bastante próximos.

Por outro lado, simulações envolvendo meios desordenados, com base na teoria estatística da percolação em suas diferentes

formas (isotrópica, anisotrópica, dinâmica, gradiente, viscosa, etc) mostraram que fenômenos de transporte tendo como substrato meios (multi)fractais são invariavelmente anômalos (Bunde e Havlin, 1991).

Este trabalho objetiva investigar a geração numérica de bandas de cisalhamento em meios heterogêneos tendo por base um programa de elementos finitos elasto-plástico de Mohr-Coulomb, sua eventual fractalidade, e seu comportamento face ao transporte de uma dada propriedade neste meio fractalmente estruturado. Neste sentido, bandas de cisalhamento são interpretadas como fraturas condutoras eventualmente interligadas.

2 DESCRIÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS E SUA APLICAÇÃO AO CASO EM ESTUDO

2.1 Modelo elasto-plástico

O modelo elasto-plástico implementado em um programa de elementos finitos bidimensional de deformação plana utilizado neste trabalho foi desenvolvido na PUC-RIO (Figueiredo, 1991), obedecendo à plasticidade de Mohr-Coulomb, associada ou não associada, com endurecimento e/ou amolecimento de parâmetros de resistência. As condições de contorno podem ser fornecidas em termos de força ou velocidade. O programa resolve as equações algébricas do método pela técnica de relaxação dinâmica, com diferentes tipos de amortecimento, permitindo acompanhar o histórico das deformações ao longo do tempo, fato este importante quando se lida com problemas cujo resultado final é dependente da trajetória de carregamento/deformações. O programa possibilita a descrição adequada de problemas afeitos à prática geotécnica usual (estabilidade de taludes, capacidade de carga, etc), sendo capaz de retratar fenômenos de aumento de volume (dilatância) em materiais geológicos quando cisalhados à ruptura.

As análises de elementos finitos foram efetuadas em uma malha quadrada composta de 3200 elementos triangulares de deformação constante. O modelo elasto-plástico empregado

nas análises de elementos finitos constou de plasticidade associada (coesão mobilizada nula e ângulos de atrito e de dilatância mobilizados constantes e iguais a 30°). A massa específica do material foi de 2500 Kg/m^3 e os valores dos parâmetros elásticos selecionados foram coeficiente de Poisson = 0,25 e a inserção de heterogeneidades no modelo deu-se pelos módulos de elasticidade gerados aleatoriamente, a partir de uma distribuição uniforme, com valores variando entre 0 e 100MPa, de modo a facilitar o surgimento das zonas de cisalhamento localizadas.

Condições de contorno tipo velocidade foram impostas de tal forma que o meio rochoso se deformasse de forma semelhante a um cisalhamento puro, com valores de velocidade bastante reduzidos, de modo a permitir a formação das zonas de localização e de suas interações mútuas.

2.2 Modelo de percolação por invasão

Este modelo dinâmico de percolação, proposto no início dos anos 80 (Wilkinson e Willemsen 1983) como um desenvolvimento do modelo estocástico de percolação habitual (Stauffer e Aharony, 1994), se propõe a retratar o processo de deslocamento de um fluido (molhante) por meio da injeção de outro fluido (não molhante) com características físicas distintas, sob a ação de forças capilares. De baixo esforço computacional, este modelo tem se mostrado bastante eficiente quando o processo de injeção caracteriza-se por velocidades de escoamento e forças viscosas reduzidas, ou quando o fluido deslocado é infinitamente compressível. No entanto, pode, em princípio, ser aplicado a qualquer tipo de processo invasivo governado pelo princípio da resistência mínima, como o de difusão. O processo invasivo inicia-se de qualquer ponto do domínio em estudo, invadindo os sítios quadrados que se localizam imediatamente acima, abaixo e dos lados da célula quadrada fonte da percolação.

As análises envolveram uma malha quadrada de 10000 elementos, em que a injeção de fluido se deu a partir de um sítio aproximadamente central, alcançando os bordos do domínio e aí continuando o processo difusivo até que se

esgotassem os sítios da periferia passíveis de serem invadidos.

Duas situações foram analisadas: a de um domínio fractal com bandas de cisalhamento, resultado das análises descritas no tópico anterior, em que a invasão se processou unicamente sobre os domínios de deformações localizadas; outra, servindo como exemplo comparativo, em que se admitiu o meio bidimensional como totalmente aestruturado, semelhante a um solo homogêneo e isotrópico, ou a um maço rochoso intensamente fraturado.

