

## ERRO ASSOCIADO À ADOÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL DOS PONTOS DO PERFIL NA AVALIAÇÃO DA INCERTEZA DE $R_t$

José Eduardo Silveira Leal, Universidade Federal de Uberlândia, joseleal@ufu.br

Rosenda Valdés Arencibia, Universidade Federal de Uberlândia, rosenda.arencibia@ufu.br

**Resumo:** Este trabalho tem como objetivo determinar o erro associado ao fato de considerar como normal a distribuição dos pontos das ordenadas do perfil de rugosidade na avaliação da incerteza de medição associada à rugosidade total ( $R_t$ ). Para tanto, a rugosidade total  $R_t$  do furo do cilindro de compressor foi medida por meio de um rugosímetro eletromecânico, fabricado pela Taylor Hobson, modelo Surtronic 3+. Em seguida foi realizado o teste de normalidade Shapiro-Wilk para verificar a normalidade das ordenadas dos pontos que compõem o perfil de rugosidade. A partir da simulação de possíveis valores das ordenadas, oriundas de uma população normal e de uma população com distribuição de probabilidade semelhante à dos pontos apalpados em um único ciclo de medição (distribuição real), foi calculada a incerteza associada à medição do  $R_t$  utilizando o método de Monte Carlo adaptado (MCA) e os resultados foram comparados. A adoção de uma distribuição normal para descrever os pontos das ordenadas do perfil de rugosidade durante a avaliação da incerteza do parâmetro  $R_t$  não se mostrou adequada. A diferença observada entre os valores médios simulados de  $R_t$  considerando a distribuição normal e a real foi de  $0,61 \mu\text{m}$ . Por sua vez, a diferença média entre os valores de incerteza-padrão combinada obtidos em ambos os casos foi de  $0,11 \mu\text{m}$ .

**Palavras-chave:** Método de Monte Carlo Adaptativo, rugosidade, incerteza de medição

### 1. INTRODUÇÃO

O GUM (ISO, 1993) estabeleceu as regras gerais e critérios para expressar e combinar as incertezas individuais que afetam o processo de medição e, assim, determinar a incerteza de medição, que pode seguir vários níveis de exatidão e de complexidade. O método apresentado possui um notório desempenho, sobretudo em processos de medição simples e de média complexidade. Entretanto, o entendimento e a aplicação dessas regras não são tarefas fáceis. Para tal, dentre outros aspectos, exigem-se amplos conhecimentos metrológicos e estatísticos, além da manipulação de grande quantidade de dados o que pode conduzir ao aparecimento de erros de cálculo e de um valor de incerteza pouco representativo.

O GUM S1 (BIPM et al., 2008) orienta a aplicação do método de Monte Carlo (MC) que emprega simulações computacionais para gerar números aleatórios de acordo com uma distribuição de probabilidades e seus parâmetros característicos definidos previamente. Estas distribuições de probabilidade das variáveis de entrada são propagadas por meio do modelo matemático da medição (Schwenke et al., 2000). Entretanto ao aplicar-se o método de MC não existe qualquer controle direto sobre o grau de aproximação dos valores de incerteza resultantes, uma vez que o número de iterações necessário para proporcionar um grau prescrito de aproximação dependerá da forma da função densidade de probabilidade dos valores da variável de saída e da probabilidade de abrangência requerida. Além disso, os cálculos são de natureza estocástica, sendo baseados em uma amostragem aleatória.

Assim, o GUM S1 (BIPM et al., 2008) apresenta, também, o método de Monte Carlo adaptativo (MCA). Enquanto no método de MC o número de iterações é escolhido a priori pelo usuário, no MCA o número de iterações é definido adaptativamente seguindo uma regra de parada ou critério de convergência. Para tanto, inicialmente são geradas  $M = 10\,000$  ou iterações ( $h = 1$ ), em um segundo momento são efetuadas novas  $M$  iterações ( $h = h + 1$ ) obtendo-se  $20\,000$  iterações ( $h = 2$ ). Em seguida é aplicado o teste de convergência (verificação 1), e caso esta não seja confirmada são adicionadas  $10\,000$  novas iterações ( $h = 3$ ) e um novo teste de convergência é realizado (verificação 2). Novas simulações são efetuadas e o teste de convergência é repetido tantas vezes quanto necessário até atestar-se a mesma.

