

IMPLEMENTAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO DE SEGUNDA ESPÉCIE PARA FRONTEIRA IMERSA TÉRMICA

Rafael Romão da Silva Melo, Universidade Federal de Uberlândia, faelromelo@gmail.com

Denise Kinoshita, Universidade Federal de Uberlândia, denikino@hotmail.com

Millena Martins Villar, Universidade Federal de Uberlândia, millena.villar@gmail.com

Aristeu da Silveira Neto, Universidade Federal de Uberlândia, aristeus@ufu.br

Resumo: Este trabalho apresenta a implementação da condição de contorno de segunda espécie para a fronteira imersa térmica, onde a equação da quantidade de movimento e a equação da energia são resolvidas em malha adaptativa. As implementações foram realizadas no código AMR3D, código desenvolvido no MFLab/UFU, o qual utiliza malha adaptativa bloco-estruturada. Para validar a implementação foi resolvido o problema da cavidade retangular com gradientes de temperatura. Os resultados obtidos foram satisfatórios quando comparados com os dados da literatura.

Palavras-chave: Fronteira imersa térmica, Condição de contorno, Malha adaptativa

1. INTRODUÇÃO

Na maioria das aplicações em que existe algum tipo de escoamento, pode existir troca de energia térmica, envolvendo algum processo de reação química ou simplesmente alguma fonte de calor. Quando existe interação entre fluido e parede, o que ocorre na maioria das aplicações em engenharia, a complexidade da solução aumenta, uma vez que o escoamento pode se tornar mais complexo. Assim sendo, existem duas diferentes formas de resolver numericamente escoamentos com troca de energia sobre geometrias, sejam estas simples ou complexas: utilizando malha que se adapta à geometria, ou utilizando campos de força adicionados à equação do momentum, representando uma geometria de maneira indireta, denominada Método da Fronteira Imersa (Silva et al., 2003).

Este trabalho apresenta a implementação da condição de contorno de segunda espécie para a fronteira imersa térmica, onde a equação da quantidade de movimento e a equação da energia são resolvidas em malha adaptativa. As implementações foram realizadas no código AMR3D, código desenvolvido no MFLab/UFU, o qual utiliza malha adaptativa bloco-estruturada. Para validar a implementação foi resolvido o problema da cavidade retangular com gradientes de temperatura. Os resultados obtidos foram satisfatórios quando comparados com os dados da literatura.

2. METODOLOGIA

Nesta seção será apresentada a metodologia utilizada neste trabalho.

2.1. Formulação diferencial para a fluido dinâmica

Para modelagem do escoamento são resolvidas as equações de Navier-Stokes, na forma não-conservativa. O modelo deve obedecer ao balanço de massa, apresentado na Eq. (1), na forma tensorial:

$$\frac{\partial (u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

O modelo ainda resolve a equação da quantidade de movimento para cada componente de velocidade, apresentadas na Eq. (2):

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (2)$$

em que p é a pressão, ρ é a massa específica do fluido, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, u_i é a componente i do vetor velocidade e f_i é a componente i do termo fonte, onde no método da fronteira imersa é o vetor campo de força euleriano, através do qual uma geometria complexa pode ser representada.

2.2. Formulação diferencial para a equação da energia

Para modelagem da parte térmica é resolvida a equação de transporte para a temperatura T (Eq. (3)):

$$\frac{\partial (\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} T) = \nabla \cdot (\alpha(\vec{x}, t) \nabla T) + f_{TT}(\vec{x}, t), \quad (3)$$

onde T é a temperatura, $\vec{u}$ é o vetor velocidade, ρ é a massa específica, α é a difusividade térmica e f_{TT} é o termo fonte o qual representará a fronteira imersa com propriedades térmicas em meio ao fluido.

2.3. Formulação para a fronteira imersa dinâmica

A metodologia da fronteira imersa utiliza uma malha independente para definir o corpo em meio fluido. Uma das principais vantagens é poder simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando malha cartesiana para o domínio de fluido, ou domínio euleriano. Neste trabalho é utilizada a multi forçagem direta, proposta por Wang et al. (2008).