Em ambas as situações, o tempo foi calculado sempre que se tentou invadir um determinado sítio quadrado, com sucesso ou não, ao passo que as distâncias médias entre as células invadidas e o ponto inicial de invasão foram monitoradas ao longo do tempo.

3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A Figura 1 ilustra o aspecto das deformações localizadas no meio rochoso bidimensional, mediante a apresentação de isocurvas de deformações plásticas equivalentes, após um número significativo de iterações.

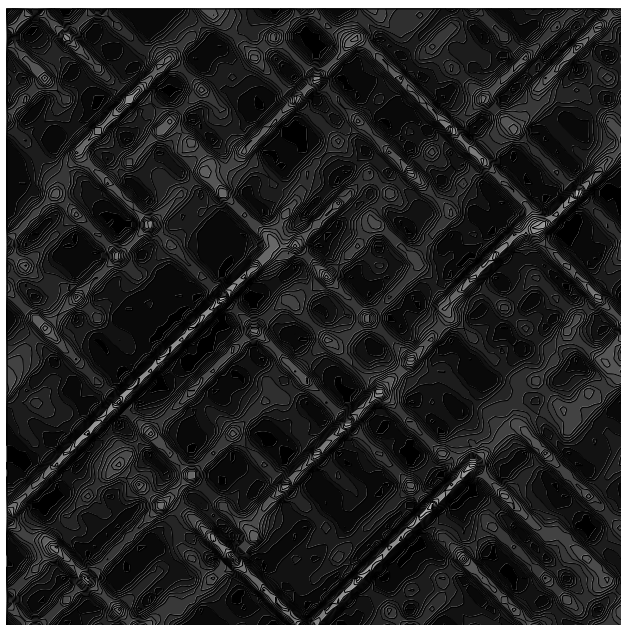


Figura 1. Aspecto das zonas de localização de deformação plástica. As isocurvas de deformação mais claras são as mais intensamente deformadas.

Pode-se observar que, graças às condições de contorno e à heterogeneidade inserida no meio por intermédio dos módulos de elasticidade, produziu-se um número significativo de bandas de cisalhamento, com deformações plásticas variando entre 0 e 2600, isto mesmo no âmbito de uma lei de fluxo plástico associada.

A dimensão fractal do meio D_0 foi calculada utilizando-se o método de contagem de caixas (Feder, 1988). Sucintamente, tal procedimento consiste em sobrepor uma malha quadrada ao padrão estrutural da Figura 1, variando-se o tamanho de cada célula l e contando-se o número de pontos no interior de cada qual. Tais resultados são colocados em um gráfico bilogarítmico, em que o eixo das abcissas apresenta o inverso dos valores do comprimento de cada célula quadrada, e o das ordenadas, os valores relativos ao número de pontos em uma dada faixa de deformações plásticas.

A Figura 2 apresenta o aspecto das bandas de cisalhamento, desta feita para valores de deformação iguais ou superiores a 400. Assinala-se, também, em azul, o ponto em que se inicia a invasão (ponto de injeção).

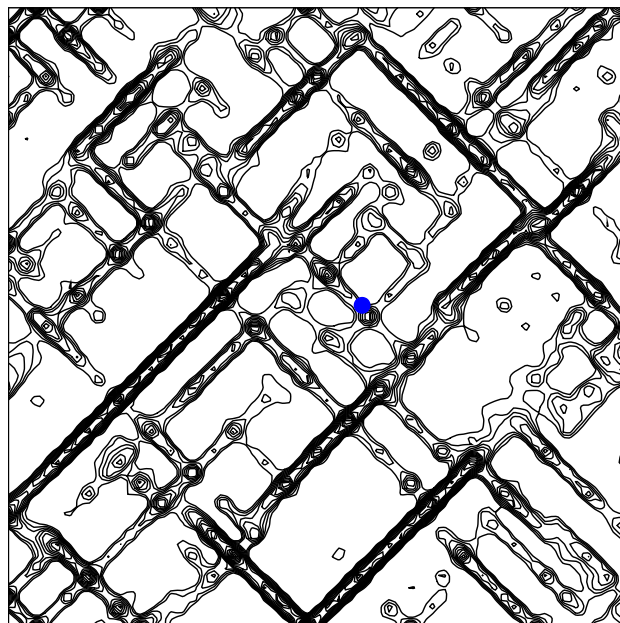


Figura 2. Aspecto das bandas de cisalhamento, selecionadas com valores de deformação plástica iguais ou superiores 400. Assinala-se, também, em azul, o ponto em que se inicia a invasão (ponto de injeção).

