

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE COMPÓSITOS INCORPORANDO CIRCUITOS *SHUNT* PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

Lorrane Pereira Ribeiro, Universidade Federal de Uberlândia, lorranemecatronica@gmail.com
Antônio Marcos Gonçalves de Lima, Universidade Federal de Uberlândia, amglima@ufu.br

Resumo: Estruturas compósitas em engenharia contendo elementos piezelétricos acoplados a circuitos elétricos *shunt*, para fins de atenuação passiva dos níveis de vibração, apresentam incertezas inerentes em seus parâmetros de projeto, as quais, podem afetar significativamente a eficiência dos circuitos elétricos passivos. Neste contexto, este trabalho apresenta a modelagem por elementos finitos estocásticos de uma estrutura em material compósito laminado contendo elemento piezelétrico acoplado a circuitos elétricos *shunt*, de modo que, parâmetros incertos, como direções das fibras, espessuras das camadas e elementos do circuito, sejam assumidos como variáveis aleatórias e, a dispersão destas variáveis, caracterizada nas respostas estocásticas obtidas após a propagação das incertezas no modelo. Em um primeiro momento é realizada a modelagem do problema eletromecânico determinístico. Para tal, há combinação das teorias de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem e da Camada Equivalente Única para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos, com a Teoria Layerwise, que utiliza o conceito de Camadas Equivalentes Discretas na consideração dos campos elétricos, os quais, são assumidos discretos ao longo da espessura da estrutura do laminado. Na sequência, faz-se a inclusão dos circuitos elétricos *shunt* no modelo eletromecânico. A modelagem determinística é realizada de forma parametrizada para que se possa realizar a introdução a posteriori das incertezas no modelo de forma mais eficiente. Utilizando-se do Método dos Elementos Finitos Estocásticos, os parâmetros fatorados das matrizes e os elementos do circuito são considerados como variáveis aleatórias e modelados como campos homogêneos estocásticos gaussianos. Estes campos são então discretizados de acordo com o método de expansão em série de Karhunen-Loève, onde são geradas as matrizes estocásticas exatas do sistema eletromecânico via modificação do processo de integração pelas funções de covariância.

Palavras-chave: modelagem estocástica, materiais compósitos, circuitos *shunt* piezelétricos, controle passivo de vibrações, propagação de incertezas

1. INTRODUÇÃO

Inúmeros pesquisadores têm mostrado que a consideração das incertezas em modelos determinísticos de sistemas de engenharia se torna cada vez mais necessária, uma vez que as mesmas podem influenciar sobremaneira no desempenho, na durabilidade, na segurança e no atendimento aos requisitos de projeto de um dado sistema (Koroishi et al, 2012).

No que diz respeito ao tipo de material, neste trabalho é dada atenção especial ao uso de compósitos, uma vez que, no atual contexto de engenharia, a utilização dos mesmos em vez de materiais convencionais é uma realidade. A fundamentação deste fato baseia-se principalmente, no quesito da superioridade das propriedades mecânicas que se consegue alcançar para uma dada estrutura utilizando-se deste tipo de material (Reddy, 1997).

Os piezelétricos têm sido bastante utilizados em trabalhos de pesquisas e experiências como componentes de atuação no controle de vibrações de estruturas. Em se tratando de controle ativo de sistemas, os mesmos requerem o uso de amplificadores, uma eletrônica de detecção associadas assim como sistemas de controle. Mas, todo este aparato é desnecessário nas aplicações dos chamados circuitos *shunt* onde o único elemento externo é um circuito elétrico passivo, que é o próprio *shunt*. É dado destaque ao circuito *shunt* ressonante monomodal, o qual é formado por um indutor e um resistor, permitindo-se que seja realizada uma sintonização do mesmo para qualquer frequência que se queira amortecer (Hagood e Von Flotow, 1991; Viana 2005). Um inconveniente é que dependendo do modo a ser atenuado, o circuito ressonante pode requerer valores altos para a indutância normalmente não encontrados no mercado, levando-se a necessidade da utilização de indutâncias sintéticas.

