

Método de Múltiplas Escalas Aplicado ao Oscilador de Van der Pol

Higor Luis Silva*, Denner Miranda Borges

*Laboratório de Mecânica de Estruturas – LMEst UFU, higorluis93@gmail.com

Palavras-chave

Dinâmica não-linear, Múltiplas escalas, Van der Pol

1. INTRODUÇÃO

A equação de Van der Pol, ou Oscilador de Van der Pol, recebe este nome em homenagem a Balthasar van der Pol, físico e engenheiro eletricitista holandês que propôs o oscilador durante os anos de trabalho na Philips. É relatado que Van der Pol descobriu oscilações estáveis em circuitos elétricos utilizando tubos de vácuo para controlar a corrente elétrica nos transmissores e receptores do circuito. Estas oscilações estáveis são conhecidas atualmente como ciclos-limite.

Guckenheimer et al. (2003) citam os feitos de Van der Pol como importantes avanços nos campos de rádio e telecomunicações na primeira metade do século vinte. Segundo os autores, os experimentos realizados por Van der Pol, sob diferentes condições iniciais, convergiam para a mesma órbita de amplitude finita. Este comportamento, que demonstrava-se diferente das soluções obtidas para equações lineares, levou o mesmo a propor a sua famosa equação diferencial não-linear. Van der Pol (1960) referencia esta equação como equação livre de Van der Pol. Posteriormente, outras importantes características advindas da equação são descritas por Van der Pol (1926), gerando as atualmente conhecidas como "oscilações relaxadas".

Neste trabalho, o método das múltiplas escalas é aplicado para obter a resposta aproximada do oscilador de Van der Pol, validando a teoria das perturbações. Para tal, é realizada uma expansão temporal de segunda ordem, ou seja, em duas escalas temporais.

2. FORMULAÇÃO

Considere um sistema massa-mola com movimento oscilatório unidimensional sob ação de uma força restauradora. Para este sistema, tem-se a equação diferencial para a posição u do oscilador, dada na forma geral $\ddot{x} + f(x) = 0$, onde $f(u)$ pode ser uma função linear ou não. A partir dessa equação, pode-se assumir equações do tipo oscilador harmônico, equação de Duffing, entre outros. Portanto, $f(u)$ é um caso geral onde pode-se identificar o tipo de linearidade que a equação diferencial pode assumir em um determinado sistema físico.

Em seguida, reescrevendo essa expressão em um sistema de coordenadas convenientes, tal que $x = u - u_0$, com u_0 sendo a posição de equilíbrio do oscilador, obtém-se a equação diferencial reescrita na forma $\ddot{x} + f(x + u_0) = 0$.

Verifica-se que f pode ser expandido em série de Taylor em torno do ponto u_0 . Com este procedimento, busca-se soluções aproximadas. Logo,

$$f(x + u_0) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x^n, \quad \text{com} \quad \alpha_n = \frac{1}{n} f^{(n)}(u_0) \quad (1)$$

e $f^{(n)}$ denotando as n -ésimas derivadas no ponto u_0 . As condições iniciais são dadas pelas posição e velocidades iniciais. A partir das condições iniciais, determina-se as soluções de maneira única.

No método das múltiplas escalas, a ideia principal é aplicar uma transformação na equação diferencial em estudo, sendo ela linear ou não, gerando uma série de equações diferenciais lineares acopladas. Nesse sentido, o método define n variáveis T_n de tempo, dadas por $T_n = \varepsilon^n t$, onde estas variáveis são interpretadas como diferentes escalas de tempo (múltiplas escalas) e tomadas como independentes, desde que o parâmetro ε assuma um valor pequeno (ex: $\varepsilon = 1$).

Para estas diferentes escalas de tempo, observa-se que as derivadas na variável t também devem ser reescritas em termos das derivadas de T_k na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (2)$$

As derivadas são separáveis pela expansão dos termos de acordo com diferentes ordens de potências de ε . Deste modo, pode-se assumir, então, uma solução para a equação do sistema massa mola, levando-se em conta a expansão dada pela Eq. 1, na forma

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3)$$

Substituindo as devidas substituições na equação $\ddot{x} + f(x + u_0) = 0$, obtém-se para cada ordem n em ε uma equação diferencial linear para a componente x_n na série da Eq. 3:

$$\varepsilon^0 D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad \varepsilon^1 D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \alpha_2 x_0^2 \quad \text{e} \quad \varepsilon^n D_0^2 x_n + \omega_0^2 x_n = F_n(x_1, \dots, x_{n-1})$$

As soluções das equações de ordens menores aparecem como os termos não homogêneos, $F_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ nas equações das ordens maiores. Portanto, este é um método iterativo; por exemplo, a solução da ordem zero influi na solução da primeira ordem, enquanto a solução da segunda ordem está definida pelos efeitos das soluções das ordens zero e um, e assim por diante.

