

Estudo Comparativo entre Soluções Numérica e Analítica em Condução de Calor

Jefferson Gomes do Nascimento, Douglas Luiz Silva, Fernando Costa Malheiros, Gilmar Guimarães.

Laboratório de Transferência de Calor: Modelagem e Experimento, je100_rock@yahoo.com.br

Palavras-chave

Funções de Green, Solução Analítica, COMSOL e Solução Numérica.

1. INTRODUÇÃO

A simulação computacional tornou-se uma abordagem de estudo que vem sendo cada vez mais utilizada nas mais variadas áreas da engenharia. Os modelos de simulação são analisados por métodos numéricos e não por métodos analíticos. Métodos analíticos aplicam raciocínios dedutivos da matemática para “resolver” o modelo. No caso dos modelos de simulação, que empregam métodos numéricos, os modelos são “rodados”, ao invés de resolvidos. (BANKS; CARSON; NELSON, 1999). Os resultados da simulação computacional não são tão precisos quanto os resultados teóricos (obtidos por métodos analíticos), mas representam, normalmente, uma boa aproximação para os mesmos.

Este trabalho tem como objetivo fazer uma comparação entre soluções analíticas baseadas em funções de Green com soluções numéricas baseadas no Software COMSOL Multiphysics que se baseia em soluções por métodos de elementos finitos.

2. MODELAGEM

Esta seção está dividida em modelo físico, modelo analítico e modelo numérico.

2.1. Modelo Físico

A Fig. 1 apresenta o problema físico considerado, o qual consiste em uma análise bidimensional de transferência de calor, caso $X_{22}Y_{22}$ (nomenclatura de acordo com Beck et al., 1992), ou seja condições de contorno: fluxo de calor em $x=0$, isolado em $x=L$, fluxo de calor em $y=0$ e isolado em $y=W$. Para análise tanto numérica quanto analítica, considerou-se o material aço inoxidável. A placa possui dimensões: $L = W = 0.05 [m]$, propriedades térmicas consideradas: condutividade térmica $K = 15.1 [W/mK]$, difusividade térmica $\alpha = 3.95 \cdot 10^{-6} [m^2/s]$, massa específica $\rho = 7750 [Kg/m^3]$, calor específico $C_p = 480 [J/Kg^\circ C]$, $T_0 = 30 [^\circ C]$ e $q_1'' = q_2'' = 10^5 [W/m^2]$.

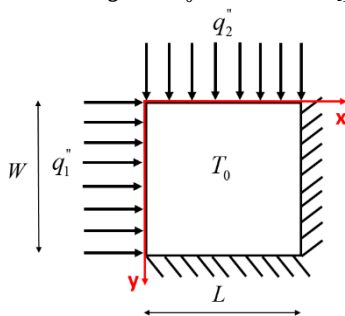


Figura 1: Caso $X_{22}Y_{22}$.

2.2. Modelo Analítico

A Eq. 1 apresenta a equação da difusão de calor para um problema bidimensional, transiente.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

A Eq. 2 é a Função de Green, que pode ser obtida no apêndice X de Beck et al. (1992).

$$G_{x22}(x, t | x', \tau) = \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \pi^2 \alpha (t-\tau)/L^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right] \quad (2)$$

A Eq. 3 é a versão bidimensional da solução do problema em termos de Funções de Green (BECK et al., 1992).

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W G(x, y, t | x', y', 0) F(x', y') dx' dy' \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{K_i} G(x, y, t | x_i, y, \tau) \right] dy' d\tau \\ &+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{K_i} G(x, y, t | x, y_i, \tau) \right] dx' d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

A Eq. 4 é solução analítica da temperatura, resolvendo a Eq. 3 usando Eq. 2 (FERNANDES, 2009).

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= T_0 + \frac{\alpha q_1''}{K} \frac{t}{L} + \frac{2}{L} \frac{\alpha q_1''}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \frac{L^2}{m^2 \pi^2 \alpha} \left(1 - e^{-m^2 \pi^2 \alpha t/L^2}\right) + \\ &+ \frac{\alpha q_2''}{K} \frac{t}{W} + \frac{2}{W} \frac{\alpha q_2''}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \frac{W^2}{n^2 \pi^2 \alpha} \left(1 - e^{-n^2 \pi^2 \alpha t/W^2}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

2.3. Modelo Numérico

Para análise numérica, utilizou-se o software COMSOL Multiphysics que é uma ferramenta de simulação para aplicações elétricas, mecânicas, de escoamento e químicas, com base em métodos numéricos avançados, utiliza o método dos elementos finitos para modelar e simular problemas baseados em física. (Tabatabaian, M).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Fig. 2 mostra a evolução da temperatura no modelo analisado, sendo que com o passar do tempo, observa-se um fluxo de calor se desenvolvendo e propagando-se na superfície de forma ‘parabólica’.

