

UMA REVISÃO SOBRE O COMPORTAMENTO DINÂMICO DE TRINCAS TRANSVERSAIS EM EIXOS ROTATIVOS

Izabela Batista da Silva, Universidade Federal de Uberlândia, izabela.silva@ufu.br
Aldemir Ap Cavalini Jr, Universidade Federal de Uberlândia, aacjunior@ufu.br
Valder Steffen Jr, Universidade Federal de Uberlândia, vsteffen@ufu.br

Resumo: O monitoramento de máquinas rotativas têm sido uma importante ferramenta quando se deseja garantir segurança e a correta operação destes equipamentos. Uma das técnicas empregadas para esta finalidade é análise do comportamento vibratório do sistema, já que o aparecimento de defeitos como trincas são capazes de mudar alguns parâmetros mecânicos. Em um eixo com trinca, a rigidez se altera com a rotação devido ao mecanismo de abertura e fechamento da trinca, conhecido como *breathing*. Neste sentido, o presente trabalho oferece uma revisão sobre os modelos que representam as trincas em rotores, mais especificamente o modelo de Gasch, o modelo de Mayes e o modelo Flex, bem como as diferenças que os caracterizam e uma análise sobre a variação da rigidez do eixo trincado de acordo com sua posição angular.

Palavras-chave: trinca, modelos matemáticos, máquinas rotativas

1. INTRODUÇÃO

Estudos sobre identificação e monitoramento de trincas em eixos de máquinas rotativas têm sido amplamente discutidos e aprimorados em um contexto onde a importância de minimizar a ocorrência de falhas se torna fundamental para garantir a segurança e a correta operação destes sistemas. Falhas em eixos rotativos, em grande parte, são causadas pela fratura por fadiga (Sabnavis, 2004).

Segundo Ferreira (2010), as trincas são descontinuidades ao longo da estrutura do eixo e surgem em concentradores de tensão como, por exemplo, entalhes na própria geometria da peça. Ferreira (2010) ainda afirma que a presença de trincas em um sistema mecânico ou estrutural afeta a sua resposta de vibração, uma vez que é introduzida uma flexibilidade local e novos harmônicos surgem no espectro de frequência.

O conhecimento prévio do comportamento dinâmico de rotores com trincas permite que a detecção destas possam ser realizadas a tempo, antes da ocorrência de catástrofes e perdas irreparáveis (Bachschmid et al., 2010).

Para se estimar a posição e profundidade da trinca faz-se uso do modelo matemático do rotor, além da caracterização do comportamento dinâmico da trinca, que pode ser descrito por um fenômeno conhecido como *breathing*. Este mecanismo é observado em trincas transversais - perpendiculares ao eixo, quando a transição entre a abertura e o fechamento da trinca é governada pelo movimento de rotação, ou seja, quando o peso e os carregamentos geram esforços de tração à parte superior do rotor e esforços de compressão à parte inferior do rotor (Actis e Dimarogonas, 1989).

Bachschmid et al. (2010) descrevem que um dos sintomas mais expressivos de eixos rotativos com trincas são os componentes harmônicos de vibração excitados por essas descontinuidades. As características destas vibrações (amplitudes dos diferentes componentes harmônicos) dependem da profundidade e da posição da trinca. Portanto, o mecanismo de *breathing* precisa ser modelado corretamente para a predição e simulação destes componentes de vibração de forma mais precisa.

2. MODELOS DE GASCH E MAYES

Cavalini (2013) descreve que os modelos que representam o *breathing* com *weight dominance* (peso do eixo mais significativo que o desbalanceamento) são dados pelos modelos de Gasch e Mayes (Gasch, 1993; Mayes e Davies, 1984) por meio de funções matemáticas. Nestes modelos faz-se uso da Mecânica da Fratura Linear para incorporar flexibilidade adicional ao elemento do eixo ao qual se associa a trinca e sua profundidade.