Quando a convergência é admitida ao final de  $h$  etapas e  $h - 1$  verificações a incerteza-padrão combinada é calculada utilizando-se todo o espaço  $M \times h$ . Para avaliar a convergência do método são utilizados quatro parâmetros de convergência, a saber,  $y(h)$  (média de  $Y$ ),  $u(y(h))$  (incerteza de  $Y$ ),  $y_{\min}^{(h)}$  (menor valor de  $Y$ ), e  $y_{\max}^{(h)}$  (maior valor de  $Y$ ), e uma tolerância numérica previamente definida. Esta tolerância pode ser calculada pela Eq. (1).

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^\ell \quad (1)$$

Onde  $\ell$  é o número de casas decimais da resolução do sistema de medição

A cada nova etapa  $h$  são armazenados os valores  $y(h)$ ,  $u(y(h))$ ,  $y_{min}^{(h)}$  e  $y_{max}^{(h)}$ , ou seja, no MCA obtém-se, além do vetor de saída, outros quatro vetores e para que a simulação seja considerada estável, o erro-padrão, calculado pela Eq. (2) de cada um dos parâmetros de convergência, deve ser menor do que a tolerância numérica especificada pela Eq. (3).

$$2E_p = \frac{2}{h(h-1)} \cdot \sum_{r=1}^h (y^{(r)} - y)^2 \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{h} \cdot \sum_{r=1}^h y^{(r)} \quad (3)$$

Quando nenhum dos valores  $2Ep(y)$ ,  $2Ep(u(y))$ ,  $2Ep(y_{max})$  ou  $2Ep(y_{min})$  exceda o grau de aproximação exigida o cálculo do MCA é considerado estável. Os resultados, oriundos do número total de iterações, são então utilizados para fornecer a estimativa do valor de grandeza de saída, a incerteza-padrão associada à medição e o intervalo de abrangência (BIPM et al., 2008). Em outras palavras, uma grandeza pode ser considerada estável se o erro-padrão associado com a estimativa do seu valor é menor do que o grau de aproximação exigida na incerteza-padrão  $u(y)$ .

## 2. METODOLOGIA

O parâmetro de rugosidade  $R_t$  do furo de um cilindro de um compressor hermético foi medido por meio de um rugosímetro eletromecânico do fabricante Taylor Hobson, mostrado na Fig. (1), este dispositivo possui uma ponta de diamante de raio igual  $2 \mu\text{m}$ , resolução de  $0,01 \mu\text{m}$  e faixa nominal de  $20 \mu\text{m}$ . A peça objeto de medição foi fixada sobre o desempenho da máquina de medir por coordenadas como mostra a Fig. (2).



Figura 1: Rugosímetro portátil, modelo surtronic 3+ da Taylor Hobson.