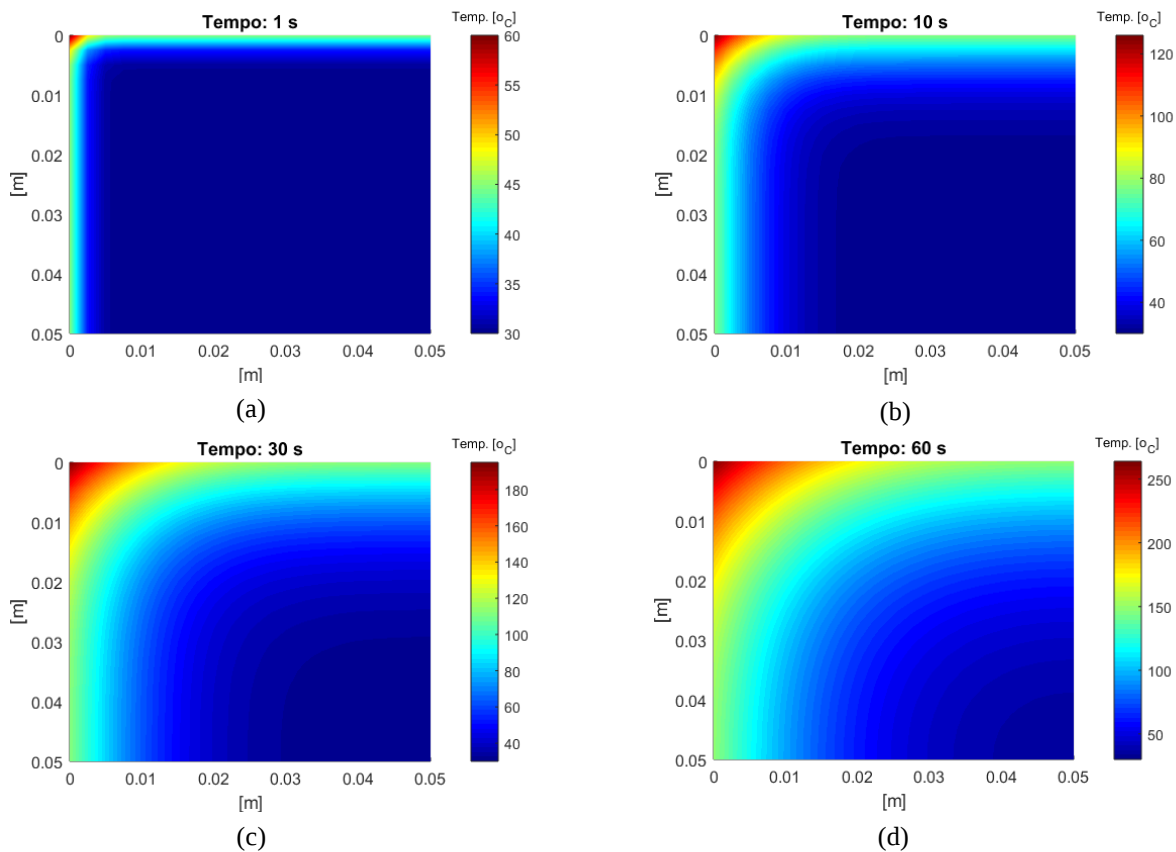


Figura 2: Caso X22Y22 a) 1s. b)10s. c)30s. d) 60s.

A Figura 3.a apresenta a temperatura nas coordenadas $T(0,0)$, $T(0,W/2)$ e $T(0,W)$ tanto na solução analítica (SA) quanto para solução numérica (SN). Na Figura 3.b, observa-se o erro máximo obtido ocorre para os tempos iniciais, sendo menor do que 3%, para esta análise, observou-se que quanto maior o tempo menor o erro entre (SA) e (SN).