2.1. Flexibilidade Introduzida pela Trinca

Considere um elemento de eixo com seis graus de liberdade por nó, de comprimento L e diâmetro D , contendo uma trinca transversal de profundidade a , sujeito a carregamentos P_1 e P_7 (forças axiais), P_2 , P_3 , P_8 e P_9 (forças cisalhantes), P_4 e P_{10} (momentos de torção), P_5 , P_6 , P_{11} e P_{12} (momentos fletores), como mostrado na Fig. (1).

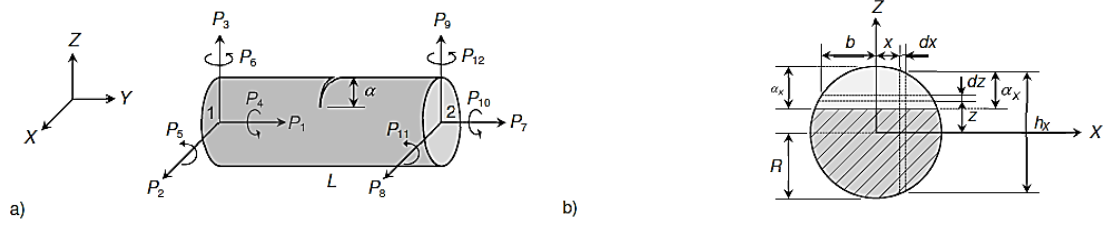


Figura 1: (a) Forças atuantes no elemento de eixo e suas coordenadas; (b) Seção transversal da trinca segundo Cavalini (2013)

Segundo Darpe et al. (2004), o deslocamento ao longo da i -ésima coordenada pode ser determinado pela Eq. (1).

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (1)$$

onde U é a energia de deformação total dada pela Eq. (2).

$$U = U^0 + U^c \quad (2)$$

U^0 é a energia de deformação do elemento de eixo sem trinca, e U^c é a energia de deformação devido à presença da trinca conforme Eq. (3).

$$u_i = \frac{\partial U^0}{\partial P_i} + \frac{\partial U^c}{\partial P_i} \quad (3)$$

Considerando as forças atuantes no elemento de eixo, a energia de deformação U^0 é representada na Eq. (4).

$$U^0 = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\alpha_s V_1^2}{GA} + \frac{\alpha_s V_2^2}{GA} + \frac{M_1^2}{EI} + \frac{M_2^2}{EI} + \frac{T^2}{GI_0} + \frac{F^2}{AE} \right] dy \quad (4)$$

onde V_1 e V_2 são as forças cisalhantes, M_1 e M_2 são os momentos fletores, T é o momento de torção, F é a força axial atuante, G é o módulo de cisalhamento, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia de área da seção transversal, I_0 é o momento polar de inércia da seção transversal e α_s é o coeficiente de cisalhamento. A Eq. (4) pode também ser expressa de forma expandida conforme a Eq. (5).

$$U^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{P_1^2 l}{AE} + \frac{\alpha_s P_2^2 l}{GA} + \frac{P_2^2 l^3}{3EI} + \frac{\alpha_s P_3^2 l}{GA} + \frac{P_3^2 l^3}{3EI} + \frac{P_4^2 l}{GI_0} + \frac{P_5^2 l}{EI} + \frac{P_6^2 l}{EI} - \frac{P_2 P_6 l^2}{EI} + \frac{P_3 P_5 l^2}{EI} \right] \quad (5)$$

A energia de deformação adicional devido à trinca pode ser calculada a partir da Eq. (6) que representa a função densidade de energia de deformação, conforme os conceitos de Mecânica da Fratura.

$$U^c = \int_A J(A) dA = \int_A \frac{1-\nu}{E} \left[\left(\sum_{i=1}^6 K_{Ii} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIi} \right)^2 + (1+\nu) \left(\sum_{i=1}^6 K_{IIIi} \right)^2 \right] \quad (6)$$

onde ν é razão de Poisson e K_{Ii} , K_{IIi} e K_{IIIi} são os fatores de intensificação de tensão para o modo I de tração, modo II de cisalhamento e modo III de torção, respectivamente.