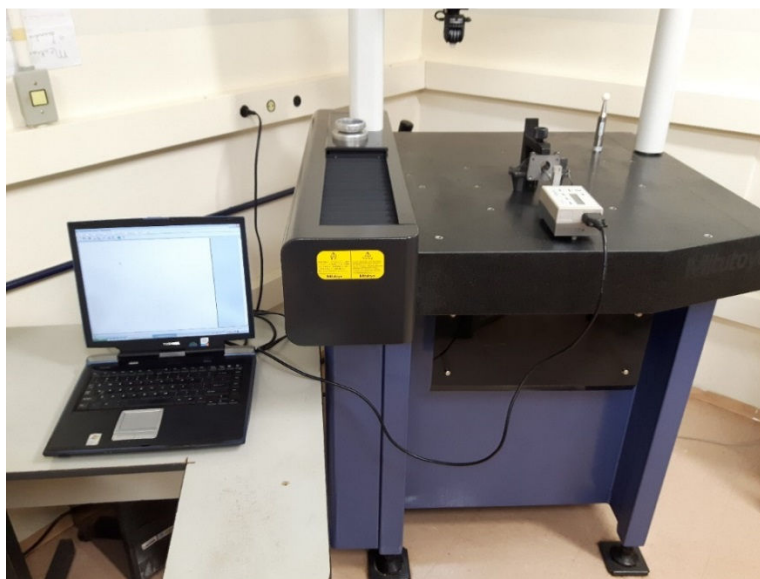


Figura 2: Sistema de medição da rugosidade.

O rugosímetro utilizado não possui certificado de calibração, desta forma a incerteza associada à calibração foi estimada conforme recomendado por Vuolo (1996), considerado: uma incerteza expandida igual a duas vezes a resolução com fator de abrangência igual a 2,00 e infinitos graus de liberdade efetivos.

O comprimento de amostragem (*cut-off*) foi adotado como sendo 0,8 mm de acordo com a ABNT NBR ISO 4288 (ABNT, 2008). Durante a medição foram considerados cinco comprimentos de amostragem, totalizando um comprimento de avaliação de 4 mm e foi aplicado o filtro de Gauss.

A norma ABNT NBR ISO 4288 (ABNT, 2008) apresenta um procedimento para a verificação da rugosidade quando são estabelecidas tolerâncias, os valores de cada parâmetro devem ser comparados individualmente com a tolerância especificada. Assim, para a avaliação da incerteza de medição foi realizado somente um único ciclo de medição utilizando o *software* TalyProfile Gold 4.0®.

Além dos valores do parâmetro de rugosidade, foram coletados o perfil de rugosidade e as coordenadas  $z(x)$  dos 8000 pontos que definem o mesmo. O teste de *Shapiro-Wilk* foi aplicado para verificar a normalidade dos valores das ordenadas dos pontos que compõem o perfil de rugosidade.

O parâmetro de rugosidade  $R_t$  é definido pela Eq. (4).

$$R_t = \text{máximo}[z(x)] - \text{mínimo}[z(x)] \quad (4)$$

Onde:  $z(x)$  são os valores das ordenadas do perfil de rugosidade.

As fontes de erro relativas à medição com o rugosímetro eletromecânico podem ser vistas na Fig. (3).

