

Solução analítica de problema bidimensional de condução de calor utilizando Funções de Green

José Aguiar dos Santos Júnior*, José Ricardo Ferreira Oliveira, Eduardo Peixoto de Oliveira, Gilmar Guimarães.

*Laboratório de Ensino e Pesquisa em Transferência de Calor: Modelagem e Experimento, aguiarsjunior@gmail.com

Palavras-chave

Solução Analítica, Condução de Calor, Funções de Green, Verificação Intrínseca.

1. INTRODUÇÃO

Funções de Green são ferramentas matemáticas empregadas na obtenção do campo de temperatura em problemas lineares, transientes ou permanentes, de condução de calor. Podem ser aplicadas na solução de um conjunto de questões de convecção e para diversos fenômenos que são descritos pelo mesmo tipo de equações (BECK et al, 1992).

O objetivo dos autores através deste trabalho é determinar a solução analítica de um problema de condução de calor bidimensional transiente com fluxo de calor parcial, além de realizar a verificação intrínseca da solução obtida.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Özişik (1993), o significado físico da Função de Green $G(r, t | r', \tau)$ em problemas transientes é a representação da temperatura no local r , no tempo t , devido a uma fonte pontual instantânea unitária, localizada no ponto r' , liberando energia no instante τ . De maneira similar, Beck et al (1992) definem as Funções de Green como sendo a distribuição de temperatura causada por um pulso de energia local e instantâneo. Fernandes (2009) ressalta a importância do uso das Funções de Green em problemas onde as condições de contorno variam com o tempo, caso no qual a solução através do método de separação de variáveis é descartada de imediato.

O uso das Funções de Green é precedido pela identificação dos tipos de condições de contorno presentes no problema. Na Tabela 1 apresenta-se os tipos de condições de contorno apresentado por Beck et al. (1992).

Tabela 1 - Tipos de condição de contorno

Notação	Nomenclatura	Descrição
0	Tipo zero	Sem efeito físico de contorno
1	Dirichlet	Temperatura prescrita
2	Neumann	Fluxo de calor prescrito
3	Robin	Convecção
4	Carslaw	Filme fino, sem convecção
5	Jaeger	Filme fino, com convecção

Identificadas as condições de contorno, as Funções de Green correspondentes ao problema de Condução de Calor podem ser obtidas em Beck et al. (1992). O campo de temperatura é determinado solucionando-se equações integrais.

3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

Um problema bidimensional do tipo X22Y12 em regime transiente é apresentado esquematicamente na Fig. 1. A placa de dimensões $L \times W$, está inicialmente a uma temperatura $T(x, t, 0) = T_0$, é submetida à dois fluxos de calor parciais, q_0'' e q_2'' , em $x = 0$ e em $x = L$. Em $y = 0$ a temperatura é mantida em T_1 , e em $y = W$ a placa está isolada. A Função de Green que representa o problema proposto é dada pela Eq. 1.

$$G_{X22Y12} = \left[\frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{-\alpha_m^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \frac{2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\beta_n^2 \alpha (t-\tau)}{W^2}} \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \sin\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \quad (1)$$

onde $\alpha_m = m\pi$, e $\beta_n = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$. Considerando as condições de contorno apresentadas na Fig. 1, a solução analítica do problema proposto é dada pela Eq. 2.

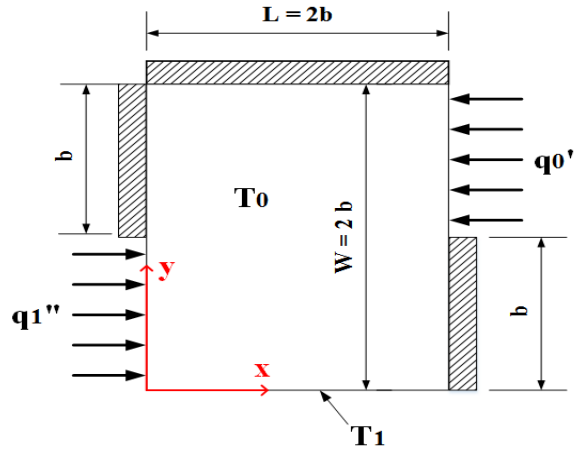
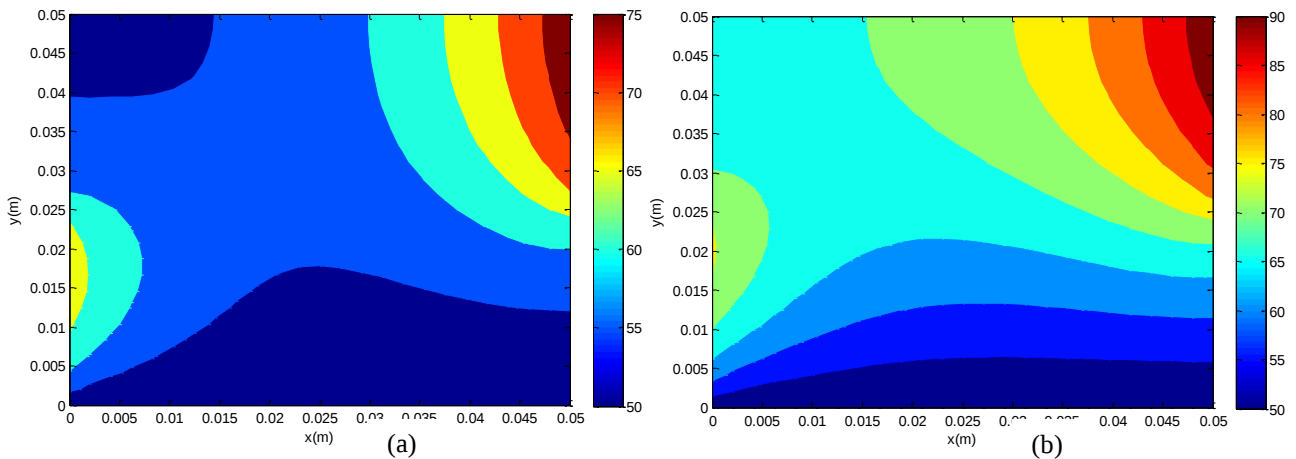