Embora a solução para o fator de intensificação de tensão seja dada em uma variedade de formas, K está relacionado com um fator de correção apropriado na Eq. (7) (Anderson, 2005).

$$K_{mi} = Y \sigma_i \sqrt{\pi \alpha} \quad (7)$$

As tensões na trinca, σ_i , são representadas pelas resultantes dos esforços aplicados pelas forças P_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) e Y são as funções de forma.

Os passos descritos são também detalhados por Cavalini (2013) que define a Eq. (8) como flexibilidade adicional c_{ij} .

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U^c}{\partial P_i \partial P_j} \quad (8)$$

Ainda segundo Darpe et al. (2004), o deslocamento total u_i pode ser escrito na forma matricial conforme a Eq. (9).

$$u_i = [c]P_i \quad (9)$$

onde a matriz dos termos de flexibilidade adimensional (*dimensionless compliance matrix*) é dada pela soma da matriz de a flexibilidade adicional devido à presença da trinca à matriz de flexibilidade do elemento sem trinca.

Assim como Darpe et al. (2004), Cavalini (2013) determina a matriz dos termos de flexibilidade como indicado na Eq. (10).

$$[\bar{c}] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{15} & \bar{c}_{16} \\ & \bar{c}_{22} & 0 & \bar{c}_{24} & 0 & 0 \\ & & \bar{c}_{33} & \bar{c}_{34} & 0 & 0 \\ & & & \bar{c}_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \bar{c}_{55} & \bar{c}_{56} \\ \text{sim.} & & & & & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Os coeficientes da matriz $[\bar{c}]$ são dados pela Eq. (11) e Eq. (12).

$$\bar{c}_{ij} = \frac{ER}{1 - \nu^2} c_{ij} \quad (i = j) \quad (11)$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{ER^2}{1 - \nu^2} c_{ij} \quad (i \neq j) \quad (12)$$

É importante ressaltar que a da matriz de rigidez do elemento de trinca não pode ser diretamente determinada a partir da matriz de flexibilidade dada pela Eq. (10), já que o cálculo da flexibilidade adicional pela presença de trinca é válido somente para trincas completamente abertas e não pode ser estendido para situações intermediárias (Bachschmid et al., 2010). Neste caso, deve-se considerar o mecanismo de *breathing* representado pelos modelos de Gasch e o modelo de Mayes.

2.2. Modelo de Gasch

O modelo apresentado por Gasch (1993), considera que a trinca se abre e se fecha abruptamente. Tomando como referência as coordenadas fixas (Z e X) e móveis (ξ e η) representada pela Fig. (2), adota-se a trinca aberta quando a coordenada η se coincide com a coordenada Z negativa e fechada com a coordenada Z positiva.

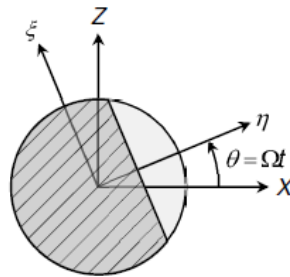


Figura 2: Coordenadas móveis (Z e X) e móveis (ξ e η) para eixo com trinca segundo Cavalini (2013).

A posição angular para o fechamento ocorre à 90° e para a abertura da trinca à 270° do eixo X , o que corresponde à 0° e 180° respectivamente do eixo Z . Bachschmid et al. (2010) ilustram esta situação conforme a Fig. (3).

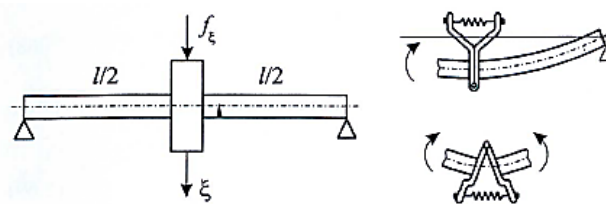


Figura 3: Modelo de Gasch para o *breathing* de Bachschmid et al. (2010)

A matriz de rigidez para o eixo com trinca segundo o modelo de Gasch em termos das coordenadas móveis é descrita pela Eqs. (13), Eq. (14) e (15), também demonstradas por Cavalini (2013).