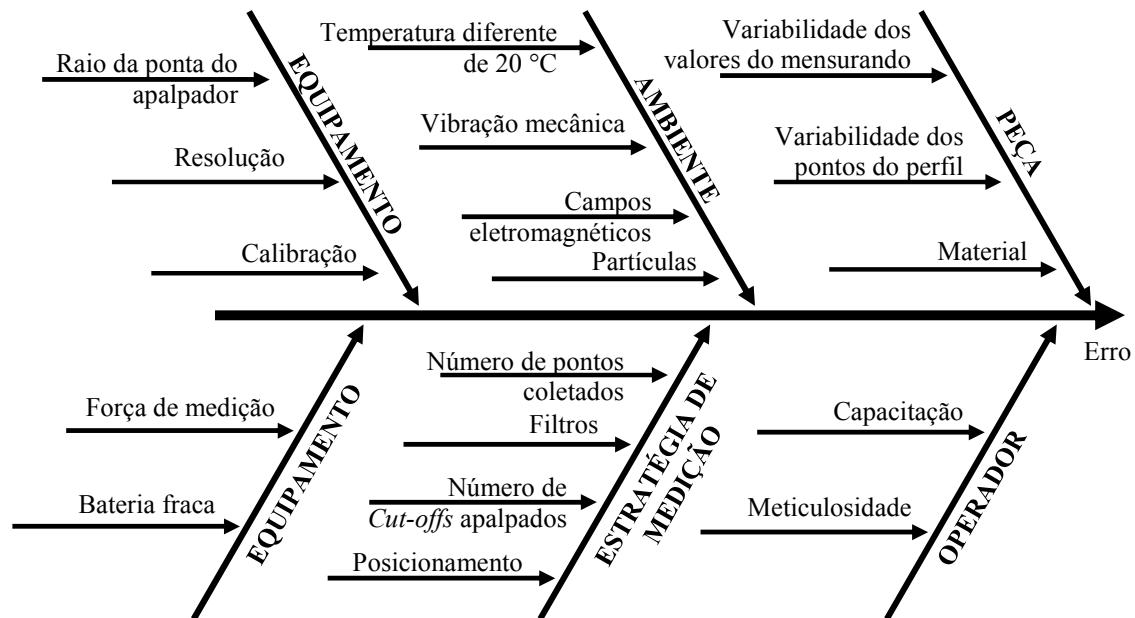


Figura 3: Fontes de erro na medição da rugosidade com o rugosímetro eletromecânico.

O experimento foi conduzido à temperatura de  $(20,0 \pm 1,0)^\circ\text{C}$ . Para monitoramento da temperatura foi utilizado um termo higrômetro digital do fabricante Instrutherm com resolução de  $0,1^\circ\text{C}$  e faixa nominal de  $(-20 \text{ a } 60)^\circ\text{C}$ . O certificado de calibração deste equipamento declara uma incerteza expandida de  $0,3^\circ\text{C}$  para a temperatura com fator de abrangência igual a 2,00 e infinitos graus de liberdade. Precedentemente às medições, tanto as peças quanto os sistemas de medição foram mantidos por pelo menos 12 horas na temperatura especificada para atingirem o equilíbrio térmico.

Para efetuar a avaliação da incerteza associada à medição do  $R_t$ , foi utilizado o modelo matemático presente na Eq. (5).

$$R_t = I[R_t] + \Delta R + \Delta C + \Delta r + \Delta D \quad (5)$$

Onde  $I[R_t]$ , é a indicação do rugosímetro durante a primeira medição do  $R_t$ ,  $\Delta R$  é a correção devido à resolução do sistema de medição,  $\Delta C$  é a correção associada à incerteza de calibração do sistema de medição,  $\Delta r$  é a correção devido ao raio da ponta do rugosímetro,  $\Delta D$  é a correção devido à deformação da peça durante a medição e  $uc(R_q)$  é a incerteza-padrão combinada associada à medição do  $R_q$ .

O cálculo da incertezas-padrão  $u(I[R_t])$  durante a aplicação do MCA foi realizado numericamente considerando duas populações diferentes, uma normal e outra real. Após a geração da população, um vetor representando os possíveis valores

de  $R_t$ , no qual cada valor foi calculado a partir de 8 000 pontos utilizando as Eq. (4), este procedimento pode ser visto na Fig. (4). Por fim foi efetuada a comparação e análise dos resultados obtidos com FDP normal e FDP real.

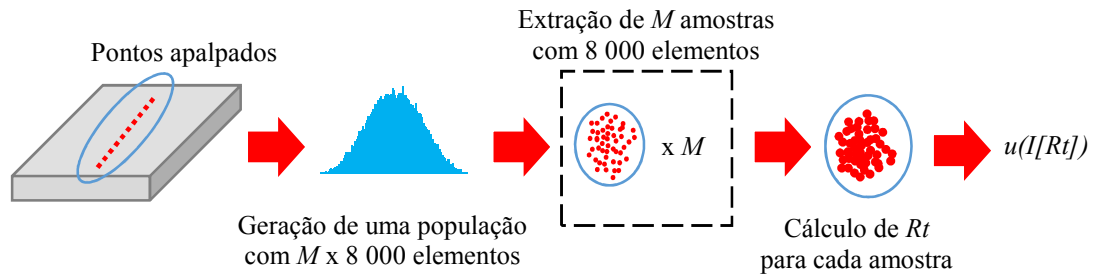


Figura 4: Etapas da estimativa numérica de  $u(I[Rt])$ .