3. RESULTADOS

Utilizando o método das múltiplas escalas, será utilizada uma perturbação em duas escalas de tempo para avaliar a equação do oscilador de Van der Pol, dada por:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4)$$

Para uma melhor adequação à notação utilizada na formulação desenvolvida anteriormente, o parâmetro μ será mudado para ε , resultando em $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$.

Na teoria da perturbação por múltiplas escalas, assume-se que a solução é da forma descrita na Eq. 3. Para facilidade de escrita, a variável $x(t, \varepsilon)$ será escrita apenas como x , de forma a evitar qualquer confusão. Assim, é preciso diferenciar ambos os lados da Eq. 3 em relação a t para substituir nos valores de $\dot{x}$ e $\ddot{x}$. Utilizando a regra da cadeia em derivadas parciais no lado direito da Eq. 3 e as escalas de tempo dadas por $T_n = \varepsilon^n t$, tem-se:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = \left(\frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial x_0}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) + \dots = D_0 x_0 + \varepsilon (D_1 x_0 + D_0 x_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5)$$

Utilizando o mesmo processo para $\ddot{x}$, e substituindo os resultados na Eq. 4 e agrupando os termos semelhantes de potência ε , a equação se torna

$$D_0^2 x_0 + x_0 + (D_0^2 x_1 + x_1 + 2D_1 D_0 x_0 + (x_0^2 - 1)D_0 x_0) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad (6)$$

Como $\varepsilon \neq 0$, para o lado esquerdo da Eq. 6 ser zero, os coeficientes de potência de ε precisam ser zero. Assim, separando as equações, tem-se:

$$\begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon^0): D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon^1): D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_1 D_0 x_0 - (x_0^2 - 1)D_0 x_0 \end{cases} \quad (7b)$$

Seja uma nova variável (τ), definida como $\tau = \varepsilon t$. A Eq. 7a é uma equação de um oscilador harmônico simples. A solução geral pode ser escrita na seguinte forma $x_0(t, \tau) = r(\tau) \cos(t + \phi(\tau))$. Derivando essa expressão para encontrar $D_0 x_0$ e $D_1 D_0 x_0$, e substituindo na Eq. 7b, obtém-se a seguinte forma expandida:

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2r(\tau)\phi'(\tau)\cos(t + \phi(\tau)) - 2r'(\tau)\sin(t + \phi(\tau)) - r^3(\tau)\cos^2(t + \phi(\tau))\sin(t + \phi(\tau)) + r(\tau)\sin(t + \phi(\tau)) \quad (8)$$

É possível simplificar a notação na Eq. 8 definindo $\theta = t + \phi(\tau)$ e aplicando identidades trigonométricas, resultando:

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2r\phi' \cos \theta + \left(-2r' - \frac{1}{4}r^3 + r \right) \sin \theta - \frac{1}{4}r^3 \sin 3\theta \quad (9)$$

Ambos os termos $\cos \theta$ e $\sin \theta$ são termos ressonantes na Eq. 9. Assim, para evitar termos seculares na solução, é preciso definir os coeficientes de $\cos \theta$ e $\sin \theta$ como iguais a zero no lado direito da Eq. 9, uma vez que essas são as próprias soluções da equação diferencial homogênea associada no lado esquerdo da Eq. 9. Portanto, obtém-se que:

$$\begin{cases} -2r\phi' = 0 \\ -2r' - \frac{1}{4}r^3 + r = 0 \rightarrow r' = \frac{1}{8}r(4 - r^2) \end{cases} \quad (10a)$$

$$(10b)$$

A Eq. 10b pode ser escrita como um campo vetorial. Por outro lado, para resolvê-la para seus pontos fixos, que são os pontos para o qual $r' = 0$; e dizendo que $r' = f(r)$, implica dizer que $r(4 - r^2) = 0$. Dessa forma, obtém-se $r^* = 0$ ou $r^* = \pm 2$. Entretanto, é de interesse apenas no domínio de $r \geq 0$.