O termo de força f_i da equação da quantidade de movimento é o responsável por definir a interface imersa. Para calcular esta força utilizamos uma função distribuição, dada pela Eq. (4):

$$f_i(\vec{x}) = \sum_K \vec{F}(\vec{x}_K) D_{ij}(\vec{x} - \vec{x}_K) \Delta V(\vec{x}_K), \quad (4)$$

sendo $\Delta V(\vec{x}_K)$ o volume do elemento lagrangiano e D_{ij} representa uma função de interpolação / distribuição. Neste trabalho é adotada a função gaussiana, a qual possui forma apresentada na Eq. (5):

$$D_{ij}(\vec{x}_K) = \frac{g[(x_K - x_i)/\Delta] g[(y_K - y_j)/\Delta] g[(z_K - z_i)/\Delta]}{\Delta^3}, \quad (5)$$

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r), & \|r\| < 1 \\ \frac{1}{2} - g_1(2 - \|r\|), & 1 < \|r\| < 2 \\ 0, & \|r\| > 2 \end{cases}, \quad (6)$$

$$g_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8}, \quad (7)$$

sendo Δ o tamanho característico da malha euleriana. Esta função mostra que quanto mais distantes estão os volumes eulerianos do ponto lagrangiano, menor é o valor da força distribuída naqueles pontos. Uma propriedade importante desta função é que ao integrá-la em todo domínio se obtém o valor unitário, significando que a força é distribuída em sua totalidade (Oliveira, 2006).

Por fim $\vec{F}(\vec{x}_K)$ representa a força no ponto lagrangiano, a qual é distribuída no campo euleriano, delimitando assim a fronteira. Assim como em todo o domínio de cálculo a equação da quantidade de movimento é válida em cada ponto lagrangiano, respeitando assim a hipótese do contínuo, uma vez que estes pontos estão presentes no campo euleriano. Assim reescrevendo a Eq. (2) para cada ponto lagrangiano, considerando fluido incompressível e isolando a força obtemos a Eq. 8:

$$F_i(\vec{X}, t) = \rho \frac{\partial(U_i)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(U_j U_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right), \quad (8)$$

sendo que as variáveis maiúsculas representam o domínio lagrangiano.

Partindo desta equação e discretizando o termo temporal em um esquema de segunda ordem obtém-se a Eq. (9):

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (9)$$

onde RHS_i^t o lado direito da equação no tempo t , dado pela Eq. (10):

$$RHS_i^t = \frac{\partial(U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right) \quad (10)$$

Para realizar este método escolhido soma-se e subtrai-se um parâmetro auxiliar U^* no termo temporal, como apresentado na Eq. (11):

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t} - U_i^* + U_i^*}{\Delta t} + RHS_i^t. \quad (11)$$

O passo seguinte é utilizar o princípio da superposição e resolver a equação anterior em duas partes, apresentada nas Eqs. (12) e (13):

$$\frac{U_i^* - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + RHS_i^t = 0, \quad (12)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (13)$$

sendo que $U_i^{t+\Delta t}$ representa a velocidade desejada para a fronteira. Se for uma fronteira estacionária o seu valor é nulo. Se for uma fronteira em movimento o seu valor é igual a velocidade da fronteira. Para o cálculo de U_i^* utilizamos a Eq. (14):

$$U_i^* = \sum_{\Omega} u_i^* D_h(x_i - x_K) h^3, \quad (14)$$

onde D_h é representada por uma função interpolação/distribuição com propriedades de uma função gaussiana, u^* é a velocidade no ponto euleriano e h é o volume lagrangiano.

Resumindo, na multi forçagem direta calcula-se a velocidade no ponto lagrangiano, posteriormente calcula-se a força no ponto lagrangiano, e por fim esta força é distribuída no domínio euleriano. Este procedimento é realizado de maneira iterativa, e o critério de parada é a convergência para um valor de resíduo mínimo desejado, para todos os passos de tempo.