Figura 1 - Problema proposto.

$$\begin{aligned}
 T(x, y, t) = & 2(T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{W^2}} \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \frac{1}{\beta_n} + \frac{4q_2 W^2}{kL} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \frac{1}{\beta_n^3} \left[1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{W^2}}\right] \sin^2\left(\frac{W_1 \beta_n}{2W}\right) \\
 & + \frac{8q_2 W^2 L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \left[\frac{\sin^2\left(\frac{W_1 \beta_n}{2W}\right)}{\beta_n (L^2 \beta_n^2 + W^2 \alpha_n^2)} \left(1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{W^2}} e^{-\frac{\alpha_m^2 \alpha t}{4L^2}}\right) \right] \\
 & + \frac{2q_0 W^2}{kL} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \frac{1}{\beta_n^3} \left[1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{W^2}}\right] \cos\left(\frac{W_1 \beta_n}{W}\right) + T_1 \\
 & + \frac{4q_0 L W^2}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \frac{\cos(\alpha_m)}{\beta_n (L^2 \beta_n^2 + W^2 \alpha_n^2)} \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \cos\left(\frac{W_1 \beta_n}{W}\right) \left[1 - e^{-\frac{\beta_n^2 \alpha t}{W^2}} e^{-\frac{\alpha_m^2 \alpha t}{L^2}}\right]
 \end{aligned} \quad (2)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A solução analítica do problema X22Y12, apresentada na Eq. 2, foi implementada mediante uso do software MatLab®. Para tal, adotou-se $L = W = 0,05$ m, $q_1'' = q_0'' = 10^5$ W/m², $T_0 = 28$ °C, $T_1 = 50$ °C, $k = 73$ W/mK, $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ m²/s. Na Figura 2 apresenta-se o campo de temperatura, para (a) 50 s e (b) 100s.


 Figura 2 – Campo de temperatura: (a) $q_0'' = q_1'' = 10^5$ W/m², $t = 50$ s; (b) $q_0'' = q_1'' = 10^5$ W/m², $t = 100$ s

A verificação intrínseca foi realizada considerando o problema unidimensional. Os desvios entre as temperaturas do problema X22Y12 e o seu respectivo problema unidimensional são apresentadas. A Figura 3(a) apresenta a verificação entre X22Y22 e X22, levando-se em conta um fluxo $q_1'' = 10^5$ W/m² em $x = 0$ e para todo y , e em $x = L$ toda superfície isolada, $T_0 = 28$ °C e $T_1 = 50$ °C. A Figura 3(b) apresenta o desvio entre as duas soluções em $x = 0$ m, $x = 0,025$ m e $x = 0,05$ m. É possível observar a boa concordância entre as soluções e o maior erro foi obtido em $x = 0$ m nos instantes iniciais. A Figura 3(c) apresenta a verificação entre X22Y22 e Y12, levando-se em conta $q_0'' = q_2'' = 0,1$ W/m², $T_0 = 28$ °C e $T_1 = 50$ °C. A Figura 3(d) apresenta o desvio entre as duas soluções em $y = 0$ m, $y = 0,025$ m e $y = 0,05$ m. Observa-se um pequeno desvio entre as duas soluções. O maior erro foi obtido nos instantes iniciais, em $y = 0,0025$ m e $y = 0,05$ m.