No que se refere à modelagem do problema eletromecânico determinístico de vigas compósitas incorporando materiais piezelétricos, neste trabalho as teorias empregadas foram escolhidas em função de sua adaptação ao tipo de análise de incerteza a ser feita, precisão, domínio de aplicação e esforço computacional envolvido na sua implementação (Reddy, 1997; Faria, 2006). Assim, será empregada a Teoria Mista, a qual considera o campo de deslocamentos mecânicos concebido de forma condensada em uma única camada equivalente e o potencial elétrico distribuído por camadas. Desta forma, para a aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos, a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (*First-order Shear Deformation Theory* – FSDT), a qual está inserida no contexto das Teorias da Camada Equivalente única (*Equivalent-single layer theories* – ESL) é utilizada. Já a modelagem dos campos elétricos discretos é realizada utilizando-se da Teoria das Camadas Equivalentes Discretas (*Layerwise Theory*) que está inserida no grupo da Teoria da Elasticidade Tridimensional (Reddy, 1997).

Para facilitar a introdução das incertezas paramétricas de forma sistemática no modelo, ainda na fase determinística foi realizada a parametrização do modelo eletromecânico da estrutura de forma que as variáveis como densidade do material, espessuras das camadas e direção das fibras foram fatoradas das matrizes elementares de massa e rigidezes. Este procedimento facilita a consideração a posteriori das variáveis como sendo campos estocásticos gaussianos homogêneos.

Dentre as famílias de métodos utilizados para discretizar espacialmente um campo estocástico, no qual o tamanho da malha de elementos finitos depende do comprimento de correlação do campo aleatório, utiliza-se neste trabalho os métodos chamados de Métodos de Expansão em séries que consistem no acoplamento do desenvolvimento em série do campo aleatório e uma análise espectral para uma seleção dos termos mais importantes. Dentre os três métodos que fazem parte desta categoria, detalha-se o desenvolvimento proposto por Karhunen-Loève (KL). Assim, há uma intervenção direta no processo de integração, obtendo-se as matrizes estocásticas exatas de massa e rigidezes (Ghanem e Spanos, 1991). Isto permite avaliar a variabilidade das funções de resposta em frequência do sistema pela propagação das incertezas no modelo. Para tanto, utiliza-se do Método do Monte Carlo combinado com a amostragem por Hipercubo Latino (HCL) como solver estocástico.

2. REVISÃO DA FORMULAÇÃO DETERMINÍSTICA

2.1. Problema mecânico

De acordo com a Teoria FSDT, os campos de deslocamentos mecânicos podem ser expressos como apresentados na Eq. (1) (Reddy, 1997).

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}_u(z) \mathbf{u}(x, y, t) = (\mathbf{A}_0 + z \mathbf{A}_1) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (1)$$

onde $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ denota o vetor dos campos de deslocamentos mecânicos, $\mathbf{A}_u(z)$ é a matriz contendo o termo z fatorado e $\mathbf{u}(x, y, t)$ é o vetor que contém os cinco graus de liberdade mecânicos.

Para pequenos deslocamentos, a relação entre deformação e deslocamentos pode ser obtida:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{D}(z) \mathbf{u}(x, y, t) = (\mathbf{D}_0 + z \mathbf{D}_1) \mathbf{u}(x, y, t) \quad (2)$$

onde a matriz $\mathbf{D}(z)$ é a matriz dos operadores diferenciais.

Um sistema de coordenadas global foi adotado com as coordenadas (x, y, z) comuns a toda estrutura. Nas seguintes equações um sistema de coordenadas local (ξ, η, z) foi utilizado devido ao fato de, naquele momento, ser desejado encontrar as matrizes elementares de massa e rigidezes e, a integração para se obter estas matrizes é realizada no sistema local. Na sequência, o Jacobiano J é utilizado na transformação linear de coordenadas.