2.4. Formulação para a fronteira imersa térmica

Para a solução da fronteira imersa térmica foi utilizada a mesma ideia utilizada na fronteira imersa para a fluido dinâmica, apresentada anteriormente. A diferença é que ao invés de partir da equação do momentum, parte-se da equação da energia. O termo de força f_{TT} da equação da energia é o responsável por definir a interface térmica imersa. Para calcular esta força utilizamos também utilizamos uma função distribuição, apresentada na Eq. (15):

$$f_{TT}(\vec{x}) = \sum_K \vec{F}_T(\vec{x}_K) D_{ij}(\vec{x} - \vec{x}_K) \Delta V(\vec{x}_K), \quad (15)$$

sendo $\Delta V(\vec{x}_K)$ o volume do elemento lagrangiano e D_{ij} representa uma função de interpolação / distribuição, apresentada anteriormente na Eq. (5) e $\vec{F}_T(\vec{x}_K)$ representa a força no ponto lagrangiano, a qual é distribuída no campo euleriano, representando assim a fronteira térmica.

Para a parte térmica também foi utilizada a multi forçagem direta. Para condição de primeira espécie, ou seja, imposição direta da temperatura na fronteira imersa, a força no ponto lagrangiano é calculada de maneira similar a parte dinâmica, primeiro calculando a temperatura no ponto lagrangiano através da equação de interpolação mostrada na Eq. (16):

$$T^* = \sum_{\Omega} T_E D_h(x_i - x_K) h^3 \quad (16)$$

onde T_E é a temperatura no ponto euleriano e T^* é a temperatura no ponto lagrangiano.

Em seguida é calculada a força no ponto lagrangiano, através da Eq. (17) :

$$F_T(\vec{X}, t) = \rho C_p \frac{\alpha_2 T^{t+\Delta t} - T^*}{\Delta t} \quad (17)$$

sendo $T^{t+\Delta t}$ a temperatura que desejamos aplicar na fronteira.

Então essa força é distribuída através da Eq. (15). Esse processo é feito iterativamente até a convergência da solução. A seguir serão apresentados resultados.

3. RESULTADOS

Para validação da condição de contorno de segunda espécie foi escolhido o problema da cavidade térmica retangular, onde existe uma parede quente e uma parede fria, e o gradiente de temperatura criado dentro desta cavidade gerará o movimento do fluido. O problema é apresentado na Fig. (1), onde é ilustrado as paredes com gradiente de temperatura e a direção da gravidade.

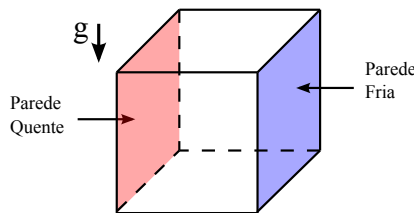


Figura 1: Cavidade térmica.

A Figura (2) mostra a malha euleriana utilizada neste problema. Foram definidos blocos de malha com maior refinamento próximos a fronteira imersa. Ao se distanciar da região de interesse, ou seja, da fronteira imersa, a malha euleriana

é engrossada gradativamente, até atingir o contorno do domínio, onde foi aplicada a condição de contorno ambiente $T_A = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Esta figura também mostra a malha lagrangiana imersa na região de maior refinamento semi-transparente, foi utilizada uma malha com resolução de $1/64$. A cavidade foi modelada com fronteira imersa, sendo uma malha triangular onde foram definidos triângulos de tal forma que o volume atribuído para o ponto lagrangiano (área do triângulo multiplicado por uma altura) seja igual ao volume euleriano onde a cavidade está imersa. Esta altura escolhida para o volume lagrangiano foi mesmo delta da malha euleriana.

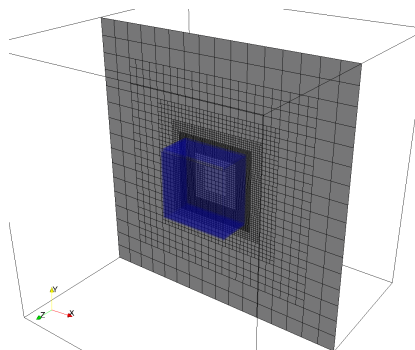


Figura 2: Malha euleriana no plano central normal à z e cavidade formada por elementos lagrangianos.

