

Coupled hydromechanical modeling of hydraulic fracture propagation using FEM with strong discontinuities

Leila Beserra

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, leila.brunet@ufpe.br

Marcela Seixas

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, marcela.seixas@ufpe.br

Leonardo Guimarães

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, leonardo@ufpe.br

Osvaldo Manzoli

Universidade Estadual de São Paulo, Recife, Brasil, omanzoli@feb.unesp.br

RESUMO: Hydraulic Fracturing is a widely used method for enhancing oil exploitation in petroleum industry. In this method, some artificial fractures are induced in the reservoir by fluid injection and the overall rock permeability is increased. The geometry of the induced fracture is dominated by the rock's mechanical properties, in-situ stresses, and local heterogeneities such as natural fractures and weak bedding planes. From the mathematical point of view it is a coupled hydro-mechanical problem, where equations for fluid flow through porous media and fractures (fluid mass balance) and medium deformation and fracture propagation (mechanical problem) have to be solved simultaneously considering the constitutive equations that describe the material behavior. When a fracture propagates through a continuous media, discontinuities in the displacement and fluid pressure fields are introduced. The selection of an appropriate fracture propagation model is a critical task in modeling of hydraulic fracturing. From the numerical point of view, the strong discontinuity approach can be introduced in two distinct ways. The first one is a technique to embed the discontinuities into the finite element, the discontinuity path is placed inside the elements, irrespective of size and specific orientation of them. In addition, mesh refinement is not necessary to capture these discontinuities and the simulation can be done with relatively coarse meshes in a reasonable computational time. The second way is to introduce solid finite elements with high aspect ratio, finite elements which have one edge much smaller than the others. These elements have similar kinematic fields of the strong discontinuity approach and can be used as interface elements.

PALAVRAS-CHAVE: Hydraulic Fracturing, Numerical Simulation, Natural Fractures, Finite Elements with Strong Discontinuities.

1 INTRODUÇÃO

O interesse em estudos sobre fraturamento hidráulico, técnica responsável pela viabilização econômica de muitos campos petrolíferos em todo o mundo, é crescente. A compreensão dos mecanismos envolvidos no processo e a busca por métodos que permitam prever a geometria da fratura induzida e determinar a pressão de

fraturamento é fundamental para se otimizar a produtividade de poços.

A complexidade dos processos físicos envolvidos na técnica de fraturamento hidráulico resulta em um problema acoplado, onde a integração entre propriedades da rocha, estado de tensões in-situ e heterogeneidades do maciço determina a geometria e orientação da fratura induzida. A simulação numérica é uma

importante ferramenta aliada no estudo deste tipo de problema e é grande o número de trabalhos na literatura que usam a modelagem para reproduzir os efeitos do processo de fraturamento hidráulico.

Dentre os vários métodos numéricos usados na modelagem de problemas como o de fraturamento hidráulico, com acoplamento hidromecânico, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais versáteis e vem sendo usado ao longo das últimas décadas em estudos que tratam da representação de meios fraturados. Neste estudo, propõe-se empregar duas técnicas distintas de incorporação de descontinuidades em malhas de elementos finitos que são fundamentadas na teoria da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF). As técnicas adotadas são denominadas: Descontinuidades Incorporadas no Elemento Finito e Fragmentação de Malha e serão descritas a seguir.

2 APROXIMAÇÃO CONTÍNUA DE DESCONTINUIDADES FORTES

O processo de fraturamento da rocha pode ser simulado através de diferentes aproximações numéricas, que tentam descrever a formação e propagação de descontinuidades em meios originalmente contínuos. Apesar ser fonte de muitas pesquisas nos últimos anos, o adequado tratamento desse tipo de problema ainda representa um desafio do ponto de vista teórico e numérico, posto que exige modelos constitutivos que descrevam apropriadamente os fenômenos dissipativos envolvidos no processo de deterioração do material até a formação da descontinuidade.

Além disso, faz-se necessário um tratamento adequado das aproximações dos campos cinemáticos (campos de deslocamentos e de deformações) para que a discretização e as interpolações comumente usadas pelo método do elementos finitos sejam capazes de representar a transição entre campos contínuos e descontínuos, que, em geral, exibem singularidades.