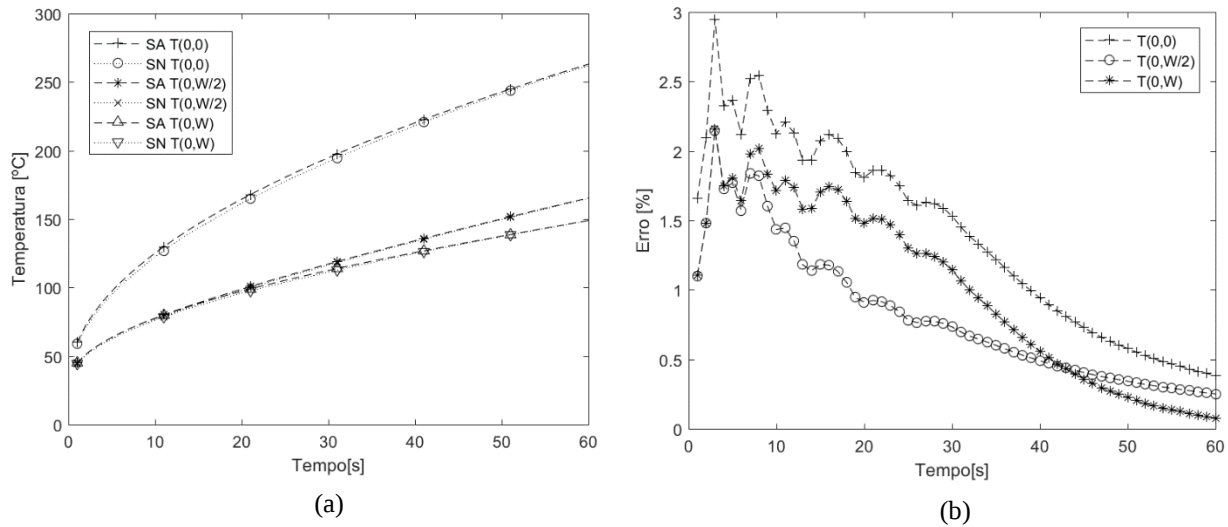


Figura 3: Resultados. a) Distribuição de Temperatura. b) Erro entre SN e SA.

A Figura 4.a apresenta a temperatura nas coordenadas $T(0,W)$, $T(L/2,W)$ e $T(L,W)$ usando-se (SA) e (SN). Na Figura 4.b, observa-se que o erro máximo obtido é menor do que 2.5%.

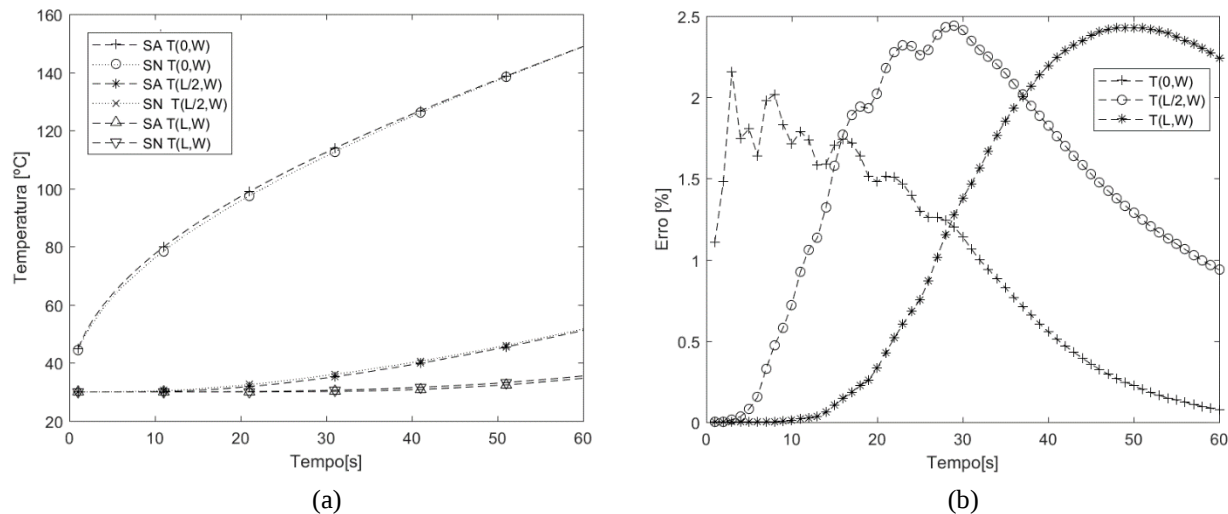


Figura 4: Resultados. a) Distribuição de Temperatura. b) Erro entre SN e SA.

4. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro da CNPq, CAPES e FAPEMIG.

5. REFERÊNCIAS

- ARPACI, V.S. Conduction Heat Transfer. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1966.
 BANKS, J.; CARSON, J.; NELSON, B. Discrete-event System Simulation. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
 BECK, J.V. et al. Heat Conduction Using Green's Function. Washington, DC, 1992.
 FERNANDES, A.P. Funções de Green: Soluções Analíticas Aplicadas a Problemas Inversos em Condução de Calor. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, 2009.
 TABATABAIAN, M. COMSOL for Engineers: 2014.

6. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.