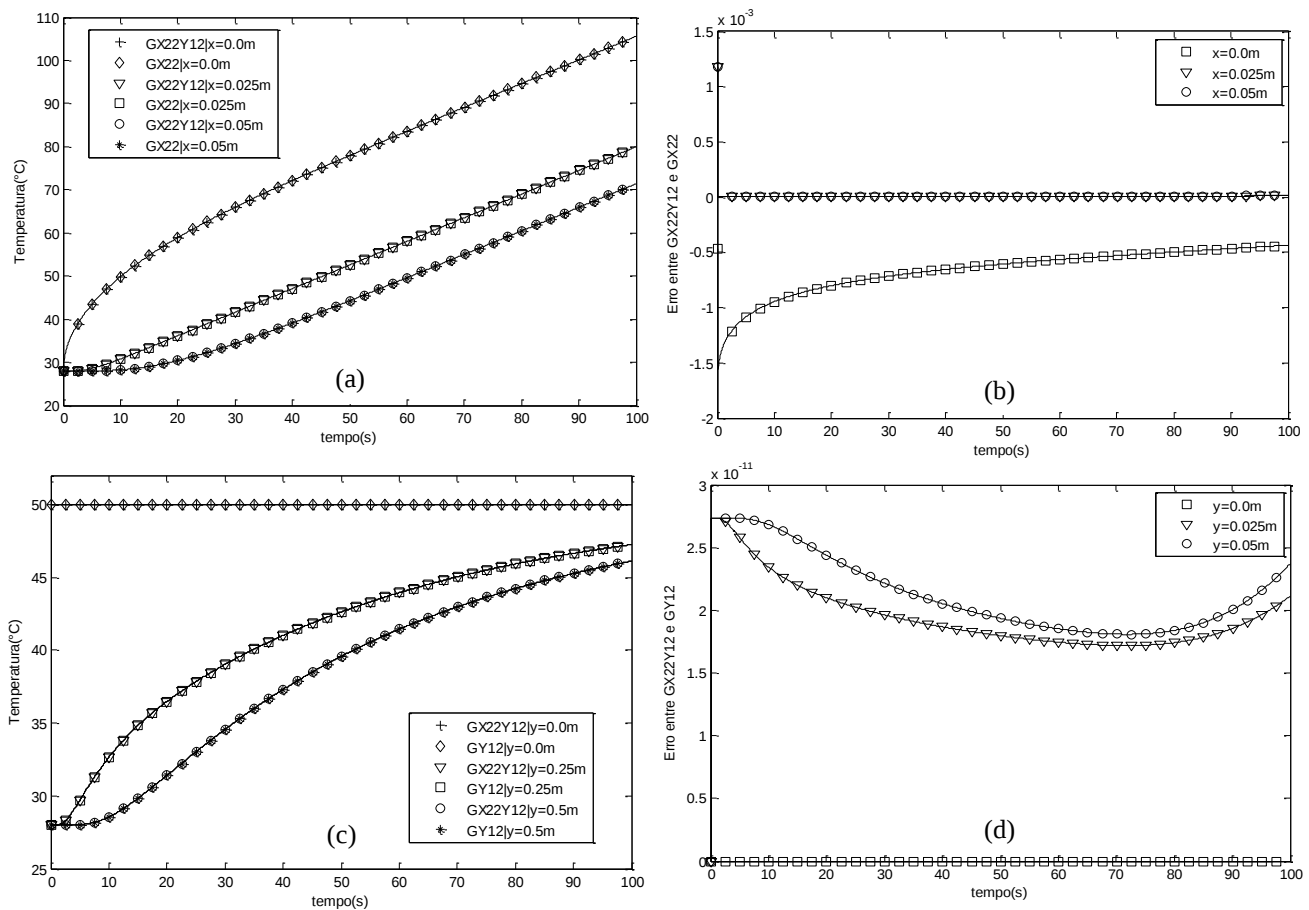


Figura 3 - (a) Verificação entre X22Y12 e X22 em $y=W/2$; (b) Erro entre X22Y12 e X22 em $y=W/2$; (c) Verificação entre X22Y12 e Y12 em $x=L/2$; (d) Erro entre X22Y12 e Y12 em $x=L/2$

5. CONCLUSÕES

A partir da solução analítica encontrada para o problema X22Y12 foi possível determinar o perfil de temperatura do problema proposto. A verificação intrínseca foi realizada com os problemas X22 e Y12 nos eixos x e y , respectivamente. O maior erro encontrado foi de 0,016 e de $2,735 \times 10^{-11}$ nos eixos x e y , respectivamente, e ocorreu nos instantes iniciais.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio das agências de fomento CNPq, CAPES e FAPEMIG pelo suporte financeiro.

7. REFERÊNCIAS

- Cole, K. D.; Beck, J. V.; Haji-Sheikh, A.; Litkouhi, B. "Heat Conduction Using Green's Function". Washington, DC: Hemisphere Publishing, 1992.
- Fernandes, A. P. "Funções de Green: Soluções analíticas Aplicadas e Problemas Inversos em Condução de Calor". Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2009.
- Özişik, M. N. "Heat Conduction". 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.

8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.