

VERIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA EM MALHA ADAPTATIVA BLOCO-ESTRUTURADA

Rafael Romão da Silva Melo, Universidade Federal de Uberlândia, faelromelo@gmail.com

João Marcelo Vedovoto, Universidade Federal de Uberlândia, jmvedovoto@mecanica.ufu.br

Millena Martins Villar, Universidade Federal de Uberlândia, millena.villar@gmail.com

Aristeu da Silveira Neto, Universidade Federal de Uberlândia, aristeus@ufu.br

Resumo: Uma das etapas ao se resolver numericamente uma equação diferencial é a verificação, etapa esta em que a solução numérica é comparada com a solução analítica. Para isto são escolhidas funções analíticas para as variáveis resolvidas numericamente, sendo que tais funções são utilizadas nas condições inicial e de contorno na solução numérica, e então é computado o erro entre a solução numérica obtida e a solução analítica advinda das funções escolhidas. Neste trabalho é apresentada a verificação das equações de Navier-Stokes, utilizando uma formulação totalmente implícita, onde são implicitados todos os termos da equação (temporal, advectivo e difusivo) na solução do sistema linear. A implementação da equação foi realizada no código AMR3D, o qual utiliza malha cartesiana adaptativa bloco-estruturada. Os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que a queda do erro com o refinamento da malha foi de ordem dois, como esperado.

Palavras-chave: Verificação numérica, Equação de Navier-Stokes, Formulação implícita, Malha adaptativa

1. INTRODUÇÃO

Na resolução de equações diferenciais é possível utilizar métodos matemáticos para encontrar a solução analítica desejada. Porém dependendo da complexidade da equação, a solução analítica é de difícil obtenção, se não impossível dependendo da quantidade de variáveis envolvidas. Para estes casos é possível utilizar uma solução numérica.

Primeiramente, para obter a solução numérica de uma determinada equação é realizada a discretização, ou seja, o domínio de solução que é contínuo é dividido em pontos ou volumes, se tornando discreto (Fortuna, 2000). Neste processo a equação é aplicada em ponto ou volume discreto, sendo que as derivadas são transformadas em diferenças, e as integrais são transformadas em somatórios. Para fechamento a solução é necessário fornecer as condições inicial e de contorno para o domínio de solução. Após a discretização, estas equações são implementadas em um código ou ferramenta computacional.

A próxima etapa na solução numérica é a verificação, etapa esta em que a solução numérica é comparada com a solução analítica. Para isto são escolhidas funções analíticas para as variáveis presentes nas equações resolvidas numericamente, sendo que tais funções são utilizadas nas condições inicial e de contorno da solução numérica, e então é computado o erro entre a solução numérica obtida e a solução analítica advinda das funções escolhidas.

Neste trabalho foram discretizadas e implementadas as equações de Navier-Stokes, na forma conservativa e não conservativa, no código AMR3DP, código desenvolvido no MFLab, o qual utiliza malha adaptativa bloco-estruturada. Foi utilizado o método da projeção proposta por Choi and Moin (1994), e o método de solução totalmente implícita apresentado no trabalho de Vedovoto (2011) para solução do transporte da quantidade de movimento. Para a discretização foi utilizada a técnica dos volumes finitos.

Toda a modelagem utilizada e implementada será apresentada, e na seção de resultados serão apresentados testes realizados para a verificação.

2. METODOLOGIA

Nesta seção serão apresentadas as modelagens matemáticas e numéricas utilizadas neste trabalho.

2.1. Modelagem matemática

Para modelagem do escoamento são discretizadas e implementadas as equações de Navier-Stokes, nas formas conservativa e não-conservativa. O modelo deve obedecer ao balanço de massa, apresentado abaixo nas duas formas tensorialmente, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial (u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

O modelo ainda resolve uma equação do momentum para cada componente de velocidade, apresentadas abaixo na forma tensorial, nas duas formas, conservativa:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + f_i, \quad (3)$$

e não conservativa:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (4)$$

em que p é a pressão, ρ é a massa específica do fluido, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, u_i é a componente i do vetor velocidade e f_i é a componente i do termo fonte genérico.