$$K_{RG} = \begin{bmatrix} k_{\xi G}(\theta) & 0 \\ 0 & k_{\eta G}(\theta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$k_{\xi G}(\theta) = \left(\frac{k_0 + k_{\xi}}{2} \right) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{k_0 + k_{\xi}}{2} \right) \left(C_1 - \frac{1}{3} C_3 + \frac{1}{5} C_5 - \frac{1}{7} C_7 + \dots \right) \quad (14)$$

$(C_i = \cos i\theta, \text{ para } i = 1, 2, 3 \dots)$

$$k_{\eta G}(\theta) = \left(\frac{k_0 + k_{\eta}}{2} \right) + \frac{4}{\pi} \left(\frac{k_0 + k_{\eta}}{2} \right) \left(C_1 - \frac{1}{3} C_3 + \frac{1}{5} C_5 - \frac{1}{7} C_7 + \dots \right) \quad (15)$$

$(C_i = \cos i\theta, \text{ para } i = 1, 2, 3 \dots)$

Em coordenadas fixas, a matriz de rigidez pode ser escrita conforme a Eq. (16).

$$K_{FG} = \begin{bmatrix} k_{FG(11)} & k_{FG(12)} \\ k_{FG(21)} & k_{FG(22)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\xi G}(\theta) C_1^2 + k_{\eta G}(\theta) S_1^2 & [k_{\xi G}(\theta) - k_{\eta G}(\theta)] S_1 C_1 \\ [k_{\xi G}(\theta) - k_{\eta G}(\theta)] S_1 C_1 & k_{\xi G}(\theta) S_1^2 + k_{\eta G}(\theta) C_1^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$(S_i = \sin i\theta, \text{ para } i = 1, 2, 3 \dots)$

2.3. Modelo de Mayes

O modelo de Mayes, diferentemente do modelo de Gasch, propõe que o movimento de abertura e fechamento da trinca seja regido por uma função cosseno conforme a Eq. (17). Adota-se a trinca aberta quando a coordenada η coincide com a coordenada Z negativa (180° em relação ao eixo Z) e fechada quando a coordenada η coincide com a coordenada Z positiva (0° ou 360° em relação ao eixo Z).

$$f(\Omega t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\Omega t)] \quad (17)$$

A matriz de rigidez assume a forma da Eq. (13) e os termos da diagonal principal em termos das coordenadas móveis são expressos pela Eq. (18) e Eq. (19) (Cavalini, 2013).

$$k_{\xi M}(\theta) = \frac{(k_0 + k_{\xi})}{2} + \frac{(k_0 + k_{\xi})}{2} C_1 \quad (18)$$

$(C_1 = 1, \text{ para } \theta = 0^\circ \text{ ou } 360^\circ)$

$$k_{\eta M}(\theta) = \frac{(k_0 + k_{\eta})}{2} + \frac{(k_0 + k_{\eta})}{2} C_1 \quad (19)$$

$(C_1 = -1, \text{ para } \theta = 180^\circ)$

Em coordenadas fixas a matriz de rigidez pode, neste caso ser representada pela Eq. (20).

$$K_{FM} = \begin{bmatrix} k_{FM(11)} & k_{FM(12)} \\ k_{FM(21)} & k_{FM(22)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\xi M}(\theta) C_1^2 + k_{\eta M}(\theta) S_1^2 & [k_{\xi M}(\theta) - k_{\eta M}(\theta)] S_1 C_1 \\ [k_{\xi M}(\theta) - k_{\eta M}(\theta)] S_1 C_1 & k_{\xi M}(\theta) S_1^2 + k_{\eta M}(\theta) C_1^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

3. MODELO FLEX

O modelo Flex, apresentado por Bachschmid et al. (2010), é baseado nos fundamentos de viga equivalente na qual a seção transversal é formada por uma região sem trinca e uma região correspondente à parte que contém a trinca. O comprimento da viga equivalente é definido em função da profundidade da trinca.