A Figura 3 ilustra a determinação da dimensão fractal D_0 do meio apresentado na Figura 2, tal como descrito anteriormente, e dada pela expressão

$$D_0 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log N(l)}{\log(1/l)} \quad (1)$$

em que se pode observar o ajuste de uma reta aos dados experimentais, cuja inclinação de 1,8338 (coeficiente de correlação = 0,9951) fornece a dimensão fractal buscada.

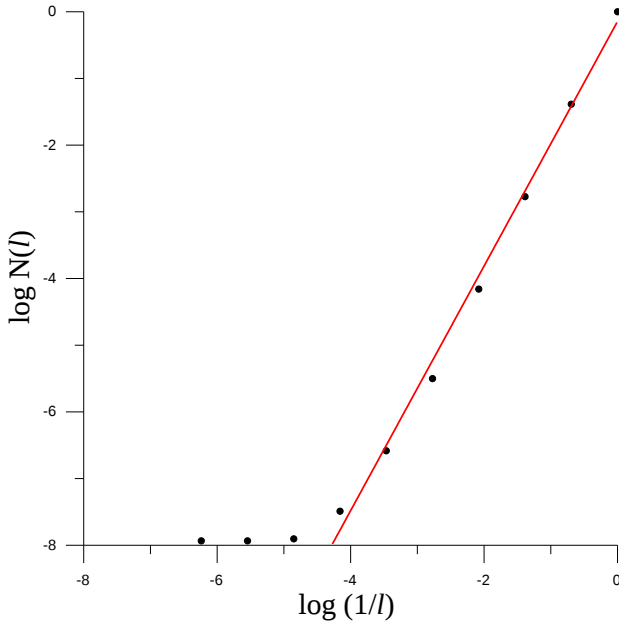


Figura 3. Determinação da dimensão fractal D_0 pelo método de contagem de caixas ($D_0 = 1,8338$; coef. correlação = 0,9951).

Ressalte-se que, nos marcos de um contínuo clássico de Cauchy, baseado no qual o aludido modelo elasto-plástico foi implementado, o fenômeno de localização de deformações é sabidamente não objetivo, ou seja, dependente da discretização da malha de elementos finitos, afetando, por conseguinte, o valor da dimensão fractal calculada anteriormente (Menezes Filho, 2003).

A difusão de um fluido em um meio homogêneo e isotrópico é apresentada, para efeitos comparativos, nas Figuras 4 e 5, em que se assinala também o ponto de injeção, idêntico ao da Figura 2. Como era de se esperar, o fenômeno de invasão efetua-se de modo aleatório (*random walk*), a partir de uma fonte aproximadamente central, apresentando-se homogêneo ao final do processo, sendo este interrompido ao se atingir todas as fronteiras do domínio.

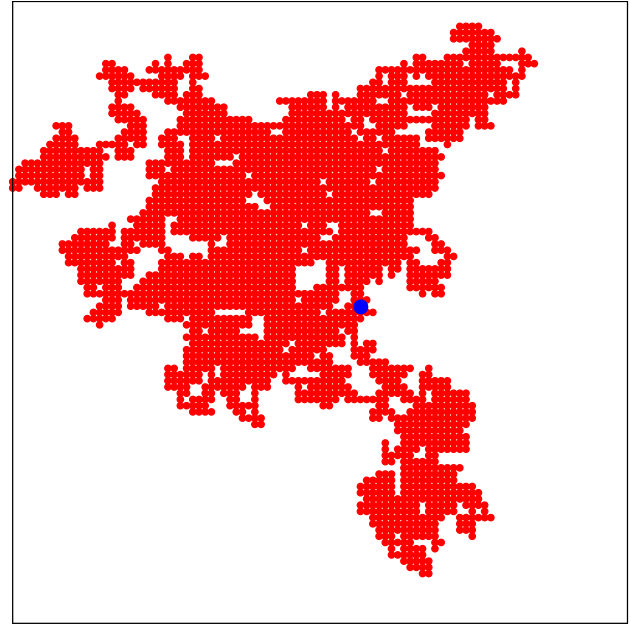


Figura 4. Aspecto da invasão, a partir de um ponto assinalado (o mesmo da Figura 2), para um tempo intermediário, em um meio homogêneo e isotrópico. O processo invasivo é normal (Fickeano), podendo-se notar o caráter aleatório do fenômeno (*random walk*).

