

MÉTODO DE FOURIER-GEGBAUER NA ELIMINAÇÃO DO FENÔMENO DE GIBBS

Erica Morais Arruda, Universidade Federal de Uberlândia, ericamoraissarruda@gmail.com
Aristeu da Silveira Neto, Universidade Federal de Uberlândia, aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo. Neste trabalho propomos uma resolução para o fenômeno de Gibbs utilizando o pós-processamento em polinômios de Gegenbauer. O método Fourier-Gegenbauer emprega os coeficientes de Fourier para obter os coeficientes de uma expansão em polinômios de Gegenbauer que representa com acurácia espectral a função dada. Os problemas testes adotados foram a função dente de serra e a equação de Burgers. Em ambas as funções ocorrem oscilações espúrias próximas aos contornos devido as descontinuidades quando aplicada a FFT. Aplicando a metodologia proposta pode-se verificar graficamente que as oscilações foram eliminadas. Foi realizado também uma análise dos erros (norma L_2 e norma L_∞). As análises dos erros mostraram diminuições significativas quando comparados aos erros obtidos com a FFT mostrando que o método de Fourier-Gegenbauer apresenta-se como nova proposta na eliminação do fenômeno de Gibbs.

Palavras chave: fenômeno de Gibbs, polinômios de Gegenbauer, coeficientes de Fourier

1. INTRODUÇÃO

A solução de equações diferenciais nem sempre pode ser obtida em forma fechada. Em geral, faz-se necessário utilizar métodos numéricos que tornem o problema solúvel computacionalmente (Abuelma'atti, 1994). O método numérico escolhido na resolução do problema deve apresentar rápida convergência, consistência, estabilidade e baixo custo computacional. Respondendo positivamente a todos esses quesitos, encontra-se os métodos espectrais em particular o Método Espectral de Fourier (Briggs, 1995).

Nos problemas representados por funções não-periódicas ou descontínuas, não recomenda-se o emprego da FFT devido a presença de oscilações espúrias próximas ao contorno - o Fenômeno de Gibbs (Gelb, 1997).

O fenômeno de Gibbs caracteriza-se pela presença de oscilações espúrias próximo a pontos de descontinuidade da função a ser aproximada pela série de Fourier. Ao aumentarmos o número de termos da expansão, observa-se que tais oscilações tornam-se cada vez mais próximas do ponto de descontinuidade, mas não diminuem de intensidade.

Para resolver este problema, Gottlieb et al (1992) propuseram o método de Fourier-Gegenbauer, que elimina o fenômeno de Gibbs. O método utiliza séries de Fourier e um resultado fundamental que possibilita re-expandir a aproximação em polinômios de Gegenbauer.

As metodologias investigadas neste trabalho constroem aproximações numéricas para as soluções das equações de Burgers. Estas equações tem grande importância numérica pois objetiva-se posteriormente aplicar a metodologia de Fourier-Gegenbauer nas equações Navier-Stokes.

2. METODOLOGIA

2.1 O Método de Fourier Gegenbauer

Considere uma função analítica mas não periódica $f(x)$ definida em $x \in [-1,1]$. A função tem descontinuidades nos contornos $x = \pm 1$. Os coeficientes de Fourier são dados por:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{ik\pi x} dx \quad (1)$$

Assumimos que os $2N + 1$ coeficientes de Fourier $\hat{f}(x)$ são dados. Objetiva-se recuperar a função $f(x)$ em $x \in [-1,1]$ com acurácia espectral na norma do máximo. A série de Fourier truncada para as funções descontínuas em $f(x)$:

$$f_N = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(x) e^{ik\pi x} \quad (2)$$

converge lentamente, com o erro da ordem de $\frac{1}{N}$ dentro do intervalo, e exibe oscilações espúrias perto dos contornos $x = 1$. Este fenômeno é conhecido como fenômeno de Gibbs. Logo não há convergência na norma do máximo. A ideia principal proposta por Gottlieb e co-autores (1992) consiste em re-expandir a série dada acima em uma série de Gegenbauer convergente.

A representação da função f em uma série por polinômios de Gegenbauer é denotada por :

$$\hat{f}^\lambda = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{f}^\lambda(l) C_l^\lambda(x) \quad (3)$$

onde $\hat{f}$ são os coeficientes de Gegenbauer definidos por

$$\hat{f}^\lambda(l) = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} f(x) C_l^\lambda(x) dx \quad (4)$$

O fator de normalização h_l^λ é dado por:

$$h_l^\lambda = \pi^{1/2} C_l^\lambda \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(l+1/2)} \quad (5)$$

Podemos conseguir uma aproximação para $\hat{f}^\lambda$ que denotamos por:

$$\hat{g}^\lambda(l) = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} f_N(x) C_l^\lambda(x) dx \quad (6)$$

Em suma, a ideia proposta por Gottlieb (1995) é recuperar f , com acurácia espectral na norma do máximo, a partir dos conhecidos coeficientes de Fourier. Isto é realizado através de uma expansão em polinômios de Gegenbauer em que os coeficientes são obtidos dos coeficientes de Fourier.