O comportamento flexível foi definido pela construção da matriz de rigidez de uma viga engastada-livre, considerando quatro graus de liberdade por nó. A matriz de flexibilidade é obtida pela inversão da correspondente matriz de rigidez. Bachschmid et al. (2010) utilizaram aproximações da teoria de vigas de Timoshenko, além de introduzirem os momentos de inércia de área para seção transversal para diferentes posições angulares. A extensão para a matriz de rigidez da uma viga livre-livre dada pela Eq. (21), é obtida claramente pelas condições de equilíbrio da viga e é apresentada por Cavalini (2013).

$$K_C = \begin{bmatrix} b & p & -q & -d & -b & -p & -q & d \\ & a & c & q & -p & -a & c & q \\ & & e & r & q & c & f & s \\ & & & h & d & -q & s & g \\ & & & & b & p & q & d \\ & & & & & a & -c & -q \\ & & & & & & e & r \\ & & & & & & & h \end{bmatrix} \quad (21)$$

Os termos da Eq. (21) são apresentados na Eq. (22).

$$\begin{aligned} a &= \frac{12I_z E}{(1 + \phi)l_c^3}, b = \frac{12I_x E}{(1 + \phi)l_c^3}, c = \frac{6I_z E}{(1 + \phi)l_c^2}, d = \frac{6I_x E}{(1 + \phi)l_c^2}, e = \frac{(4 + \phi)I_z E}{(1 + \phi)l_c}, f = \frac{(2 - \phi)I_z E}{(1 + \phi)l_c}, \\ g &= \frac{(2 - \phi)I_x E}{(1 + \phi)l_c}, h = \frac{(4 + \phi)I_x E}{(1 + \phi)l_c}, p = \frac{12I_{xz} E}{(1 + \phi)l_c^3}, q = \frac{6I_{xz} E}{(1 + \phi)l_c^2}, r = \frac{(4 + \phi)I_{xz} E}{(1 + \phi)l_c}, s = \frac{(2 - \phi)I_{xz} E}{(1 + \phi)l_c} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\phi = \frac{12EJ}{GS l_c^2}$$

sendo ϕ é o termo que contabiliza o efeito de cisalhamento, l_c é o comprimento da viga equivalente e S é a área de seção transversal.

4. COMPARAÇÃO DOS MODELOS

Nota-se pelas curvas das rigidezes em coordenadas fixas descritas em Cavalini (2013) e representadas na Fig. (4), Fig. (5) e Fig. (6), que para modelo de Gasch a trinca se encontra totalmente aberta entre 90° e 270° com relação ao eixo Z, além de estar evidente o comportamento de transição abrupta entre as duas situações. Para o modelo de Mayes, observa-se um comportamento mais suave e que a trinca se abre completamente à 180° do eixo Z. No modelo Flex a trinca se mantém quase que totalmente aberta entre 120° e 240° , além se assemelhar-se ao modelo de Mayes quanto ao comportamento suave de transição.