Devido à natureza ortótropa de materiais compósitos, as propriedades mecânicas dependem fortemente das direções as fibras do laminado. A matriz de propriedades mecânicas pode ser rotacionada de um ângulo θ em torno do eixo z utilizando-se da matriz de transformação $\mathbf{T}$ (para propriedades mecânicas) ou $\mathbf{Q}$ (para propriedades elétricas), sendo que estas matrizes podem ser encontradas no trabalho de Faria (2006). Como exemplo, a rotação da matriz de propriedades mecânicas é dada por $\mathbf{C}_i = \mathbf{T} \mathbf{C}_i^T \mathbf{T}^T$.

Para modelagem mecânica é adotado um elemento finito de placa plana retangular da família Serendipity (Reddy, 1997) que contém oito nós sem a presença do nó central. Assim, devido ao uso da Teoria FSDT sabe-se que a mesma leva em consideração a presença de cinco graus de liberdade mecânicos por nó na definição dos seus campos de deslocamentos, os quais podem ser expressos em termos das suas quarenta variáveis mecânicas nodais. A correspondência entre o deslocamento total do elemento e a contribuição de cada nó é feita por meio das Funções de Forma, $\mathbf{N}_u(\xi, \eta)$, as quais representam as especificidades de cada tipo de elemento, já se encontram representadas em termos das coordenadas locais e definidas no trabalho de (Faria, 2006).

A partir da equação da energia cinética, a matriz de massa elementar é obtida como mostrado a seguir (Faria, 2006):

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{V_e} \rho_k \mathbf{N}_u^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N}_u dV_e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 t_k^i \rho_k \mathbf{M}_{ui}^{(k)} \quad (3)$$

onde ρ_k é a densidade do material da k -ésima camada, $t_k^i = (z_{k+1}^i - z_k^i) = [k^i - (k-1)^i] h_k^i$ com $i=1...3$, V_e é o volume do elemento finito e, h_k é a espessura de cada camada k .

Observa-se que a matriz de massa elementar foi modelada de forma fatorada com os parâmetros densidade do material e espessura das camadas mantidos fora da matriz.

A partir da energia potencial de deformação, a matriz de rigidez mecânica elementar pode ser obtida (Faria, 2006):

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{V_e} [\mathbf{D}(z) \mathbf{N}_u(\xi, \eta)]^T \mathbf{C}_t [\mathbf{D}(z) \mathbf{N}_u(\xi, \eta)] J dV_e \quad (4)$$

onde $\mathbf{C}_t$ é a matriz de propriedades mecânicas já considerando-se as direções das fibras do compósito laminado.

A matriz de rigidez mecânica elementar foi parametrizada em termos das espessuras das camadas e dos ângulos de direções das fibras. Na sequência, ela foi também separada em termos dos efeitos de flexão-membrana e cisalhamento:

$$\mathbf{K}_{ub}^e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n t_k^i \left(c_{k1}^4 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + c_{k2}^2 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + s_k c_{k3}^3 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + {}_4\mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + s_k c_{k5} \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + s_k^2 c_{k6}^2 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_{us}^e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n t_k^i \left(c_{k1}^2 \mathbf{K}_{usi}^{(k)} + s_k c_{k2} \mathbf{K}_{usi}^{(k)} + s_k^2 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} \right) \quad (6)$$

onde $\mathbf{K}_{uu}^e = \mathbf{K}_{ub}^e + \mathbf{K}_{us}^e$, $s_k = \sin(\theta_k)$, $c_k = \cos(\theta_k)$ e θ_k são os ângulos de direções das fibras das k camadas.

Para se obter as matrizes de massa e rigidezes globais, técnicas clássicas de montagem por elementos finitos foram utilizadas conhecendo-se a conectividade dos nós. Assim, a seguinte equação do movimento, na forma matricial, foi obtida.

$$\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (7)$$

onde $\mathbf{M}_{uu}$ e $\mathbf{K}_{uu}$ são as matrizes globais de massa e rigidezes elementares, respectivamente, $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de graus de liberdade globais e $\mathbf{f}(t)$ é o vetor dos esforços generalizados.