A Tabela (1) mostra os dados referentes ao cálculo das incertezas-padrão associadas às demais variáveis de entrada presentes no modelo matemático.

Tabela 1: Dados do cálculo das incertezas-padrão.

| Incerteza-padrão                                                                                        | Características                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Variabilidade dos pontos no perfil aplicada nas equações de cada parâmetro<br>$u(I[Rt])$                | - Calculada numericamente                                                                                                                      |
| Resolução do sistema de medição<br>$u(\Delta R) = \frac{R}{2\sqrt{3}}$                                  | Avaliação tipo B<br>- $R = 0,01 \mu\text{m}$<br>- Distribuição retangular<br>- Infinitos graus de liberdade                                    |
| Calibração do sistema de medição<br>$u(\Delta C) = \frac{U(C)}{k}$                                      | Avaliação tipo B<br>- $U(C) = 0,02 \mu\text{m}$<br>- $k = 2,00$<br>- Distribuição normal<br>- Infinitos graus de liberdade:                    |
| Raio da ponta do apalpador do rugosímetro<br>$u(r) = \frac{0,02 \cdot P}{\sqrt{3}}$<br>(Haitjema, 1998) | Avaliação tipo B<br>- $P$ : valor do parâmetro de rugosidade<br>- Distribuição triangular<br>- Infinitos graus de liberdade                    |
| Deformação da superfície da peça<br>$u(D) = \frac{D}{\sqrt{3}}$<br>(Leach, 2001)                        | Avaliação tipo B<br>- $D$ : deformação da superfície<br>$D = 0,005 \mu\text{m}$<br>- Distribuição triangular<br>- Infinitos graus de liberdade |

Durante a aplicação do MCA, utilizou-se o *Matlab® R2014b* para a geração dos números aleatórios e propagação das incertezas. Em todos os casos o vetor de saída foi composto por 50 parcelas ( $h = 50$ ) com 10 000 iterações por parcela ( $M = 10\,000$ ) com 49 verificações de convergência.

As incertezas-padrão  $\Delta R$ ,  $\Delta C$ ,  $\Delta r$  e  $\Delta D$ , correspondem a um vetor composto de números pseudoaleatórios com as mesmas características da sua respectiva variável de entrada, estas características são média, desvio-padrão (valor da incerteza-padrão) e FDP (normal, triangular ou retangular).

Por fim, as incertezas-padrão foram combinadas utilizando a Eq (5). A Tabela (2) exibe as funções utilizadas para a geração dos números pseudoaleatórios.

Tabela 2: Funções utilizadas no *Matlab® R2014b* utilizadas durante a simulação.

| Função                                                                                                                                                 | Finalidade                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $((\text{rand}(M,1) > 0.5) * 2 - 1) * R * \text{rand}(M,1);$                                                                                           | Geração de $M$ números aleatórios considerando uma distribuição retangular ou uniforme com média zero e desvio-padrão igual a $R/\sqrt{3}$              |
| $((\text{rand}(M,1) > 0.5) * 2 - 1) * 0.02 * R / 2 * \text{rand}(M,1)$<br>+<br>$((\text{rand}(M,1) > 0.5) * 2 - 1) * 0.02 * R / 2 * \text{rand}(M,1);$ | Geração de $M$ números aleatórios considerando uma distribuição retangular ou uniforme com média zero e desvio-padrão igual a $R/\sqrt{6}$              |
| $\text{norminv}(\text{rand}(M,N), \bar{x}, s);$                                                                                                        | Geração de uma população com $M \times N$ números aleatórios considerando uma distribuição normal com média $\bar{x}$ e desvio-padrão $s$               |
| $\text{norminv}(\text{rand}, \text{Perfil}(\text{randi}([1,N], M, N)), s/\text{sqrt}(N));$                                                             | Geração de uma população com $M \times N$ números aleatórios considerando uma distribuição, média $\bar{x}$ e desvio-padrão $s$ semelhante ao do perfil |

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura (5) mostra o perfil de rugosidade efetivo obtido durante a medição do  $R_t$ . Observa-se que o perfil possui caráter aperiódico, arranjo não uniforme de picos e vales, altas frequências e predominância de picos e vales pronunciados e finos. Neste perfil, o valor de  $R_t$  é igual a  $2,87 \mu\text{m}$ .