2.2 Metodologia Proposta

A metodologia utilizada consiste:

1. Avaliar a função no intervalo de interesse
2. Calcular os coeficientes de Fourier;
3. Calcular os coeficientes de Gegenbauer, a partir dos coeficientes de Fourier;
4. Avaliar se a sequência de aproximações obtidas converge a função a ser aproximada;
5. Avaliar se a sequência de aproximações converge a taxa **desejada**.

3. RESULTADOS EM FUNÇÕES DESCONTÍNUAS

3.1 Função dente de serra

Para ilustrar o fenômeno de Gibbs, usamos a função $f(x) = x$ no domínio $\Phi = [-1; 1]$ apresentando descontinuidade em -1 e 1 . Neste exemplo, apresenta oscilações espúrias próximo aos contornos quando se utiliza a FFT. Estas oscilações são removidas aplicando o método de Fourier-Gegenbauer:

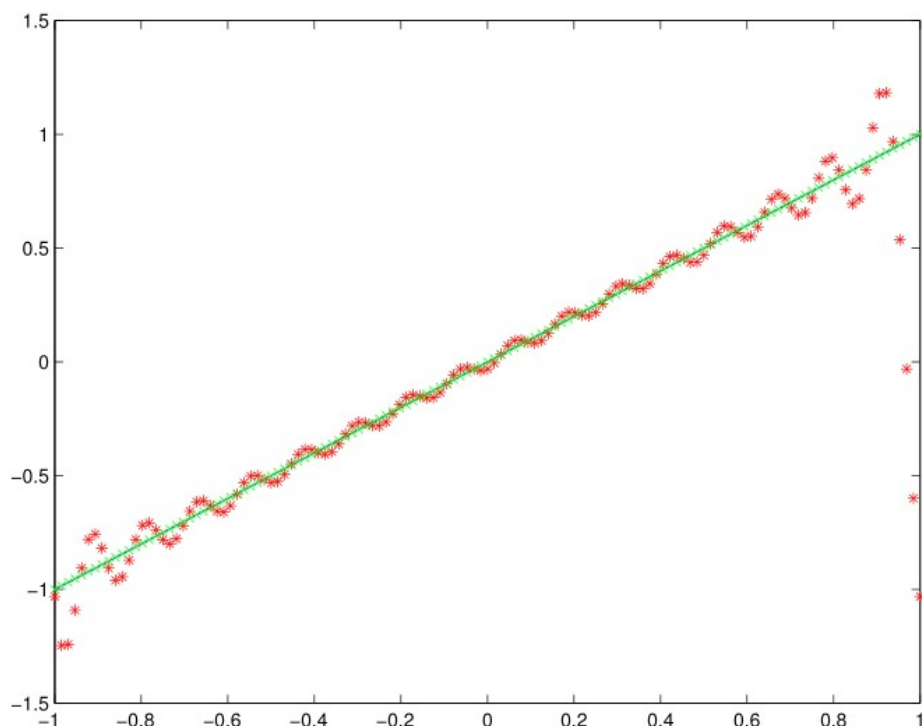


Figura 1. A linha contínua apresenta a função exata. (*) é a aproximação pela FFT e (+) é o a aproximação por Fourier-Gegenbauer.

Tabela 1. Análise do erro em relação ao método de Fourier e Fourier-Gegenbauer com os termos do polinômio de Gegenbauer $\lambda=0,25$

N	L^∞ (Fourier)	L^∞ (Fourier-Gegenbauer)
8	2,10	$1,90 \times 10^{-1}$
16	2,05	$2,7 \times 10^{-2}$
32	2,03	$1,3 \times 10^{-3}$
64	2,01	$9,6 \times 10^{-6}$
128	1,99	$6,7 \times 10^{-10}$

3.2 Equação de Burgers

Consideremos agora a equação de Burgers inviscido, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

com $x \in [-1, 1]$, e condição inicial dada por:

$$u(x, 0) = -\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \quad (8)$$

O gráfico abaixo representa a Equação (7) usando a FFT e o pós processamento com os polinômios de Gegenbauer. A derivada temporal da equação foi resolvida com o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