2.2. Problema eletromecânico

Na modelagem de estruturas compósitas contendo elementos piezelétricos, utilizou-se da Teoria FSDT na aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos e considerou-se os potenciais elétricos distribuídos discretamente ao longo das camadas piezelétricas e aproximados como se segue (Saravanan and Heyliger, 1995; Chee 2000):

$$\Phi_{(k)}(x, y, z, t) = L_{kd}(z) \Phi_k(x, y, t) + L_{ku}(z) \Phi_{k+1}(x, y, t) \quad (8)$$

onde $\Phi_{(k)}$ é o potencial elétrico da k -ésima camada, Φ_k e Φ_{k+1} são as funções de interpolação no plano, dadas pelo potencial elétrico das interfaces inferior e superior, respectivamente, $L_{kd}(z) = (z_{k+1} - z) / (z_{k+1} - z_k)$ e $L_{ku}(z) = (z - z_k) / (z_{k+1} - z_k)$ são as funções de interpolação transversais para as interfaces inferior e superior, respectivamente.

A matriz elástica-dielétrica-piezelétrica que demonstra o acoplamento eletromecânico e as relações entre a tensão mecânica, $\boldsymbol{\sigma}$, deformação mecânica, $\boldsymbol{\varepsilon}$, deslocamento elétrico, $\mathbf{D}$, e o campo elétrico, $\mathbf{E}$, é apresentada a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_t & -\mathbf{e}_t^T \\ \mathbf{e}_t & \boldsymbol{\chi}_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde $\mathbf{e}_t$ são as constantes dielétricas e $\boldsymbol{\chi}_t$ é a matriz de permissividade elétrica, ambas já considerando-se os ângulo de direções das fibras.

Para o sistema eletromecânico, as matrizes de rigidezes elementares são agora obtidas por meio da energia de deformação, envolvendo a contribuição elétrica como dado na sequência (Faria, 2006):

$$U_e = \int_{V_e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV_e \quad (10)$$

Combinando-se as Eqs. (9) e (10) e realizando-se as integrações necessárias, é possível encontrar as matrizes de rigidezes mecânica, elétrica e eletromecânica já parametrizadas em termos das espessuras das camadas e ângulos de

direções das fibras. Como as matrizes mecânicas são dadas pelas mesmas Eqs. (5) e (6), não serão aqui repetidas, apresentando-se apenas as matrizes de rigidezes eletromecânicas e elétricas, respectivamente (Zambolini-Vicente, 2014):

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \frac{1}{t_k} \left(t_k \mathbf{K}_{u\phi}^{00} + t_k c_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{01} + t_k s_k c_k \mathbf{K}_{u\phi}^{02} + t_k s_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{03} + t_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{10} + t_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{11} + t_k^2 s_k c_k \mathbf{K}_{u\phi}^{12} + t_k^2 s_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{13} \right) \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \frac{1}{t_k^2} \left(t_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{00} + t_k c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{01} + t_k s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{02} + t_k s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{03} + t_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{11} + t_k^2 s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{12} + t_k^2 s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{13} + t_k^3 c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{21} + t_k^3 s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{22} + t_k^3 s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{23} \right) \quad (12)$$

A obtenção das matrizes de massa e rigidezes globais se dá por meio de técnicas clássicas de montagem por elementos conhecendo-se a conectividade dos nós. Assim, as seguintes equações do movimento na forma matricial podem ser assim obtidas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\phi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

onde $\mathbf{K}_{u\phi}$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ são as matrizes globais de rigidezes eletromecânica e elétrica, respectivamente, $\mathbf{K}_{\phi u} = \mathbf{K}_{u\phi}^T$, $\boldsymbol{\phi}(t)$ são os potenciais elétricos globais e $\mathbf{q}(t)$ é o vetor de cargas elétricas globais.