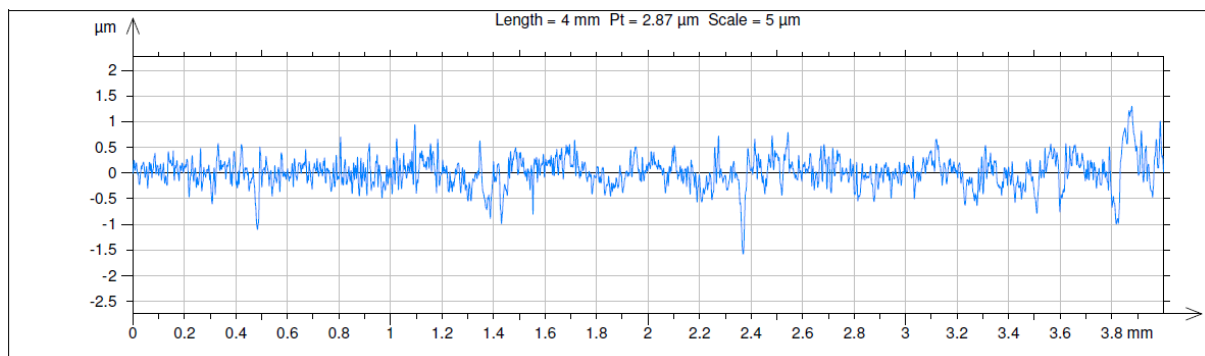


Figura 5: Perfil de rugosidade efetivo.

O teste de normalidade *Shapiro-Wilk* para as ordenadas dos pontos que compõem o perfil de rugosidade encontrou um valor- $p$  ( $2,2 \times 10^{-16}$ )  $< \alpha = 0,05$ , levando à rejeição da hipótese nula, ou seja, pode-se afirmar com 95% de confiabilidade que os pontos de  $z(x)$  não provêm de uma população normal. Este resultado pode ser confirmado ao se observar a disposição dos pontos em torno da reta na Fig. (6).

A Figura (7) mostra os valores dos indicadores de convergência ( $2Ep(y)$ ,  $2Ep(u(y))$ ,  $2Ep(y_{max})$  e  $2Ep(y_{min})$ ) obtidos por meio do método MCA para a avaliação da incerteza de medição do  $R_t$ . Neste caso, as provas aleatórias, da variável associada aos pontos do perfil, foram geradas utilizando uma FDP equivalente à aquela obtida durante a medição do perfil de rugosidade.

Observa-se que todos os parâmetros de convergência estão abaixo da tolerância numérica especificada ( $0,005 \mu\text{m}$ ) a partir da 1ª verificação de convergência ( $h = 2$ ) e a simulação pode ser considerada convergente com 20 000 iterações. No entanto, verifica-se que o valor do parâmetro  $2Ep(y_{min})$  assumiu valores acima da tolerância para  $h$  entre 3 e 4 e  $h$  entre 8 e 21. Neste caso, a simulação alternou entre a convergência e a perda desta com o aumento do número de iterações. A incerteza-padrão combinada  $u_c(R_t)$  é igual a  $0,03 \mu\text{m}$ , não havendo nenhuma melhoria na incerteza final com o aumento do número de iterações.