2.2. Modelagem numérica

A maior dificuldade na solução destas equações é o acoplamento pressão-velocidade, sendo que a velocidade depende da pressão e a pressão depende da velocidade. No presente trabalho é utilizado o método do Passo Fracionado, proposto por Choi e Moin (1994), e o método de solução totalmente implícita apresentado no trabalho de Vedovoto et al. (2011). Este método é composto de dois passos: um preditor, onde a velocidade é estimada e resolvida implicitamente, e um corretor, onde a velocidade é corrigida a partir da flutuação da pressão, que é calculada no passo de tempo atual. Para a solução das velocidades estimadas são implicitados todos os termos da equação, ou seja, o termo temporal, o termo difusivo e o termo advectivo.

No código AMR3D é utilizada malha bloco estruturada com refinamento local, permitindo a solução das equações de Navier-Stokes através de uma hierarquia de malhas cartesianas, devidamente agrupadas (Villar, 2007). A malha de um nível mais fino é alinhada com o nível grosseiro superior, e este refinamento é criado em regiões onde é necessária uma maior acurácia numérica, como por exemplo, em regiões de instabilidades no escoamento, em regiões de grande intensidade turbulenta, próximo a paredes, na interface entre dois fluidos, em regiões com partículas, entre outras situações. A Figura (1) apresenta um exemplo deste refinamento local adaptativo, onde o refinamento é criado em torno uma curva genérica.

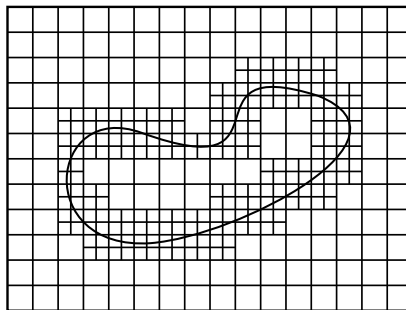


Figura 1: Malha cartesiana refinada localmente em pontos próximos a uma curva genérica.

Para resolver os sistemas lineares provenientes da discretização, o método que foi implementado no código AMR3D é o Multigrid, tanto para solução das velocidades, quanto para a solução da correção da pressão. O método Multigrid é um algoritmo iterativo para solução de sistemas lineares usando hierarquia de malhas. O método Multigrid é dividido em duas idéias (Trottenberg and Schuller, 2001). A primeira é baseada na suavização do erro de métodos iterativos clássicos para a solução de sistemas lineares, como por exemplo o método de Gauss Siedel. A segunda afirma que o erro suavizado em uma malha em certo nível pode ser aproximado em uma malha mais grosseira. É preferível utilizar o multigrid não apenas com uma malha mais grossa, mas sim com uma sequência de malhas, para que as componentes do erro de longos comprimentos de onda possam ser suavizadas com eficiência. Como o código utilizado apresenta um refinamento local, o método Multigrid é denominado Método Multigrid-Multinível, onde existem dois grupos de malhas, que podem ser denominados níveis virtuais e níveis físicos. Os níveis virtuais formam a malha base, e são divididos em uma quantidade N_{virt} para aplicar o ciclo do método multigrid. Os níveis físicos formam os blocos de refinamento local, e também podem ser divididos em N_{fis} níveis, sendo que o método multigrid percorre os níveis físicos também. A Figura (2) ilustra esquematicamente os níveis físicos e virtuais.

Conhecidos os níveis físicos e virtuais de uma determinada malha em um dado tempo físico, aplica-se então o método multigrid, como é utilizado em uma malha uniforme. Na seção seguinte serão apresentados os resultados.