2.3. Inclusão do circuito elétrico *shunt* no modelo

A Equação (13) pode ser separada em duas equações do movimento, as quais podem ser representadas no domínio de Fourier, negligenciando-se as condições iniciais, obtendo-se as seguintes equações (Zambolini-Vicente, 2014; Ribeiro, 2015):

$$(\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}) \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_{u\phi} \boldsymbol{\Phi}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U}(\omega) + \mathbf{K}_{\phi\phi} \boldsymbol{\Phi}(\omega) = \mathbf{Q}(\omega) \quad (15)$$

O vetor das cargas elétricas que fluem através do circuito *shunt* é dado por:

$$\mathbf{Q}(\omega) = (1/j\omega) \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi}(\omega) \quad (16)$$

onde $\mathbf{Z}$ é a matriz de impedâncias elétricas e $\mathbf{L}$ permite selecionar dentre os potenciais elétricos independentes, aqueles que correspondem aos eletrodos onde os circuitos *shunt* estão conectados.

Combinando-se as Eqs. (15) e (16), obtém-se:

$$\mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U}(\omega) + \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{\mathbf{Z}^{-1}(\omega)}{j\omega} \mathbf{L} \right) \boldsymbol{\Phi}(\omega) = 0 \quad (17)$$

Neste momento, a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema eletromecânico pode ser obtida combinando-se as Eqs. (17) e (14), apenas em termos dos graus de liberdade mecânicos, como dado na sequência:

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} \right]^{-1} \quad (18)$$

3. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS

As incertezas presentes no modelo eletromecânico determinístico parametrizado, representadas pelas variáveis de projeto que foram fatoradas das matrizes de massa e rigidezes, são, neste momento, tomadas como aleatórias. As variáveis aleatórias foram modeladas como campos estocásticos, $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$ e dentre as famílias de métodos utilizados para discretizar espacialmente um campo estocástico, no qual o tamanho da malha de elementos finitos depende do comprimento de correlação do campo aleatório, utiliza-se neste trabalho os métodos chamados *Series Expansion Methods*, que consistem no acoplamento do desenvolvimento em série do campo aleatório e uma análise espectral para uma seleção

dos termos mais importantes. Dentre os três métodos que fazem parte desta categoria, detalha-se o desenvolvimento proposto por Karhunen-Loève (KL) como detalhado no livro de Ghanem e Spanos (1991). A discretização por KL de um campo aleatório gaussiano homogêneo é apresentada na Eq. (19):

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) f_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{r=1}^M \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) f_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (19)$$

onde $\{\xi_r, r \in N^*\}$ são as variáveis ortogonais de media zero, $f_r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ as funções determinísticas e λ_r os valores escalares, respectivamente, autofunções e autovetores soluções do seguinte problema envolvendo a função de covariância $\int_{\Omega_e} C_{HH}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_r(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 = \lambda_r f_r(\mathbf{x}_2)$, chamada de Integral de Fredholm.

Para a resolução analítica da Integral de Fredholm, existem três tipos comuns de funções de covariância mais utilizados na literatura, a exponencial, a exponencial quadrática e a senoidal (Ghanem e Spanos, 1991). No caso deste trabalho, utiliza-se a função e covariância exponencial, sendo que, como se trata da modelagem de um elemento de placa plana retangular, o problema se torna bidimensional.

Utilizando-se da expansão de KL é possível modelar as matrizes estocásticas elementares de massa e rigidezes do sistema eletromecânico. Observa-se que, pela expansão dada na Eq. (19), as matrizes terão uma parcela determinística e uma estocástica, sendo que, a parcela determinística de cada uma dessas matrizes foi previamente calculada na seção anterior e a parcela estocástica pode ser melhor entendida observando-se a integração da matriz de massa na Eq. (20), onde nota-se uma intervenção direta no processo de integração, encontrando-se as matrizes elementares exatas do sistema (De Lima, Rade e Bouhaddi, 2010; Koroishi et al, 2012).

$$\mathbf{M}_{uu}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \rho_k \mathbf{N}_u^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N}_u d\Omega_e = \mathbf{M}_{uu}^e + \mathbf{M}_r^e(\theta) \quad (20)$$

As matrizes estocásticas de rigidezes elementares do sistema podem ser obtidas de forma semelhante ao apresentado na Eq. (20), resultando nas matrizes elementares estocásticas de rigidezes mecânica, $\mathbf{K}_{uu}^e(\theta)$, eletromecânica, $\mathbf{K}_{u\phi}^e(\theta)$, e elétrica, $\mathbf{K}_{\phi\phi}^e(\theta)$.