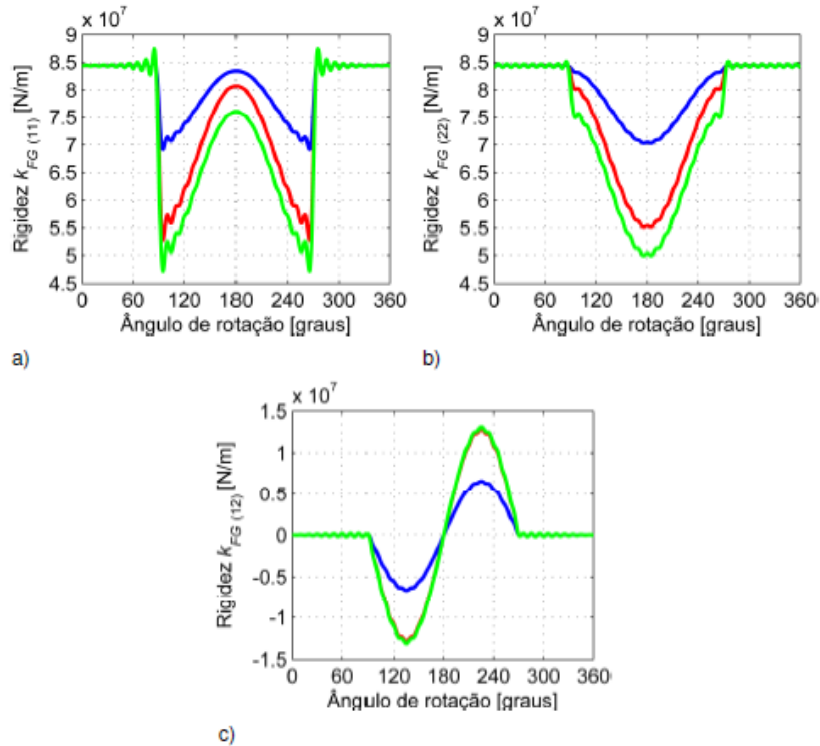


Figura 4: Curvas das rigidezes nas direções X, Z e cruzada, em coordenadas fixas, segundo o modelo Gasch dos resultados numéricos de Cavalini (2013)
 (— $\alpha/D = 0,20$; — $\alpha/D = 0,35$; — $\alpha/D = 0,50$)
 a) rigidez $k_{FG(11)}$; b) rigidez $k_{FG(22)}$; c) rigidez $k_{FG(12)}$

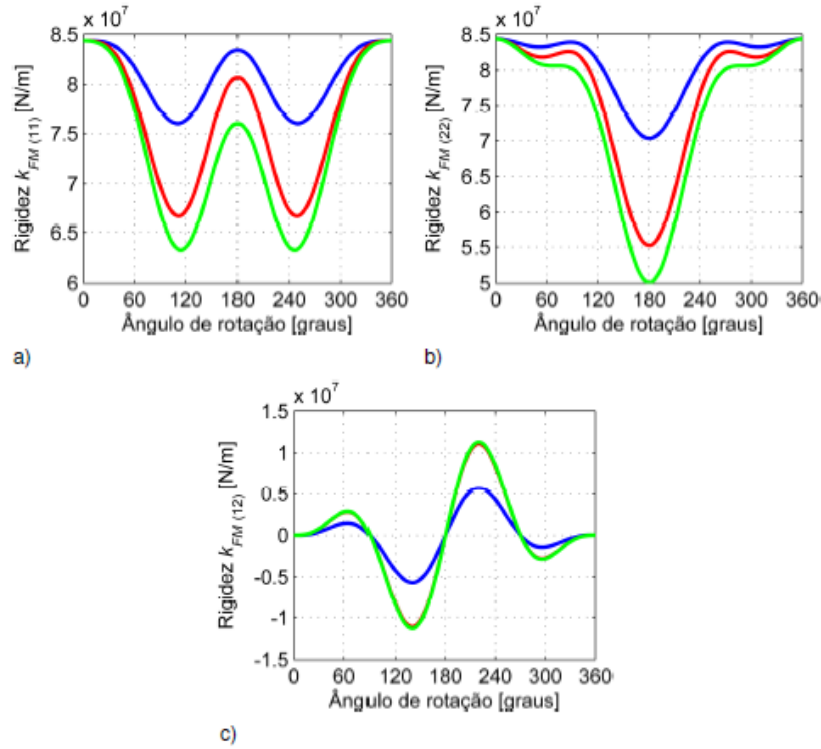


Figura 5: Curvas das rigidezes nas direções X, Z e cruzada, em coordenadas fixas, segundo o modelo Mayes dos resultados numéricos de Cavalini (2013)
(— $\alpha/D = 0,20$; — $\alpha/D = 0,35$; — $\alpha/D = 0,50$)
a) rigidez $k_{FG(11)}$; b) rigidez $k_{FG(22)}$; c) rigidez $k_{FG(12)}$