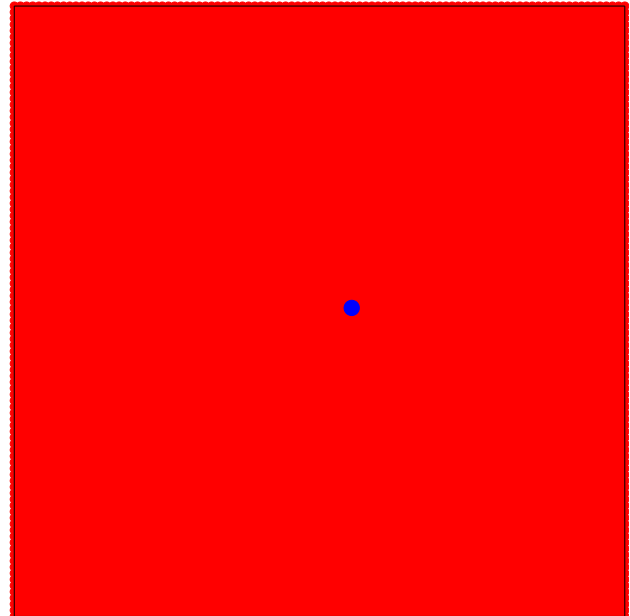


Figura 5. Aspecto final da invasão, a partir de um ponto assinalado (o mesmo da Figura 2), em um meio homogêneo e isotrópico. O processo invasivo é normal (Fickeano).

A evolução da distância média entre os pontos da frente invasiva e o ponto original de invasão, ao longo do tempo, é mostrado na Figura 6, num gráfico bilogarítmico.

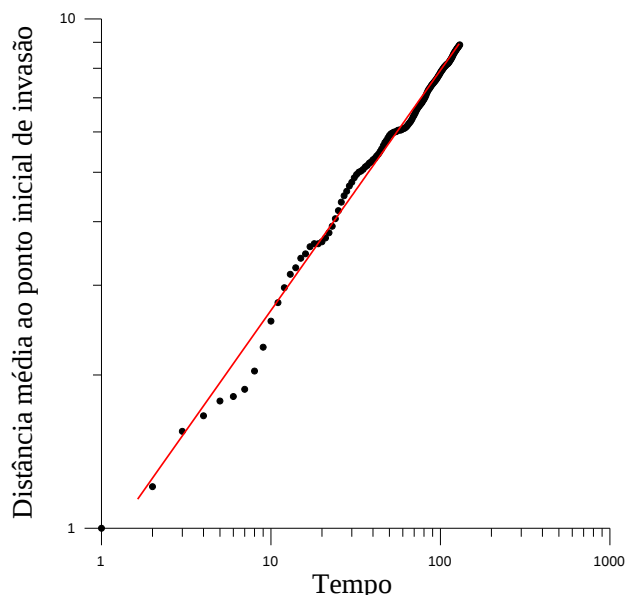


Figura 6. Evolução da distância média da frente invasora em relação ao ponto original de invasão em um gráfico log-log. A inclinação da reta de ajuste assinalada aos dados experimentais fornece um expoente igual a 0,4713 (coef. correlação = 0,9919), muito próximo ao expoente 0,50 relacionado à invasão normal Fickiana.

Nota-se que os pontos experimentais apresentam uma tendência a se situarem em uma linha reta, cuja inclinação fornece o expoente que governa o processo difusivo, neste caso igual a 0,4713 com coeficiente de correlação de 0,9919.

Segundo Einstein (1905), em seu célebre artigo dedicado ao movimento browniano, a distância média ao ponto inicial de invasão deve variar com o tempo elevado ao expoente 0,50. Tal discrepância com o resultado da Figura 6 deve-se a que este foi obtido em uma malha de 10000 elementos (100 x 100), número ainda reduzido face à qualidade do resultado que se requer em determinações precisas desta ordem.

Assim, para o meio rochoso marcadamente homogêneo e isotrópico da Figura 5, os resultados experimentais indicam tratar-se o processo invasivo de uma difusão dita normal, pois obedece à lei de Fick, fundamental para a descrição deste fenômeno.