Do ponto de vista teórico, pode-se representar o processo de formação da descontinuidade através da Aproximação

Contínua de Descontinuidades Fortes (Oliver et al., 1999; Oliver et al., 2004) , que, introduz uma cinemática especial, capaz de representar o processo de degradação do material, passando pela fase de localização de deformações em bandas estreitas (descontinuidade no campo de deformações, ou descontinuidade fraca), associadas à zona de processamento da fratura, até o caso limite de degradação completa, correspondente à formação da descontinuidade no campo de deslocamentos (descontinuidade forte).

Do ponto de vista numérico, a ACDF pode ser introduzida de duas maneiras distintas. A primeira delas corresponde à introdução dos efeitos de um banda muito estreita de localização de deformações no interior dos elementos finitos existentes. Essa técnica de incorporar descontinuidades em elementos finitos consiste em enriquecer os campos cinemáticos do elemento, de maneira a representar o comportamento não linear do material em uma banda estreita que atravessa o elemento (Manzoli, 1998; Beserra, 2015).

Assim, a malha de elementos finitos pode ser criada sem levar em conta a posição e a escala correspondente à largura das bandas de localização, que geralmente correspondem a dimensões muito menores do que as dimensões dos problemas. Isso representa uma redução enorme do esforço computacional, já que a técnica elimina a necessidade do uso de malhas extremamente refinadas nas regiões onde se desenvolvem as fraturas.

Por outro lado, a ACDF também pode ser introduzida através do uso de elementos finitos sólidos com elevada razão de aspecto, ou seja, elementos finitos que apresentam uma dimensão muito menor do que as demais (Manzoli et. al, 2012). Pode-se demonstrar que esses elementos finitos sólidos apresentam os campos cinemáticos similares ao da ACDF, podendo ser empregados como elementos de interface que, quando munidos de relações constitutivas adequadas, podem reproduzir os efeitos do processo de fraturamento.

Diferentemente dos elementos finitos com descontinuidades incorporadas, a geração da malha deve prever o posicionamento desses elementos de interface da região potencial do

fraturamento, entre elementos regulares. Apesar disso, essa técnica, também chamada de Fragmentação de Malha (Sanchez et al., 2014), também evita a necessidade de refinamento da malha na região da fratura, já que os elementos de elevada razão de aspecto apresentam uma dimensão compatível com uma banda de localização estreita, associada à zona de processo da fratura.

Essa forma de representar fraturamento através de bandas estreitas, sejam elas incorporadas ou explícitas, fazem com que ambas técnicas sejam apropriadas para representarem fenômenos hidromecânicos presentes no processo de fraturamento hidráulico. Isso se deve ao fato de que a ACDF mantém os conceitos de tensões e deformações, da mecânica do contínuo, também para representar campos cinemáticos descontínuos.

Da mesma forma, os campos de pressões e de fluxo do problema hidráulico também podem ser mantidos para descrever os efeitos hidráulicos nas fraturas formadas ou reativadas. A seguir são descritos os fundamentos e as formulações das duas técnicas computacionais mencionadas para modelar os efeitos mecânicos do processo de fraturamento ou reativação de fraturas, através da ACDF.

2.1 Descontinuidades Fortes Incorporadas nos Elementos Finitos

A aproximação de descontinuidades fortes incorporadas, proposta por Mazoli & Shing (2006), foi implementada em código em elementos finitos que realiza a análise numérica de fluxo de fluidos em meios porosos deformáveis.

Para considerar corretamente o efeito de uma banda de descontinuidade incorporada em um elemento finito, alguns aspectos fundamentais relativos à cinemática e à estática da descontinuidade devem ser considerados.

O enriquecimento cinemático deve refletir corretamente a posição da interface dentro do elemento e o deslocamento relativo (abertura e deslizamento) entre as duas faces opostas da interface de descontinuidade. Além disso, uma condição de continuidade de tensões deve ser imposta para garantir uma relação correta entre

as tensões na interface de descontinuidade e na porção contínua do elemento finito.