Para validação foi simulado um tempo total de 200 segundos, a temperatura da parede quente foi de $T_H = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ e da parede fria de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$. As propriedades do fluido foram escolhidas de tal forma que o número de Rayleigh fosse igual a $Ra = 1,0 \cdot 10^3$ e o número de Prandtl igual a $Pr = 0,71$. A força gravitacional foi imposta somente no interior da cavidade e foi utilizado processamento paralelo, sendo que o domínio foi dividido em quatro processos. Para testar a condição de segunda espécie é aplicado fluxo de calor nulo nas quatro paredes, ou seja, é aplicado isolamento térmico.

A Figura (3) apresenta o campo de temperatura juntamente com as linhas de iso contornos de temperatura constante no plano central normal a z . Observa-se que o fluido próximo a parede quente sobe e próximo a parede fria desce, como esperado. Os iso valores de temperatura estão normais as paredes isoladas, como esperado, uma vez que o fluxo nulo implica em derivada da temperatura em relação da normal a parede igual a zero.

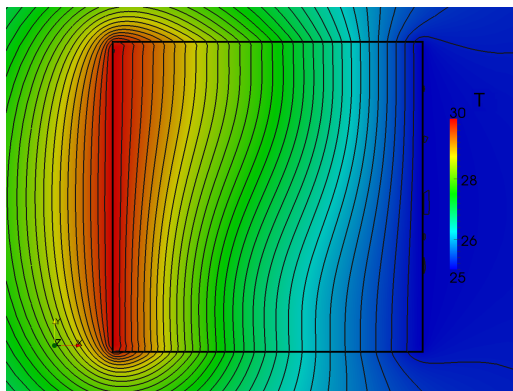


Figura 3: Campo de temperatura utilizando paredes isoladas.

Contudo a figura anterior mostra que os contornos de temperatura na parede isolada próximo a parede quente (parede isolada superior) apresenta uma pequena descontinuidade, estando levemente deslocada da direção normal. Isto corre porque é uma região de junção de dois tipos de condição de contorno diferentes, primeira e segunda espécie. Buscando contornar este problema foi utilizada uma segunda fronteira imersa, para se ter assim uma segunda zona de forçagem, com a finalidade de impor melhor a condição de contorno. Esta segunda cavidade foi criada como a primeira, porém distanciadas de volume euleriano. Nota-se pela Fig. (4) que esta estratégia não foi bem sucedida, uma vez que os contornos não estão mais normais as paredes isoladas, ou seja, o isolamento não está mais sendo aplicado.

De fato zona de forçagem a mais melhorou a aplicação de contorno de primeira espécie nas paredes aquecida e resfriada, porém para a de segunda espécie apresentou uma piora nos resultados. Um segundo teste foi feito distanciando um pouco mais a segunda zona de forçagem das quatro paredes isoladas. Os resultados apresentaram uma boa melhoria, e são apresentados na Fig. (5). Os iso-contornos de temperatura se mantiveram normais até em pontos próximo a junção dos dois tipos de condição de contorno.

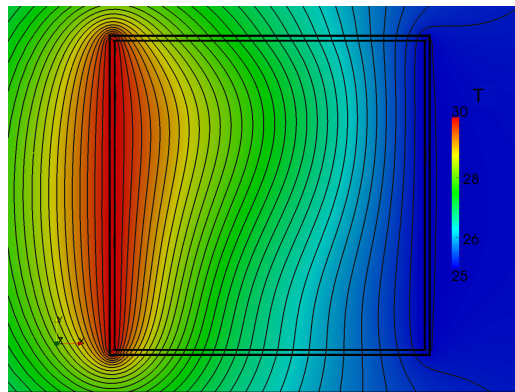


Figura 4: Campo de temperatura utilizando paredes isoladas com fronteira em duas camadas.

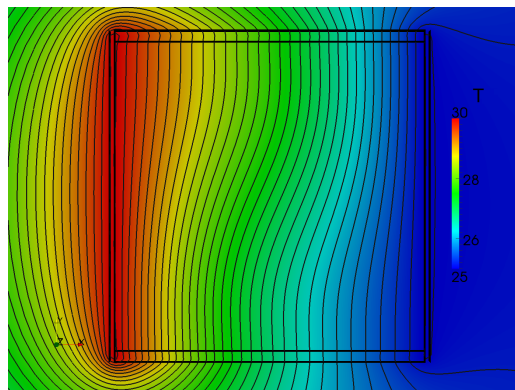


Figura 5: Campo de temperatura utilizando paredes isoladas com fronteiras de duas camadas mais distantes.