Por outro lado, no que se refere ao meio multifractal da Figura 2, a invasão é restrita às zonas de deformação plástica, antessala de eventuais fraturas localizadas, tal como ilustrado na Figura 7.

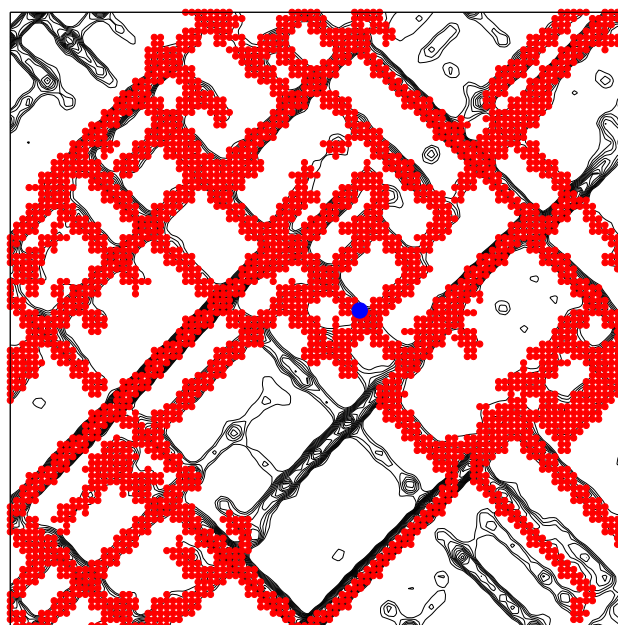


Figura 7. Padrão de invasão no meio multifractal da Figura 2, em que o processo se dá a partir do ponto assinalado.

Observa-se que, diferentemente do que ocorre num meio aestruturado, desta feita o processo invasivo é estruturalmente condicionado, ditado pela disposição geométrica das zonas localizadas. Nota-se ainda que algumas regiões não sofreram invasão, fruto, tanto da ausência de interligação destas regiões com o restante das zonas cisalhadas, bem como da interrupção do processo invasivo, quando do alcance de todas as regiões de fronteira do domínio em estudo.

A Figura 8 apresenta a evolução temporal do processo invasivo descrito no parágrafo anterior. Nota-se que, exceto pela parte inicial, os dados experimentais ajustaram-se muito bem a uma reta no gráfico bilogarítmico, fornecendo um expoente de 0,8895 (coef. correlação = 0,9992), o que sugere que o processo invasivo ilustrado nas Figuras 7 e 8 descreve um fenômeno anômalo, que não obedece à lei de Fick. Neste sentido, como o expoente é superior a 0,50, o fenômeno é dito superdifusivo, em oposição ao subdifusivo, em que o mencionado expoente é inferior a 0,50.

Fenômenos anômalos – subdifusivos ou superdifusivos – são bastante comuns em meios invariantes por escala, tal se devendo a que, em sistemas físicos com estas características auto-selhantes, há o desenvolvimento de

correlações de longo alcance entre os diferentes pontos formadores do meio rochoso, induzidas por sua própria dinâmica evolutiva, aspecto este comumente referido como criticalidade auto-organizada (Bouchaud e Georges, 1990; Bak, 1997; Menezes Filho, 2003).

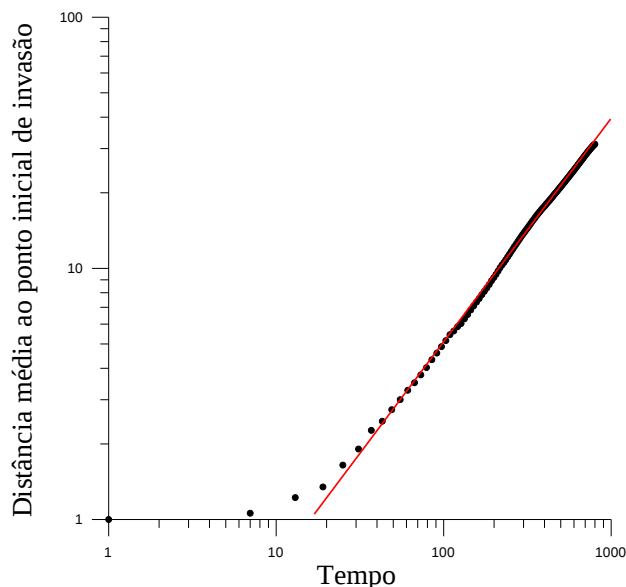


Figura 8. Evolução da distância média da frente invasora em relação ao ponto original de invasão em um gráfico log-log. A inclinação da reta de ajuste aos dados experimentais fornece um expoente igual a 0,8895 (coef. correlação = 0,9992) (invasão anômala, não Fickiana).