2.2 Fragmentação de Malha

A técnica de fragmentação consiste na inserção de elementos finitos sólidos de interface entre os elementos regulares de uma malha de elementos finitos, de modo que se reproduza o comportamento da interação entre os diferentes componentes da estrutura.

No presente trabalho, a metodologia de fragmentação descrita por Manzoli et al. (2012), que inicialmente foi desenvolvida para o estudo da propagação de fraturas em estruturas de concreto armado, foi adaptada para a aplicação no estudo de fraturamento em maciços rochosos. O tipo de elemento usado para compor a interface é o triângulo linear com alta razão de aspecto, cuja cinemática é equivalente à cinemática da aproximação de descontinuidades fortes, como é brevemente demonstrado a seguir. A Fig.1 esquematiza os passos da fragmentação de uma malha convencional de elementos finitos.

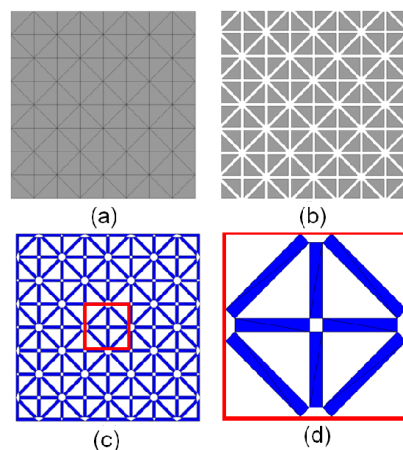


Figura 1. Etapas da fragmentação de malha; (a) Malha convencional de elementos finitos; (b) Espaçamento entre elementos regulares onde serão inseridos elementos de interface; (c) Inserção dos elementos com alta razão de aspecto (discretização da região de interface); (d) Detalhe da discretização da região de interface.

A menor dimensão dos elementos especiais com elevada razão de aspecto corresponde à espessura da região de interface (h). O fundamento da técnica de fragmentação é usar uma espessura bem pequena, aproximadamente

1% do tamanho dos elementos finitos regulares pois, à medida que h diminui e a razão de aspecto aumenta, a cinemática dos elementos de interface se torna similar à cinemática da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes, sendo a estrutura do campo de deformações do elemento finito triangular (elemento de interface) similar à do regime de descontinuidades fortes nos pontos dentro da banda de localização.

Em resumo, a malha fragmentada é composta de elementos finitos regulares representando o contínuo ou o material não fraturado, e de elementos de interface que representam as descontinuidades ou os caminhos possíveis para a abertura de fraturas no meio.

2.2.1 Cinemática do Elemento finito sólido de Interface

Como descrito Por Manzoli (2012), para se demonstrar a cinemática do elemento finito de interface considera-se o elemento finito triangular de três nós, com base b formado pelo segmento entre os nós 2 e 3, e altura h dada pela distância entre o nó 1 e sua projeção na base b (nó 1'), como ilustrado na Fig. 2.

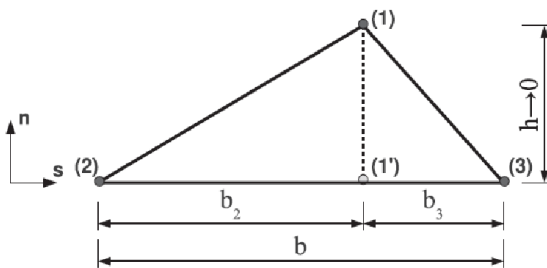


Figura 2. Elemento finito sólido de interface.