De posse das matrizes elementares estocásticas de massa e rigidezes, pode-se obter as matrizes estocásticas globais em suas formas matriciais via emprego de procedimentos clássicos de montagem por elementos finitos conhecendo-se a conectividade dos nós, as quais são dadas por: $\mathbf{M}_{uu}(\theta)$, matriz de massa global estocástica, $\mathbf{K}_{uu}(\theta)$, $\mathbf{K}_{u\phi}(\theta)$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}(\theta)$, matrizes de rigidezes globais estocásticas, mecânica, eletromecânica e elétrica, respectivamente.

A resposta em frequência do sistema eletromecânico estocástico acoplado de circuito elétrico *shunt* pode então ser dada como na Eq. (21):

$$\mathbf{H}(\omega, \theta) = \left[\mathbf{K}_{uu}(\theta) - \mathbf{K}_{u\phi}(\theta) \left(\mathbf{K}_{\phi\phi}(\theta) - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega, \theta) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}(\theta) \right]^{-1} \quad (21)$$

4. SIMULAÇÕES

Simulações foram realizadas com uma viga engastada livre de material compósito contendo um elemento piezelétrico acoplado a um circuito *shunt* como ilustrado na Fig. (1a). Nesta figura são apresentadas as características geométricas do sistema a ser investigado e a malha de elementos finitos, composta por seis elementos finitos. As dimensões são dadas em metros. A viga tem um comprimento total de $0,306m$, sendo todas as camadas de mesma espessura, $0,002m$, incluindo o elemento piezelétrico e, também a mesma largura, $0,0255m$. A configuração $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ foi investigada para as direções das fibras do compósito.

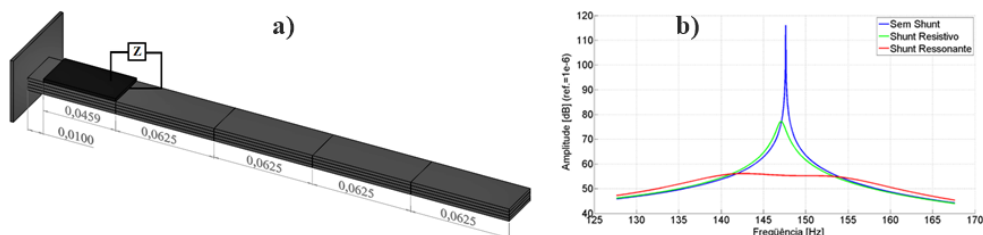


Figura 1: a) Viga compósita engastada livre contendo PZT acoplado de circuito elétrico *shunt*; b) Funções de resposta em frequência determinísticas para primeiro modo de vibração da estrutura.

As primeiras quatro camadas da estrutura apresentada na Fig. (1a) são de material compósito com densidade $\rho = 1566 \text{ Kg/m}^3$ e, a última camada de PZT (Lead Zirconate Titanate), com densidade $\rho = 7700 \text{ Kg/m}^3$.

A Tabela (1) apresenta as propriedades mecânicas do material compósito e PZT onde G e E, que são os Módulos de Cisalhamento e Young, respectivamente, foram multiplicados por um fator complexo, $\beta = 5 \times 10^{-8}$, de forma a refletir o amortecimento inerente a estrutura. Na sequência, a Tabela (2) apresenta as propriedades elétricas e eletromecânicas do PZT.

Tabela 1: Propriedades mecânicas.