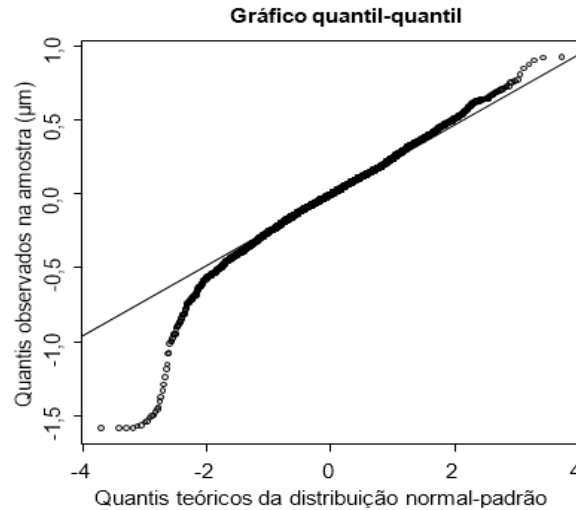
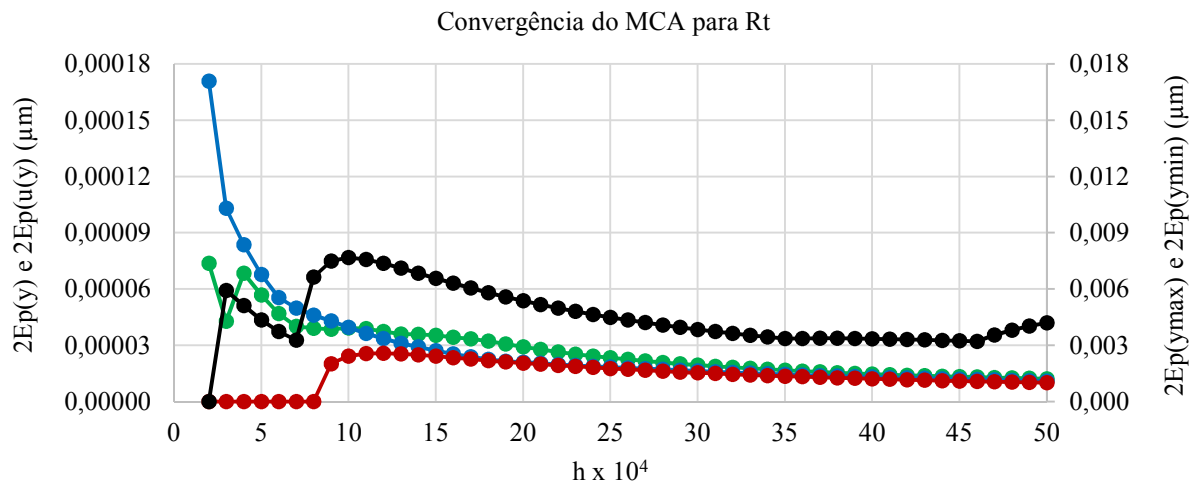


Figura 6: Gráfico quantil-quantil das ordenadas dos pontos do perfil de rugosidade.


 Figura 7: Comportamento de  $2Ep(y)$ ,  $2Ep(u(y))$ ,  $2Ep(y_{max})$  e  $2Ep(y_{min})$  durante a aplicação do método MCA.

A Tabela (3) mostra os valores das incertezas-padrão  $u(I[Rt])$  obtidos a partir de provas aleatórias extraídas de uma população semelhante àquela dos pontos do perfil de rugosidade e aqueles obtidos quando considerada uma população normal. São apresentados, ainda, o valor médio de  $Rt$  e a incerteza-padrão combinada  $u_c(Rt)$  resultante de cada simulação. Para fins de comparação, foram adicionados dois algoritmos nos valores referentes às incertezas.