De acordo com o sistema de coordenadas cartesianas (n, s) , em que o eixo n é ortogonal a base, o tensor de deformações em qualquer ponto do elemento pode ser aproximado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ contém todos os componentes dependentes de h e $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ contém os demais componentes. Assim, os componentes que dependem de h podem ser escritos como:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^s \quad (2)$$

onde $(\bullet)^s$ se refere a parte simétrica de $(\bullet)$, $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal à base do elemento e $\otimes$ denota um produto tensorial. Logo o tensor total de deslocamento se torna:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^s}_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (3)$$

Quando a altura h tende à zero, o componente do tensor de deslocamento $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ permanece delimitado enquanto que o componente $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ já não é mais limitado. Portanto, na situação limite de h tendendo a zero, as deformações do elemento são quase que exclusivamente relacionados ao deslocamento relativo $[[\mathbf{u}]]$ entre o nó 1 e sua projeção na base no elemento. Nota-se que na situação limite, o nó 1 e sua projeção 1' convergem ao mesmo ponto material e, como consequência, o deslocamento relativo $[[\mathbf{u}]]$ se torna a medida de uma descontinuidade no campo dos deslocamentos (descontinuidade forte).

A estrutura desse campo de deformações apresenta a mesma cinemática da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) o que indica que as mesmas aplicações da ACDF podem ser tratadas com os elementos finitos de alta razão de aspecto.

3 MODELO CONSTITUTIVO MECÂNICO

Modelos constitutivos são formulações matemáticas capazes de descrever o comportamento macroscópico de um meio ideal. Esses modelos resultam da aplicação de hipóteses simplificadoras sobre o comportamento do meio real. Portanto a seleção do modelo constitutivo a ser utilizado deve estar relacionada ao problema que se pretende resolver, uma vez que não seria trivial obter uma formulação única que permita alcançar a solução geral para o comportamento dos materiais (Oller, 2001).

O modelo constitutivo de dano à tração compatível com a Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) foi adotado neste trabalho para representar os fenômenos degradativos que precedem a formação de fraturas, na chamada zona de processo de fratura.

No modelo de Dano à tração a tensão efetiva de dano é dada por:

$$\bar{\sigma} = C : \varepsilon \quad (4)$$

Para estabelecer as condições de carga, descarga e recarga, define-se o critério de dano,

$$\bar{\phi}(\bar{\tau}, r) = \bar{\tau}(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (5)$$

onde $\bar{\tau}$ é a tensão equivalente que define o tamanho domínio elástico. A variável r estabelece o limite de dano, controlando a dimensão do domínio elástico no espaço das tensões efetivas.

O limite de dano é delimitado pela superfície $\bar{\phi}(\bar{\tau}, r) = 0$. O valor inicial do limite de dano é expresso em termos da resistência à tração do material,

$$r_0 = f_t \quad (6)$$

e a evolução da variável r é dada por:

$$r = \text{Max}[f_t, \bar{\tau}] \quad (7)$$

No modelo de dano adotado, o tensor de tensões é projetado na direção normal à superfície da fratura, resultando no vetor de tensões T (traction) e a componente normal deste vetor, $\bar{\sigma}_n$, é utilizada na definição do critério de dano (ou critério de degradação) que pode ser expresso da seguinte forma:

$$\bar{\tau}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_n \quad (8)$$

Para a técnica de descontinuidades fortes embebidas no elemento, a direção normal é definida como sendo ortogonal à superfície da descontinuidade que atravessa o elemento. E na técnica de fragmentação a direção normal é

ortogonal à base do elemento de interface com elevada razão de aspecto.

A variável de dano é definida em função da variável r do limite de dano:

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (9)$$

que pode ser expressa por diferentes leis de endurecimento/amolecimento (lei linear ou exponencial). Neste trabalho, usa-se uma lei de abrandamento exponencial que considera a energia de fratura do material e a espessura do elemento de interface (Sanchez et al., 2014), conforme a Equação:

$$q(r) = f_t e^{\frac{f_t^2}{G_f E} h \left(1 - \frac{r}{f_t}\right)} \quad (10)$$

onde E é módulo de elasticidade, f_t é a resistência a tração, G_f é a energia de fratura do material e h é a espessura do elemento de interface.