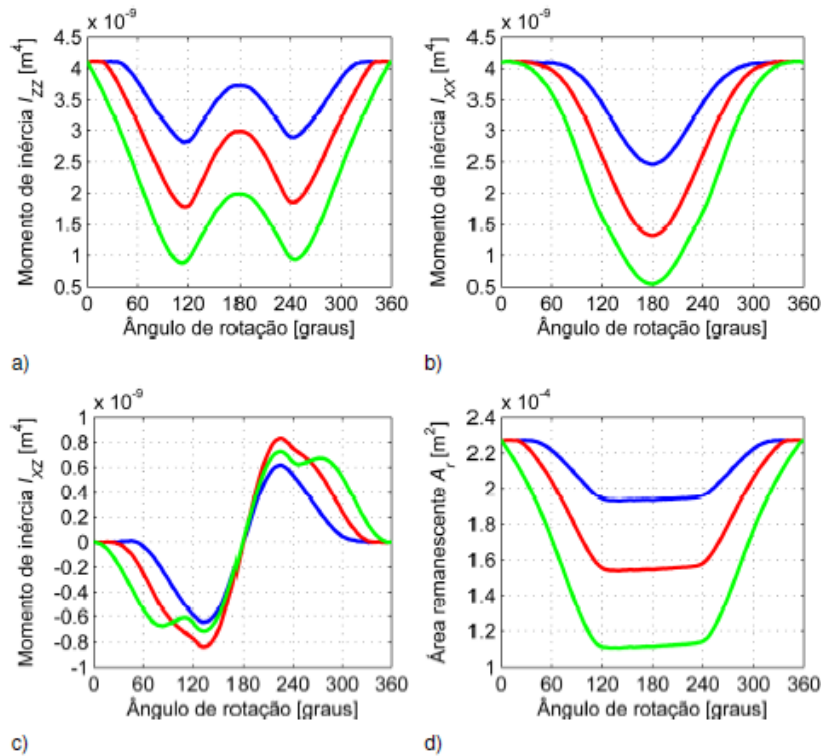


Figura 6: Curvas dos momentos de inércia, em coordenadas fixas, segundo o modelo Flex dos resultados numéricos de Cavalini (2013)
(— $\alpha/D = 0,20$; — $\alpha/D = 0,35$; — $\alpha/D = 0,50$)
a) momento I_{zz} ; b) momento I_{xx} ; c) momento I_{xz} d) área remanescente da seção transversal

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES, CNPq (574001/2008-5) e a FAPEMIG (TEC-APQ-022284-15 / TEC-APQ-307609) pelo suporte financeiro, ao Laboratório de Mecânica de Estruturas e aos professores Aldemir Cavalini e Valder Steffen pelas importantes contribuições.

6. REFERÊNCIAS

- Anderson, T.L. “Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications”. Taylor & Francis Group, LLC, 2005.
- Actis, R.L., Dimarogonas, A.D. “Non-linear Effects due to Closing Cracks in Vibration Bems”. In: 12th ASME Conference on Mechanical Engineering. Vibration and Noise, Montreal, Canada, 1989, pp. 99-104.
- Bachschnid, N.; Pennacchi, P.; Tanzi, E. Cracked rotors: a survey on static and dynamic behaviour including modelling and diagnosis. Springer, 2010.
- Cavalini, A.A. “Detecção e Identificação de Trincas Transversais Incipientes em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas”. Tese de Doutorado, Universidade de Federal de Uberlândia, 2013.
- Darpe, A.K., Gupta, K., Chawla, A. “Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 269, 2004, pp. 33-60.
- Ferreira, B.F. “Detecção de Trincas em Eixos Rotativos Através de Medição de Vibrações”. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2010.
- Gasch, R. “A Survey of the Dynamic Behaviour of a Simple Rotating Shaft With a Transverse Crack”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 160, N° 2, 1993, pp. 313-332.
- Mayes, I.W., Davies, W.G.R. “Analysus of the Response of a Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transversal Crack in a Rotor”. *Journal of Vibration, Acoustics, Stess, and Reliability in Design*, Vol. 106, pp. 139-145.
- Sabinavis, G.; Kirk, R. G.; Kasarda, M.; Quinn, D. “Cracked Shaft Detection and Diagnosis”. *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 36, N° 4, 2004, p. 287-296.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.