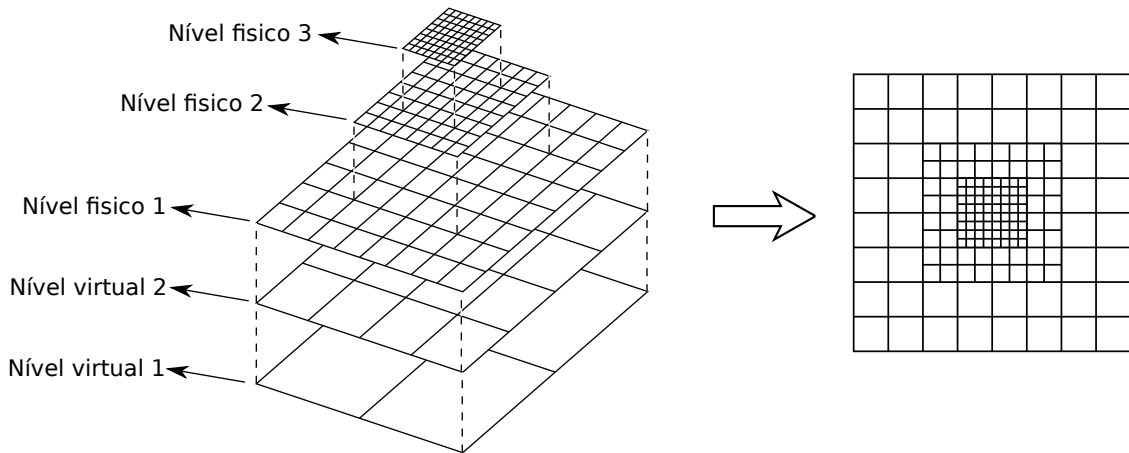


Figura 2: Esquema ilustrativo mostrando os níveis virtuais e níveis físicos.

3. RESULTADOS

Para a verificação das equações de Navier-Stokes foram escolhidas funções analíticas para as três componentes de velocidade, para pressão e para as propriedades do fluido, sendo elas a massa específica ρ e a viscosidade μ . Todas estas variáveis variam no espaço e no tempo, podendo assim verificar a discretização espacial e temporal de tais implementações.

As Equações (5), (6) e (7) representam, respectivamente, a solução exata para as componentes de velocidade nas direções x , y e z . A Equação (8) representa a solução exata para a pressão, e as Eqs. (9) e (10) a solução para a massa específica e viscosidade, respectivamente.

$$u_{ex} = (\sin(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2 \quad (5)$$

$$v_{ex} = -(\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2 \quad (6)$$

$$w_{ex} = w_1 \left(\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t) \right)^2 / w_3 + w_2 \left(\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t) \right)^2 / w_3 \quad (7)$$

$$P_{ex} = \cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t) \quad (8)$$

$$\rho_{ex} = k1_\rho + k2_\rho (\sin(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2 \quad (9)$$

$$\mu_{ex} = k1_\mu + k2_\mu (\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2 \quad (10)$$

Estas soluções escolhidas não satisfazem as equações de Navier-Stokes. Então para fins de verificação são calculados termos fontes adicionais para cada uma das componentes de velocidade, através da Eq. (11), na forma tensorial, para a formulação conservativa:

$$f_i = \frac{\partial(\rho_{ex}u_{ex_i})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{ex}u_{ex_j}u_{ex_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{ex}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ex} \left(\frac{\partial u_{ex_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{ex_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{ex} \frac{\partial u_{ex_k}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (11)$$

e não conservativa, pela Eq. (12):

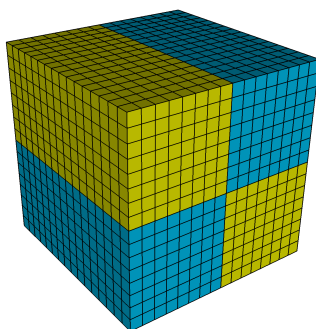
$$f_i = \rho_{ex} \frac{\partial u_{ex_i}}{\partial t} + \rho_{ex} u_{ex_j} \frac{\partial u_{ex_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{ex}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ex} \left(\frac{\partial u_{ex_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{ex_j}}{\partial x_i} \right) \right), \quad (12)$$

onde i varia de 1 a 3, correspondendo as três componentes. Desta forma as soluções propostas irão satisfazer tais equações.

As constantes escolhidas para as soluções exatas foram $w_1 = w_2 = w_3 = 2$, $w_4 = 1$, $c_{\rho 1} = 1$, $c_{\rho 2} = 0,1$, $c_{\mu 1} = 0,1$ e $c_{\mu 2} = 0,02$.