4 ACOPLAMENTO HIDROGEOMECAÂNICO

A equação do estado de equilíbrio de tensões para um sólido pode ser escrita como:]

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (11)$$

onde σ é o tensor de tensões totais e $\mathbf{b}$ o vetor de forças de corpo. O conceito de tensão efetiva de Terzaghi foi generalizado por Biot para o caso onde a condição de incompressibilidade dos grãos não é satisfeita. A resposta mecânica dos solos e das rochas pode ser mais precisamente definida por uma tensão efetiva de acordo com a seguinte expressão:

$$\sigma' = \sigma - \alpha P \mathbf{I} \quad (12)$$

onde, α é o coeficiente de Biot, que está relacionado à compressibilidade do meio. No problema acoplado hidro-geomecânico a equação que governa o fenômeno de fluxo considera um termo relacionado com a deformação do meio poroso. Considerando o

meio poroso saturado, a equação da conservação de massa da fase fluida é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_f) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q} + \phi \rho_f \dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (13)$$

onde ϕ é a porosidade do meio, ρ_f é a densidade do fluido e $\mathbf{q}$ é o fluxo de Darcy que é dado por:

$$\mathbf{q} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f \mathbf{g}) \quad (14)$$

onde ∇p_f é o gradiente da pressão de fluido, μ é a viscosidade do fluido, $\mathbf{g}$ é a aceleração da gravidade e $\mathbf{k}$ é a permeabilidade intrínseca do meio, que depende apenas da matriz sólida.

No código de elementos finitos utilizado neste trabalho o problema de fluxo (Eq 22) é resolvido, em um esquema totalmente acoplado, simultaneamente com as equações do problema mecânico, no mesmo sistema, pelo método de Newton-Raphson. A porosidade do meio é atualizada explicitamente, a cada passo de tempo, mediante a seguinte relação:

$$\frac{D\phi}{Dt} = (1 - \phi)\dot{\epsilon}_v \quad (15)$$

onde $\dot{\epsilon}_v$ é a deformação volumétrica total do meio poroso.

Quando se resolve o problema de fraturamento de maneira acoplada, a evolução da permeabilidade da fratura é definida como função da abertura da fratura, que é dada pelo salto do campo de deslocamentos (obtido do problema mecânico).

$$\mathbf{k} = \frac{[[u]]_n^2}{12} \quad (16)$$

onde $\mathbf{k}$ é a componente do tensor de permeabilidade na direção da fratura e $[[u]]_n$ é a componente do salto do campo de deslocamentos projetado na direção normal à fratura.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta simulação numérica trata da reprodução de um ensaio de fraturamento hidráulico em poço em uma escala reduzida conhecido por ensaio de microfraturamento (ou Minifrac), em que se injeta de forma constante uma pequena quantidade de fluido em uma formação rochosa, sendo a mesma, neste caso estudado, impermeável e de baixa porosidade.

Neste ensaio o fluido é injetado a uma determinada vazão (Q) que irá pressurizar a formação que irá se fraturar ao atingir um determinado valor de pressão, denominada pressão de fraturamento. A injeção então continua após a quebra da formação, aprofundando a fratura induzida.

A taxa com que o fluido penetra na formação não é conhecida e a pressão aplicada é então medida durante todo o ensaio, possibilitando a caracterização da curva de pressão x tempo (Fig.3) e a determinação da pressão de fraturamento.

A fratura vai se propagando e se distanciando do poço, sendo governada pelas tensões *in situ*, e quando a pressão se estabiliza se obtém a pressão de propagação da fratura, que coincide com a tensão mínima principal da formação. A pressão de fraturamento, em um poço vertical é estimada em função das tensões horizontais *in situ*, máxima σ_H e mínima σ_h , e da resistência à tração f_t da formação rochosa.

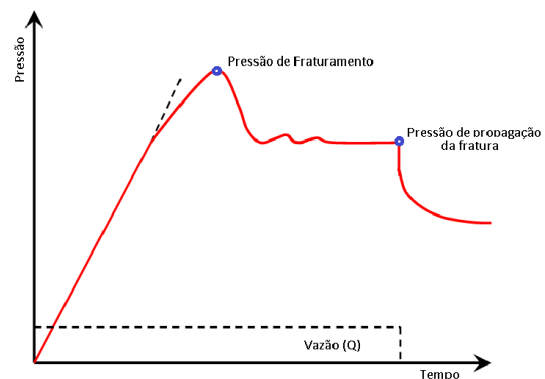


Figura 3. Curva de pressão x tempo obtido ao longo do ensaio de Microfraturamento.