A Figura 1 mostra claramente o retrato de fase do campo vetorial do oscilador de Van der Pol em estudo. Na Fig. 1a, percebe-se que as trajetórias que começam acima de 2 convergem para um ciclo-limite de amplitude 2. Por outro lado, na Fig. 1b percebe-se que todas as trajetórias que começam próximas à origem também convergem para um ciclo-limite de amplitude 2. Assim, $r^* = 0$ é um ponto fixo instável, enquanto $r^* = 2$ é um ponto fixo estável. Portanto, $r(\tau) \rightarrow 2$ à medida em que $t \rightarrow \infty$. A partir da Eq. 10a, tem-se que $\phi' = 0$, então $\phi(\tau) = \phi_0$, onde ϕ_0 é uma constante. Desse modo, $x_0(t, \tau) \rightarrow 2 \cos(t + \phi_0)$ e, conseqüentemente, tem-se que

$$x(t) \rightarrow 2 \cos(t + \phi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (11)$$

à medida em que $t \rightarrow \infty$. Assim, $x(t)$ se aproxima de um ciclo-limite estável de raio $2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

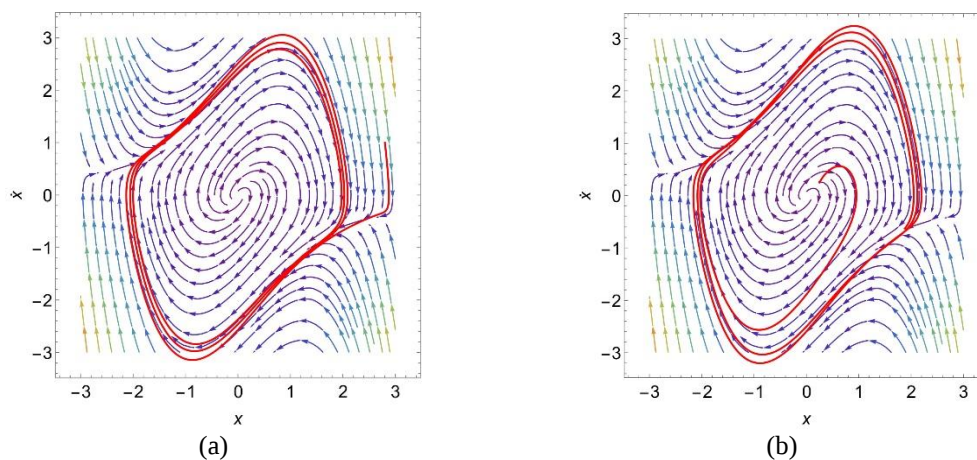


Figura 1: Retrato de fase: (a) Condição inicial acima de 2; (b) Condição inicial próxima da origem.

4. CONCLUSÕES

A equação de Van der Pol é uma equação não-linear fraca, que não pode ser resolvida na forma explícita. O método das múltiplas escalas, dentro da teoria das perturbações, é capaz de produzir uma boa aproximação para a solução da equação. Foi demonstrado que o método das múltiplas escalas pode ser utilizado para calcular o ciclo-limite do oscilador de Van der Pol.

Neste trabalho, uma expansão de segunda ordem é utilizada para obter-se a solução aproximada. Foi demonstrado que, para quaisquer valores de condições iniciais, a solução é um ciclo-limite de amplitude definida. Para expansões de ordem elevada, o método de múltiplas escalas pode tornar-se algebricamente complicado. Contudo, o método é uma poderosa ferramenta matemática para obter soluções aproximadas de equações diferenciais, como a de Van der Pol, que não possuem solução exata.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro da CNPq, CAPES e FAPEMIG.

6. REFERÊNCIAS

- Guckenheimer, J., Hoffman, K., e Weckesser, W. "The forced van der Pol equation I: The slow flow and its bifurcations". SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, Vol. 2, No. 1, 2003, pp. 1-35.
- Van der Pol, B. "A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations". Radio Rev. 1 (1920) 701-710, 754-762; Selected Scientific Papers, Vol. I, 1920.
- Van der Pol, B. "LXXXVIII. On relaxation oscillations". The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 2, No. 11, 1926, pp. 978-992.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.