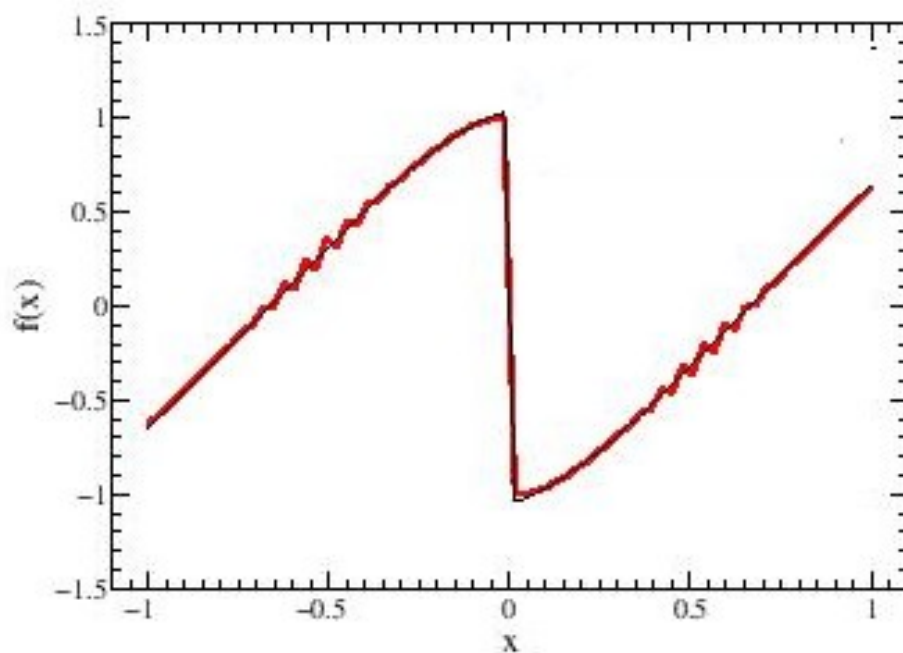


Figura 2. Equação de Burgers – O gráfico em vermelho mostra a equação resolvida pela FFT e o gráfico em preto resolvido pela metodologia de Fourier-Gegenbauer.

Tabela 2. Análise do erro em relação ao método de Fourier e Fourier-Gegenbauer com os termos do polinômio de Gegenbauer $\lambda=0,25$

N	L_2 (Fourier)	L_2 (Fourier-Gegenbauer)
16	$1,20 \times 10^{-2}$	$2,635 \times 10^{-4}$
32	$1,99 \times 10^{-3}$	$3,70 \times 10^{-5}$
64	$2,07 \times 10^{-5}$	$4,89 \times 10^{-7}$
128	$5,71 \times 10^{-9}$	$1,80 \times 10^{-10}$

4. CONCLUSÕES

O método proposto neste trabalho encontra certos obstáculos(numéricos) a obtenção da desejada convergência espectral. Como já sabemos, as séries de Fourier não apresentam boas aproximações para problemas periódicos. No entanto, aplicando o pós processamento por Fourier-Gegenbauer elimina-se as oscilações espúrias associadas ao fenômeno de Gibbs, atingindo assim a convergência espectral. Algumas conclusões acerca deste método podem ser feitas:

- A quantidade de cálculos envolvidos no método de Fourier-Gegenbauer pode ser muito grande para algumas funções
- Essa quantidade de cálculos podem encarecer o programa computacionalmente
- Os erros das funções tiveram diminuição de ordem significativa numericamente.

5. REFERÊNCIAS

Briggs, W. L., Henson, V. E., The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform, SIAM, 1995.

Gelb, A., Gottlieb, D., The resolution of the Gibbs phenomenon for spliced functions in one and two dimensions, Computers Math. Applic., 33(11), 35-58, 1997.

Gottlieb, D., Shu, C.-H., On the Gibbs phenomenon IV: recovering exponential accuracy in a sub-interval from the Gegenbauer partial sum of a piecewise analytic function, Math. Comp., 64, 1081-1095, 1995a.

M.T. Abuelma'atti, "Simple method for calculating Fourier coecients of experimentally obtained wavefonns", EE Proc.-Sci.Meas. Tecbnol., Vol.141, No.3, (1994) 177-178.

W. Cai, David Gottlieb and C. W. Shu, "On one-sided Filters for spectral Fourier approximations of discontinouns functions", SIAM J. Numer. Anal. Vol. 29, No. 4, (1992) 905-916.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPQ e a Petrobrás pelo suporte dado.

7. ABSTRACT

In this paper we propose a resolution to the Gibbs phenomenon using post-processing in Gegenbauer polynomials. The Fourier-Gegenbauer method employs Fourier coefficients to obtain the coefficients of a polynomial expansion in Gegenbauer representing spectral accuracy with the given function. The adopted test problems were the sawtooth function and the equation of Burgers. In both functions próximos spurious oscillations occur due to the discontinuities contours when applied to the FFT. Applying the proposed method can be seen that the oscillations graficamentes been eliminated. It was also conducted an analysis of the errors (L_2 norm and L_∞ norm).The analyzes showed significant decrease of the errors when compared to the errors obtained by the FFT shows that the Fourier-Gegenbauer method presents itself as a new proposal in the elimination of the phenomenon Gibbs.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.