Considerando o meio impermeável e pouco

poroso, a pressão de fraturamento pode ser estimada por (Yew, 1997):

$$\Delta p_b = 3\sigma'_h - \sigma'_H + f_t \quad (17)$$

com Δp_b sendo a variação da poropressão em relação a pressão hidrostática do reservatório.

Soluções obtidas de simulações numéricas deste ensaio com as técnicas de Fragmentação de Malha e descontinuidades Incorporadas serão comparadas com a solução analítica dada pela Eq. (17).

A geometria e as condições de contorno do modelo são apresentadas na Fig. 4. As propriedades mecânicas e hidráulicas adotadas nesta simulação se encontram na Tabela 1. As tensões aplicadas são: $\sigma'_H = 5 \text{ MPa}$ e $\sigma'_h = 3 \text{ MPa}$ e a vazão de injeção é de $Q = 5 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$.

Tabela 1. Propriedades mecânicas e hidráulicas dos materiais.

Propriedades	Valores
Viscosidade do fluido (μ)	$1 \times 10^{-9} \text{ MPa/s}$
Permeabilidade intrínseca (k)	10^{-22} m^2
Porosidade da rocha (ϕ)	0,01
Coefficiente de Biot (α)	1,00
Energia de fratura (G_f)	100 N/m
Resistência à tração (f_t)	1 MPa
Módulo de elasticidade (E)	$1 \times 10^5 \text{ Mpa}$
Coefficiente de Poisson (ν)	0,30

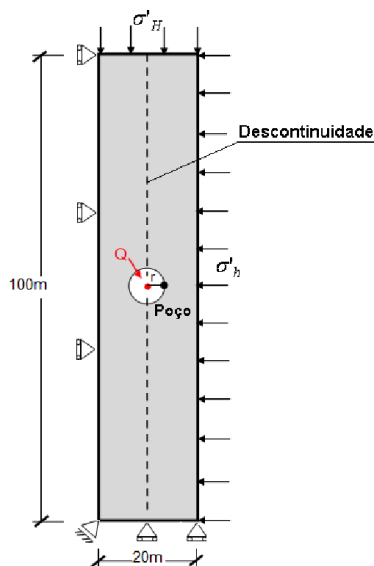


Figura 4. Curva de pressão x tempo obtido ao longo do ensaio de Microfraturamento.

Na simulação com a técnica que usa os elementos de interface com elevada razão de aspecto, a malha de elementos finitos é composta por 17150 nós e 34170 elementos. A descontinuidade é imposta na vertical, que é a direção de propagação de fratura, e discretizada com elementos de interface, conforme ilustrado na Fig.5.

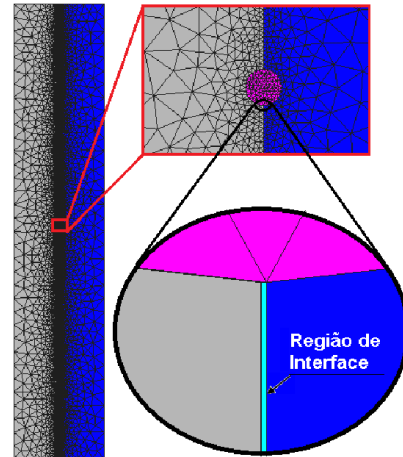


Figura 5 . Malha de elementos finitos com detalhes da geometria do poço e da região com elementos de interface.

Já para a simulação com a técnica de Descontinuidades Incorporadas no Elemento Finito foi utilizada uma malha de elementos finitos com 10195 nós e 20272 elementos, como ilustra a Fig.6.