A seguir serão apresentados resultados para escoamento com número de Rayleigh $Ra = 1,89 \cdot 10^5$, também com condição de segunda espécie para as paredes intermediárias. Os perfis são comparados com a literatura, sendo comparados com dados numéricos Padilla et al. (2012) e dados experimentais Krane and Jessee (1983). A Figura (6) apresenta o campo de temperatura juntamente com as linhas de iso contornos de temperatura constante no plano central normal a z . Nesta simulação foi utilizada apenas uma zona de forçagem, e como para o caso anterior, os iso contornos não estão alinhados com a normal as paredes isoladas, indicando um mal isolamento térmico.

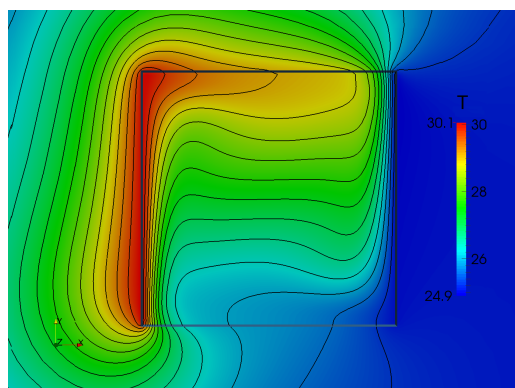


Figura 6: Campo de temperatura utilizando paredes isoladas para $Ra = 1,89 \cdot 10^5$.

A Figura (7) apresenta os perfis de temperatura adimensionalizados no plano central em z . Primeiro é mostrado a temperatura em função de x para os planos em $y = 0,3$ m, $y = 0,5$ m e $y = 0,7$ m. Em seguida é mostrado a temperatura em função de y para o plano $x = 0,5$ m. Os resultados quantitativos mostram que os perfis estão bem abaixo dos apresentados na literatura, confirmando um mal isolamento das paredes.

A Figura (8) também apresenta o campo de temperatura com as linhas de iso contornos de temperatura constante no plano central normal a z , porém agora com mais zonas de forçagem, utilizando a mesma malha apresentada na Fig. (5), no

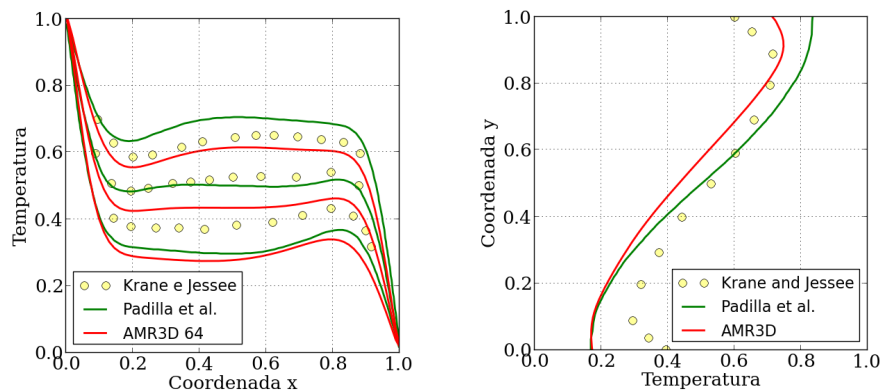


Figura 7: Perfis de temperatura comparados com dados da literatura utilizando uma zona de forçagem.

caso para Rayleigh menor. Nota-se que as iso-térmicas estão mais alinhadas com a normal as paredes isoladas, mostrando que a utilização das zonas de forçagem adicionais aplicam melhor as condições de contorno pela fronteira imersa.