Material	$E_1(\text{Pa})$	$E_2(\text{Pa})$	$E_3(\text{Pa})$	$G_{12}(\text{Pa})$	$G_{13}(\text{Pa})$	$G_{23}(\text{Pa})$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
Composite	$1,72 \times 10^{11}$	$6,89 \times 10^9$	E_2	$3,45 \times 10^9$	G_{12}	$1,38 \times 10^9$	0,25	0,25	0,30
PZT - G1195	$6,90 \times 10^{10}$	E_1	E_1	$2,59 \times 10^{10}$	G_{12}	G_{12}	0,33	0,33	0,33

Tabela 2: Propriedades elétricas e eletromecânicas do PZT.

Material	$e_{15}(\text{C/m}^2)$	$e_{24}(\text{C/m}^2)$	$e_{31}(\text{C/m}^2)$	$e_{32}(\text{C/m}^2)$	$e_{33}(\text{C/m}^2)$	$\chi_{11}(\text{F/m})$	$\chi_{22}(\text{F/m})$	$\chi_{33}(\text{F/m})$
PZT - G1195	0,00	0,00	-18,30	-9,01	-9,01	$1,59 \times 10^8$	χ_{11}	χ_{11}

Em trabalhos anteriores foi então possível observar, pela Fig. (1b) a superioridade do circuito *shunt* ressonante no amortecimento dos níveis de vibrações. Mais detalhes sobre como foi realizada a simulação determinística do problema podem ser encontrados no trabalho de Ribeiro (2015).

As simulações estocásticas foram realizadas utilizando-se do circuito *shunt* ressonante no amortecimento de vibrações, cujos valores dos parâmetros foram calculados como sendo ótimos no trabalho de Hagood e von Flotow (1991) e dados por: Resistor, $R = 17016,00 \Omega$ e Indutor, $L = 111,81 \text{ H}$.

Neste momento, os parâmetros de projeto que foram fatorados das matrizes de massa e rigidezes, além dos parâmetros do circuito, resistor e indutor, foram tomados como aleatórios. O primeiro conjunto de simulações foi dado tomando-se apenas a resistência do circuito ressonante como sendo aleatória. Na Figura (2) o valor nominal da resistência sofreu uma dispersão de a) 5%, b) 10%, c) 15% e d) 20%. Os outros parâmetros, como as direções das fibras, espessuras das camadas e o parâmetro indutivo foram considerados determinísticos.

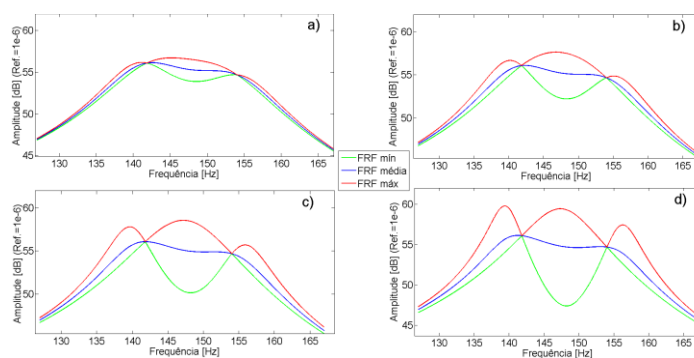


Figura 2: Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* ressonante considerando-se apenas a dispersão do parâmetro resistivo.

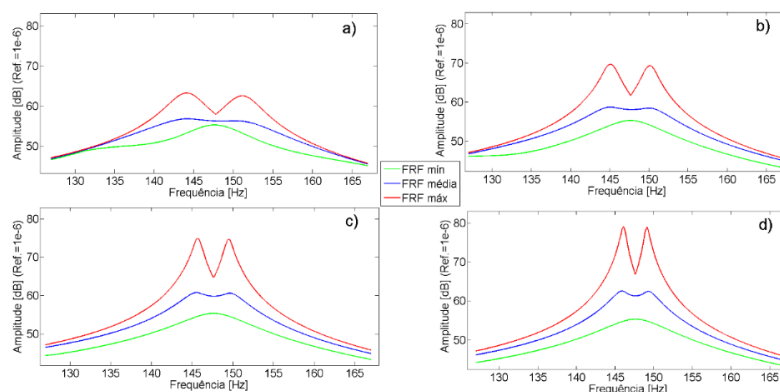


Figura 3: Envelopes das funções de resposta em frequência do sistema estocástico com *shunt* ressonante considerando-se apenas a dispersão do parâmetro indutivo.