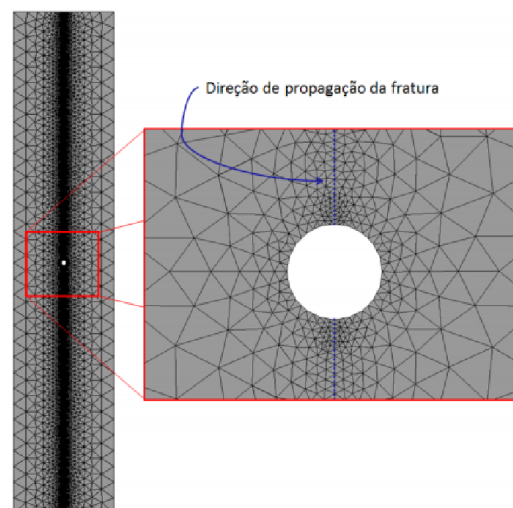


Figura 6 . Malha de elementos finitos usada na simulação com a técnica de Descontinuidades Incorporadas no Elemento.

Nesta análise numérica, a formação da

fratura se inicia quando a tensão de tração na borda do poço, provocada pela variação da pressão no interior do mesmo supera o estado compressivo das tensões iniciais in situ e vence a resistência à tração da rocha. Após a quebra da formação, a fratura induzida hidraulicamente começa a se propagar e continua enquanto a injeção de fluido no poço for mantida. Como nesta análise a perda de fluido para a formação (leakoff) é desconsiderada devido à impermeabilidade do meio, a pressão necessária para manter a propagação da fratura se equilibra com a tensão efetiva principal menor (σ'_h).

A Fig.7 apresenta o gráfico com as curvas de pressão medida no poço ao de todo o ensaio. Observa-se que a pressão de ruptura obtida na análise numérica corresponde ao valor previsto pela solução da Eq. (17) e a pressão de propagação se equilibra com o valor da tensão efetiva horizontal menor na fase pós-ruptura da análise.

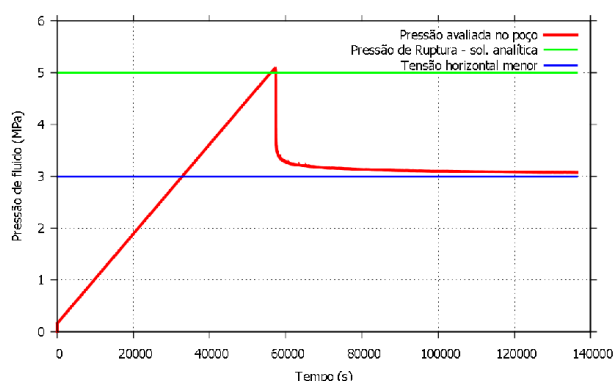


Figura 7. Curvas de pressão medida no poço no ensaio de microfraturamento.

6 CONCLUSÕES

A metodologia proposta para simular de maneira totalmente acoplada o problema de fraturamento hidráulico, utilizando a Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes, além de ter sido relativamente simples sua implementação no programa de elementos finitos utilizado, se mostrou eficiente nas simulações realizadas, conseguindo reproduzir de forma coerente o processo de formação e propagação das fraturas resultante da estimulação hidráulica.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa foi apoiada pelo CNPq, Petrobras e Fundação CMG.

REFERÊNCIAS

- Beserra, L.B.S. (2015). Análise Hidromecânica do fraturamento hidráulico via elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas. 2015. 145 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Manzoli, O.L. (1998). Un Modelo Analítico y Numérico para la Simulación de Descontinuidades Fuertes en la Mecánica de Sólidos. Tese de doutorado, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.
- Manzoli, O.L. and Shing, P.B. (2006). A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers & Structures*, 84, 742–757.
- Manzoli, O.L. ; Gamino, A.L. ; Rodrigues, E.A. ; Claro, G.K.S. (2012). Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. *Computers & Structures*, v. 94-95, p. 70-82.
- Oliver, J., Cervera, M., Manzoli, O. (1999). Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity* 15 (3).
- Oliver J., Huespe A.E., Samaniego, E., Chaves E.V.W. (2004). Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*; 28(7–8):609–632.
- Oller, S. (2001). *Fractura Mecánica Un enfoque global*. Barcelona: CIMNE.
- Sánchez, M., Manzoli, O. L. ; Guimarães, L. (2014) Modeling 3-D desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique. *Computers and Geotechnics*, 62, 27–39.2014.
- Yew, C. H. (1997). *Mechanics of Hydraulic Fracturing*. Houston: Gulf Publishing Company.