O primeiro teste foi utilizando uma malha uniforme, com um domínio cúbico de $1 \times 1 \times 1$. Foram testados cinco níveis de refinamento, partindo de uma malha com 8^3 volumes, passando pelas malhas com 16^3 , 32^3 e 64^3 volumes, até uma malha mais fina com 128^3 volumes. A Figura (3) apresenta um exemplo da malha utilizada, com 16^3 volumes. Foram realizados os testes particionando o domínio em quatro processadores, como também mostrado na figura.

Para o cálculo do erro foi utilizada a norma L_2 , dada pela Eq. (13):


 Figura 3: Malha uniforme com 16^3 volumes divididos em quatro processos.

$$L_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{N_z} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \|sol_{exai,j,k} - sol_{numi,j,k}\|^2 \Delta x \Delta y \Delta z}, \quad (13)$$

onde Δx , Δy e Δz representam o comprimento do volume nas direções x , y e z , respectivamente, sol_{ex} é a solução exata e sol_{num} é a solução numérica da variável analisada.

A Tabela (1) apresenta a norma L_2 e a taxa de queda do erro, para as três componentes do vetor velocidade e pressão, para os cinco níveis de refinamento, para a forma conservativa.

 Tabela 1: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha uniforme e formulação conservativa.

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,7777E-02	**	8,3428E-02	**	1,6440E-01	**	1,3405E-01	**
16^3	2,0595E-02	4,26	1,9759E-02	4,22	3,8817E-02	4,24	5,0649E-02	2,65
32^3	5,0699E-03	4,06	4,8691E-03	4,06	9,5552E-03	4,06	1,7810E-02	2,84
64^3	1,2643E-03	4,01	1,2115E-03	4,02	2,3739E-03	4,03	5,5579E-03	3,20
128^3	3,1526E-04	4,01	3,0215E-04	4,01	5,8865E-04	4,03	1,6269E-03	3,42

Como foi utilizada uma aproximação de segunda ordem para a derivada temporal, e diferenças centradas de segunda ordem para as derivadas espaciais, era de se esperar uma queda do erro de segunda ordem ao refinar a malha, ou seja, ao duplicar a malha em cada direção espacial o erro deve cair quatro vezes para as componentes de velocidade, o que foi obtido conforme apresentado na Tab. (1). A pressão foi derivada utilizando uma aproximação de primeira ordem, então o erro deveria cair aproximadamente duas vezes, o que também foi observado.

A Tabela (2) apresenta também a norma L_2 utilizando malha uniforme e a formulação não conservativa. Nota-se que ocorre uma pequena variação no valor da norma, quando comparada com a forma conservativa, para cada uma das variáveis e cada uma das malhas, como era esperado pelo fato do fluxo (ρu_j) ser avaliado de maneira diferente. Contudo o valor esperado para a queda do erro, tanto para as velocidades quanto para a pressão foi atingido.

 Tabela 2: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha uniforme e formulação não conservativa.

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,7879E-02	**	8,5253E-02	**	1,6641E-01	**	1,4112E-01	**
16^3	2,0455E-02	4,30	1,9995E-02	4,26	3,8960E-02	4,27	5,2704E-02	2,68
32^3	5,0331E-03	4,06	4,8976E-03	4,08	9,5649E-03	4,07	1,8174E-02	2,90
64^3	1,2557E-03	4,01	1,2076E-03	4,06	2,3681E-03	4,04	5,6396E-03	3,22
128^3	3,1345E-04	4,01	2,9564E-04	4,08	5,8322E-04	4,06	1,6444E-03	3,43

Uma vez verificadas as equações para uma malha uniforme, é necessário verificar as mesmas para uma malha multinível. A Figura (4) apresenta um exemplo da malha multinível utilizada, onde o nível base (malha mais grosseira) possui 16^3 volumes. A mesma possui dois níveis físicos e a malha base variou também de 8^3 até 128^3 . Também foi utilizado processamento paralelo, onde a região de cada processador foi especificado com uma cor diferente. A escolhas dos blocos foi feita de tal maneira que houvesse todos os contatos possíveis entre níveis e domínios de outros processos, inclusive condições de contorno com diferentes níveis de refinamento.