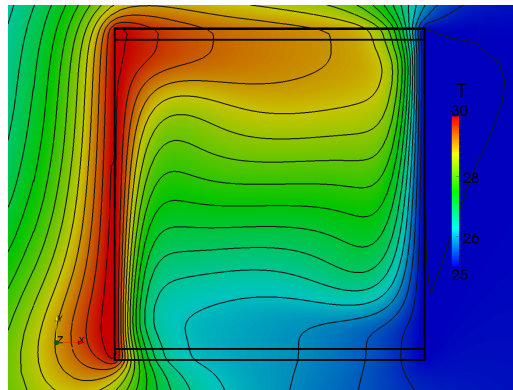


Figura 8: Campo de temperatura utilizando paredes isoladas para $Ra = 1,89 \cdot 10^5$, com fronteiras de duas camadas mais distantes

A Figura (9) mostra os perfis de temperatura no plano central em z , sendo a temperatura em função de x para os planos em $y = 0,3$ m, $y = 0,5$ m e $y = 0,7$ m, e a temperatura em função de y para o plano $x = 0,5$ m. Analisando os perfis obtidos juntamente com os dados da literatura, nota-se que os resultados foram melhores, quando comparados com os resultados obtidos utilizando apenas uma zona de forçagem, indicando quantitativamente que a utilização da metodologia proposta neste trabalho utilizando duas zonas de forçagem está validado com um caso real.

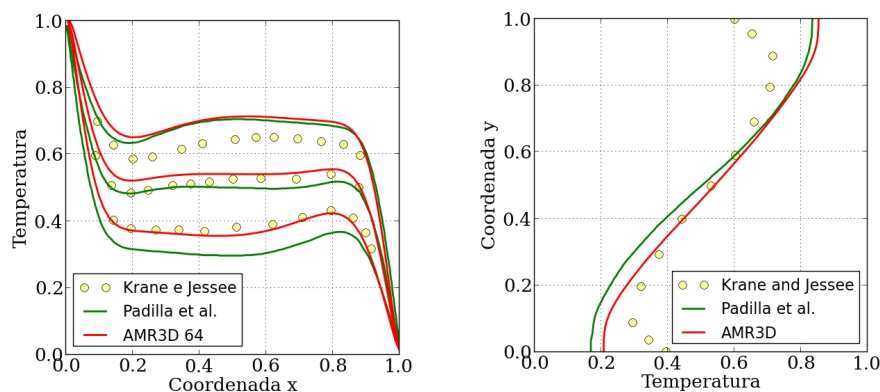


Figura 9: Perfis de temperatura comparados com dados da literatura utilizando duas zonas de forçagem.

A seção seguinte irá apresentar as conclusões.

4. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a implementação da condição de contorno de segunda espécie para a fronteira imersa térmica, onde a equação da quantidade de movimento e a equação da energia são resolvidas em malha adaptativa. As implementações foram realizadas no código AMR3D, código desenvolvido no MFLab/UFU, o qual utiliza malha adaptativa bloco-estruturada. Com relação a validação foi simulado o problema da cavidade retangular modelada com fronteira imersa, onde foi utilizadas paredes com gradientes de temperatura, e isolamento nas demais paredes para testar a segunda espécie. Os resultados obtidos foram satisfatórios quando comparados com os dados da literatura ao se utilizar mais de uma zona de forçagem.

5. AGRADECIMENTOS

À CAPES, CNPq, FAPEMIG e PETROBRAS pelo suporte financeiro.

6. REFERÊNCIAS

- R. J. Krane and J. Jessee. Some detailed field measurements for a natural convection flow in a vertical square enclosure. *Proceedings of 1st Joint Conference at ASME-JSME Thermal Engineering*, pages 323 – 329, 1983.
- J. E. S. Oliveira. *Modelagem matemática para otimização dinâmica de corpos imersos em escoamentos turbulentos*. PhD thesis, Universidade Federal de Uberlândia, 2006.
- E. L. M. Padilla, M. A. S. Lourenco, and A. Silveira-Neto. Natural convection inside cubical cavities: numerical solutions with two boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2012.
- A. L. F. L. E. Silva, A. Silveira-Neto, and J. Damasceno. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 189(2):351 – 370, 2003.
- Z. Wang, J. Fan, and K. Luo. Combined multi direct forcing immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, 2008.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.