4 CONCLUSÕES

Este trabalho analisou a influência de um substrato fractal de distribuição de bandas de cisalhamento em propriedades de transporte, especificamente as relacionadas com a percolação por invasão de um fluido, a partir de um determinado ponto do meio bidimensional.

Tal como já verificado em agregados percolantes próximos ao ponto crítico (Stauffer e Aharony, 1992), os padrões de transporte são marcadamente influenciados pela distribuição fractal da rede de eventuais fraturas, com evolução temporal governada por lei de potencia com expoente superior ao valor 0,50 usual, ou seja, por uma lei de transporte anômala, superdifusiva.

Neste sentido, fenômenos subdifusivos e superdifusivos parecem estar relacionados ao aparecimento de correlações de longo alcance

entre os elementos constituintes do meio, situação normalmente referida como criticalidade auto-organizada.

Os resultados deste trabalho parecem sugerir que leis de transporte que funcionam satisfatoriamente em meios euclidianos - leis de Darcy, de Fourier, de Fick, etc -, ou seja, meios invariantes por translação e rotação, perdem sua validade ao serem utilizadas em meios com outro tipo de simetria, qual seja, a invariância por dilatação.

Finalizando, cabe ressaltar que o sistema de bandas de cisalhamento mostrado na Figura 2 não caracteriza apenas um padrão (mono)fractal, porém multifractal, fractalmente heterogêneo, necessitando-se, para descrevê-lo, de um conjunto infinito (espectro) de dimensões fractais, das quais D_0 é apenas uma delas.

AGRADECIMENTOS

Os Autores desejam deixar consignado o seu profundo agradecimento ao revisor deste trabalho, que, graças às suas pertinentes e oportunas observações, colaborou por torná-lo mais claro e compreensível.

REFERÊNCIAS

- Bak, P. (1997) *How Nature Works – The Science of Self-Organized Criticality*, Oxford University Press, 212p.
- Bird, P. (2003) An Updated Digital Model Of Plate Boundaries, *Geochem. Geophys. Geosystems*, 4, 1027.
- Bouchaud, J.P. e Georges, A. (1990) Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications, *Physics Reports* 195, 4-5, 127.
- Bunde, A. e Havlin, S. (1991) *Fractals and Disordered Systems*, Springer-Verlag, 350p.
- Cundall, P. e Board, M. (1988) A Microcomputer Program for Modeling Large-Strain Plasticity Problems, *in Numerical Methods in Geomechanics* (C.Swoboda,ed.), Balkema, Rotterdam
- Einstein, A. (1905) Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik*, 322, 8 (Sobre o Movimento de Pequenas Partículas em Suspensão Dentro de Líquidos em Repouso, tal como Exigido pela Teoria Cinético-Molecular do Calor, *in O Ano Miraculoso de Einstein – Cinco Artigos que*

- Mudaram a Face da Física*, (J. Stachel, ed.), Editora UFRJ, 2001, 222p).
- Feder, J. (1988) *Fractals*, Plenum Publishers, New York, NY, USA, 283p.
- Figueiredo, R.P. (1991) *Aplicações da Relaxação Dinâmica à Solução de Problemas Geotécnicos*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 187p.
- Menezes Filho, A.P. (2003) *Não-Extensividade Termodinâmica, Invariância Discreta de Escala e Elastoplasticidade: Estudo Numérico de um Modelo Geomecânico Auto-Organizado Criticamente*, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 189 p.
- Poliakov, A.N.B. e Herrmann, H.J. (1994a) Self-Organized Criticality of Plastic Shear Bands in Rocks, *Geophys. Res. Lett.*, 21, 2143.
- Poliakov, A.N.B., Herrmann, H.J., Podlachikov, Y. e Roux, S. (1994b) Fractal Plastic Shear Bands, *Fractals* 2, 567.
- Stauffer, D. e Aharony, A. (1992) *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, 181p.
- Turcotte, D. (1997) *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 398p.
- Wilkinson, D. e Willemsen, J. (1983) Invasion Percolation: A New Form of Percolation Theory, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 16, 3365.