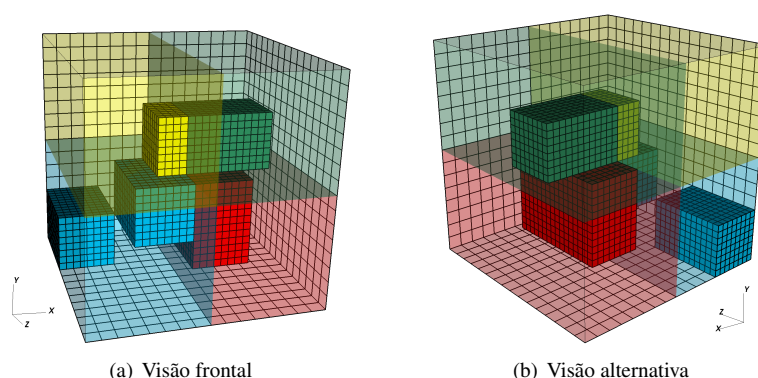


Figura 4: Malha composta utilizada na verificação.

A Tabela (3) apresenta a norma L_2 e a taxa de queda do erro, para as três componentes do vetor velocidade e pressão, todos níveis de refinamento, utilizando a malha composta e formulação conservativa. Observa-se que foi obtida uma boa convergência, tanto para as velocidades quanto para a pressão.

 Tabela 3: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha composta e formulação conservativa.

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,3565E-02	**	8,0274E-02	**	1,5168E-01	**	1,6799E-01	**
16^3	1,9288E-02	4,33	1,8577E-02	4,32	3,5323E-02	4,29	5,7025E-02	2,95
32^3	4,7369E-03	4,07	4,5715E-03	4,06	8,6959E-03	4,06	1,9390E-02	2,94
64^3	1,1781E-03	4,02	1,1367E-03	4,02	2,1575E-03	4,03	6,0990E-03	3,18
128^3	2,9267E-04	4,03	2,8195E-04	4,03	5,3248E-04	4,05	1,8363E-03	3,32

Por fim, a Tab. (4) apresenta a norma L_2 e a taxa de queda do erro utilizando a malha composta e formulação não conservativa. A taxa da queda do erro também foi como esperado, para todas as variáveis.

 Tabela 4: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha composta e formulação não conservativa.

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,3578E-02	**	8,1861E-02	**	1,5366E-01	**	1,7370E-01	**
16^3	1,9148E-02	4,36	1,8785E-02	4,36	3,5484E-02	4,33	5,8574E-02	2,97
32^3	4,7040E-03	4,07	4,6075E-03	4,08	8,7227E-03	4,07	1,9680E-02	2,98
64^3	1,1707E-03	4,02	1,1411E-03	4,04	2,1609E-03	4,04	6,1609E-03	3,19
128^3	2,9092E-04	4,02	2,8086E-04	4,06	5,3182E-04	4,06	1,8517E-03	3,33

4. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou com detalhes as modelagens matemática e numérica implementadas no código AMR3DP. Foi realizada a verificação do código para diversos casos, e em todos os testes foi obtida a ordem de convergência esperada para o tipo de discretização utilizado, diferenças centradas.

5. AGRADECIMENTOS

À CAPES, CNPq, FAPEMIG e PETROBRAS pelo suporte financeiro.

6. REFERÊNCIAS

- H. Choi and P. Moin. Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow. *Journal of Computational Physics*, 113(1):1 – 4, 1994. ISSN 0021-9991. doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1994.1112>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999184711120>.
- A. O. Fortuna. *Técnicas Computacionais Para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. EDUSP, 2000.
- C. W. O. U. Trottenberg and A. Schuller. *Multigrid*. San Diego, CA, USA: Academic Press, 2001.

J. M. Vedovoto. *Mathematical and Numerical Modeling of Turbulent Reactive Flows using a Hybrid LES / PDF Methodology*. PhD thesis, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.

M. M. Villar. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. PhD thesis, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.