Pela Figura (2) nota-se que os envelopes das FRFs aumentaram com o aumento da dispersão do parâmetro resistivo. Foi observado também que a FRF média estocástica permaneceu, em todos os cenários, dentro do envelope. O maior comprimento deste envelope, no que diz respeito a amplitude de vibração foi de $10dB$, no cenário da Fig. (2d) onde o valor nominal da resistência teve uma dispersão de 20% .

O segundo conjunto de simulações foi dado tomando-se apenas a indutância do circuito ressonante como sendo aleatória. Na Figura (3) o valor nominal da indutância sofreu uma dispersão de a) 5%, b) 10%, c) 15% e d) 20%. Os outros parâmetros, como as direções das fibras, espessuras das camadas e o parâmetro resistivo foram considerados determinísticos.

Pela Figura (3) nota-se que os envelopes das FRFs aumentaram com o aumento da dispersão do parâmetro indutivo. Foi observado também que a FRF média estocástica permaneceu, em todos os cenários, dentro do envelope. O maior comprimento deste envelope, no que diz respeito a amplitude de vibração foi de $25dB$, no cenário da Fig. (3d) onde o valor nominal da indutância teve uma dispersão de 20% .

5. CONCLUSÕES

Dentre as variáveis consideradas como sendo aleatórias, nota-se, em trabalhos anteriores de Ribeiro (2015) que as incertezas advindas do circuito elétrico geram uma maior variabilidade das FRFs do sistema estocástico, se comparadas com as incertezas advindas dos parâmetros estruturais, fazendo-se com que haja um maior aumento dos envelopes. E, dentre os parâmetros do circuito ressonante, observa-se que as incertezas provindas do parâmetro indutivo são mais influentes. A pequena relevância dos parâmetros estruturais (espessura das camadas e direções das fibras do compósito) pode ser parcialmente explicada pelas pequenas dimensões da estrutura se comparadas com a ordem de grandeza dos parâmetros do circuito.

Observa-se também que, dependendo do nível de dispersão presente nos parâmetros do circuito, os níveis de vibrações começam a serem atenuados de uma maneira menos eficiente.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos à CAPES, FAPEMIG e CNPq.

7. REFERÊNCIAS

- Chee, C. Y. K., 2000., “Static Shape Control of Laminated Composite Plate Smart Structure using Piezoelectric Actuators”, Tese de Pós-Doutorado.- University of Sydney: Department of Aeronautical Engineering, Sydney, Austrália.
- De Lima, A.M.G., Rade, D.A. and Bouhaddi, N., 2010, “Stochastic Modeling of Surface Viscoelastic Treatments Combined with Model Condensation Procedures”, Shock and Vibration, Vol. 17, pp. 429-444.
- Faria, A. W., 2006, “Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica”, 152f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.
- Ghanem, R.G. e Spanos, P.D., 1991. “Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach”, Springer Verlag.
- Hagood, N. W. e von Flotow, A., 1991, “Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 146, N°2, pp 243-268.
- Koroishi et al, 2012, “Stochastic Modeling of Flexible Rotors”, J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng. Vol.34 no.spe2 Rio de Janeiro.
- Reddy, J. N., 1997, “Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis”, 2.Ed. Florida: CRC Press.
- Ribeiro, L. P., 2015, “Modelagem Estocástica de Estruturas Compósitas Incorporando Circuitos *Shunt* para o Controle Passivo de Vibrações”, 121f., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- Saravanan, D. A. e Heyliger P. R. Coupled Layerwise, 1995, “Analysis of Composite Beams with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators”, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 6, No. 3, pp. 350-363.
- Zambolini-Vicente, B. G. G. L., 2014, “Projeto robusto de circuitos *shunt* para o controle passivo de vibrações de estruturas compostas”, 97f., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.