 Tabela 3: Comparação entre os resultando utilizando FDP real e FDP normal para o  $Rt$ .

| <b><math>Rt</math> medido = 2,87 <math>\mu m</math></b> |          |            |           |            |            |           |
|---------------------------------------------------------|----------|------------|-----------|------------|------------|-----------|
| Valores expressos em $\mu m$                            |          |            |           |            |            |           |
|                                                         | FDP real |            |           | FDP normal |            |           |
|                                                         | $Rt$     | $u(I[Rt])$ | $u_c(Rt)$ | $Rt$       | $u(I[Rt])$ | $u_c(Rt)$ |
| <b>Simulação 1</b>                                      | 2,87     | 0,0087     | 0,0271    | 2,26       | 0,1300     | 0,1322    |
| <b>Simulação 2</b>                                      | 2,87     | 0,0087     | 0,0271    | 2,26       | 0,1295     | 0,1322    |
| <b>Simulação 3</b>                                      | 2,87     | 0,0088     | 0,0272    | 2,26       | 0,1291     | 0,1321    |
| <b>Média</b>                                            | 2,87     | 0,0087     | 0,0271    | 2,26       | 0,1295     | 0,1322    |

Observa-se, na Tabela (3), que ao utilizar uma FDP do tipo normal para representar os pontos do perfil de rugosidade se obtém um valor médio de  $Rt$  igual a 2,26  $\mu m$ . Enquanto que ao considerar a distribuição real das ordenadas dos pontos

do perfil a média resultante foi de 2,87  $\mu\text{m}$ , indicando uma diferença entre ambas de 0,61  $\mu\text{m}$ . Para a incerteza-padrão combinada  $u_c(Rt)$ , a discrepância encontrada foi de 0,11  $\mu\text{m}$ .

Pode-se concluir que a utilização de uma FDP normal para a avaliação da incerteza de medição associada ao  $Rt$  é uma prática inadequada, que pode constituir uma fonte significativa de erros.

#### 4. CONCLUSÕES

A avaliação da incerteza associada à medição do parâmetro  $Rt$ , considerando as ordenadas dos pontos que compõem o perfil de rugosidade de um único ciclo de medição, foi efetuada com êxito utilizando o método MCA. O uso de uma FDP normal durante a avaliação da incerteza associada à medição de  $Rt$  não é adequado uma vez que foram observadas diferenças significativas da ordem de 0,61  $\mu\text{m}$  entre os valores médios da simulação utilizando distribuição normal e aqueles resultantes da medição do parâmetro em questão. Com relação à incerteza-padrão combinada a diferença média encontrada foi de 0,11  $\mu\text{m}$  para  $Rt$ .

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às instituições CNPq, CAPES-PROEX e à FAPEMIG.

#### 6. REFERÊNCIAS

- ABNT. “ABNT NBR ISO 4288: Especificações Geométricas Do Produto (GPS) — Rugosidade: Método Do Perfil — Regras E Procedimentos Para a Avaliação Da Rugosidade,” 2008.
- BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. “JCGM 101:2008 Evaluation of Measurement Data — Supplement 1 to the “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” — Propagation of Distributions Using a Monte Carlo Method,” 2008.
- Haitjema, H. “Uncertainty Analysis of Roughness Standard Calibration Using Stylus Instruments.” *Precision Engineering*, Vol.2, Nº 2, April 1998, pp. 110-119. DOI: 10.1016/S0141-6359(97)00090-1.
- Leach, R.K. “The Measurement of Surface Texture Using Stylus Instruments.” *Measurement Good Practice Guide*, Nº 37, 2001. <[http://publications.npl.co.uk/npl\\_web/pdf/mgpg37.pdf](http://publications.npl.co.uk/npl_web/pdf/mgpg37.pdf)>.
- Schwenke, H., Siebert, B.R.L., Wäldele, F. and Kunzmann, H. “Assessment of Uncertainties in Dimensional Metrology by Monte Carlo Simulation: Proposal of a Modular and Visual Software.” *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, Vol.49, January 2000, pp. 395-398. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)62973-4.
- Vuolo, J.H. “Fundamentos Da Teoria de Erros”. 2nd ed. São Paulo, SP, Brasil: Edgard Blucher, 1996.

#### 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.