

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS CONTENDO SHUNT RESISTIVO PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

Lorrane Pereira Ribiero, Universidade Federal de Uberlândia, lorrane@mecatronica@gmail.com
Antônio Marcos Gonçalves de Lima, Universidade Federal de Uberlândia, amglima@mecanica.ufu.br

Resumo. *Este trabalho é dedicado à modelagem estocástica por elementos finitos de uma estrutura compósita contendo elemento piezoelétrico acoplado a um circuito elétrico shunt resistivo com vistas a obtenção do controle passivo de vibrações. Faz-se utilização do Método dos Elementos Finitos Estocásticos para modelagem das variáveis aleatórias como campos estocásticos homogêneos Gaussianos e, a discretização destes campos, realizada de acordo com o método de expansão em série de Karhunen-Loève. Intervindo-se diretamente no processo de integração, é então possível encontrar as matrizes exatas de massa e rigidez da estrutura compósita.*

Palavras chave: *modelagem estocástica, materiais compósitos, controle passivo de vibrações, circuitos shunt, propagação de incertezas*

1. INTRODUÇÃO

Pela experiência em engenharia, observa-se que a introdução de incertezas no modelo determinístico tradicional de um sistema se torna cada vez mais necessária uma vez que estas incertezas influenciam diretamente o desempenho, durabilidade, segurança e confiabilidade da estrutura (Koroishi et al, 2012).

Uma ferramenta poderosa em mecânica computacional estocástica é o Método dos Elementos Finitos Estocásticos (SFEM), que é uma extensão da abordagem clássica de elementos finitos para o contexto estocástico, através da resolução de problemas estocásticos (estática e dinâmica) que envolvem parâmetros aleatórios. Portanto, o SFEM permite uma combinação da análise clássica por elementos finitos com análise estatística (De Lima, Rade e Bouhaddi, 2010).

Neste trabalho, atenção é dada à utilização de materiais compósitos, os quais são bastante utilizados na engenharia em detrimento aos convencionais como aço e alumínio, principalmente pela superioridade das propriedades mecânicas que podem ser alcançadas quando se realiza a concepção de uma estrutura compósita. (Faria, 2006). Faz-se também a utilização de piezoelétricos, os quais podem ser utilizados tanto como sensores e atuadores no controle de vibrações de estruturas. O elemento piezoelétrico é utilizado neste trabalho no controle passivo de vibração incorporando para isto um circuito elétrico externo, circuito *shunt*, em seus eletrodos.

A modelagem do problema eletromecânico foi realizada pela combinação de duas teorias: Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos e Teoria das Camadas Equivalentes Discretas para modelagem dos potenciais elétricos. Assim, considera-se o campo de deslocamentos mecânicos concebido de forma condensada em uma única camada equivalente e o potencial elétrico distribuído por camadas (Reddy, 1997).

O modelo eletromecânico determinístico foi concebido de forma parametrizada, de forma que, as principais variáveis incertas, como espessura das camadas e direções das fibras foram fatoradas de matrizes de massa e rigidez. Tanto estas variáveis aleatórias como a resistência circuito resistivo são então modeladas como campos estocásticos homogêneos Gaussianos. Para discretização destes campos estocásticos, faz-se a utilização do método de Expansão em Série de Karhunen-Loève (KL), o qual consiste no acoplamento entre o desenvolvimento em série do campo aleatório com uma análise espectral para seleção dos termos mais importantes da série. Deste modo, intervém-se diretamente no processo de integração obtendo-se as matrizes exatas de massa e rigidez do sistema (Ghanem et Spanos, 1991). Assim, torna-se possível avaliar a variabilidade das respostas em virtude da propagação de incertezas no modelo, utilizando-se da Simulação de Monte Carlo (MCS), combinada com a amostragem por HiperCubo Latino (LHC) como estocástico solver.

2. FORMUAÇÃO DO PROBLEMA ELETROMECAÂNICO DETERMINÍSTICO

A modelagem dos campos de deslocamentos mecânicos foi realizada via teoria FSDT, a qual considera cinco graus de liberdade na definição do seu campo de deslocamentos (Reddy, 1997). Considerou-se também um elemento finito da família Serendipity o qual possui oito nós sem a presença de nó central. Desta forma, cada elemento finito possui um total de oito nós e cada nó possui cinco graus de liberdade, totalizando quarenta graus de liberdade por elemento finito (Faria, 2006). A matriz de massa elementar é obtida por meio da equação da energia cinética, como apresentado na primeira expressão da Eq. (1). Já a matriz de rigidez mecânica elementar é obtida por meio da energia potencial de deformação e dada na segunda expressão da Eq. (1). O detalhamento destes procedimentos pode ser encontrado em Ribeiro (2015).

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \sum_{k=1}^n \int_{V_e} \rho_k \mathbf{N}_u^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{A}_u \mathbf{N}_u dV_e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^3 t_k^i \rho_k \mathbf{M}_{ui}^{(k)}; \quad \mathbf{K}_{uu}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u J dV_e \quad (1)$$

onde ρ_k é a densidade do material da k -ésima camada, $\mathbf{A}_u$ é a matriz contendo a espessura z de cada camada parametrizada, $\mathbf{N}_u$ são as funções de forma, V_e é o volume do elemento finito, $\mathbf{B}_u = \mathbf{D}(z) \mathbf{N}_u(\xi, \eta)$, sendo $\mathbf{D}(z)$ a matriz dos operadores diferenciais, $\mathbf{C}_t$ a matriz de propriedades mecânicas já considerando-se as direções das fibras das camadas do material compósito, $t_k^i = (z_{k+1}^i - z_k^i) = [k^i - (k-1)^i] h_k$ com $i=1...3$ e h_k é a espessura de cada camada k .

Observa-se que a matriz de massa foi modelada de forma parametrizada pela densidade e espessura das camadas. Já a matriz de rigidez mecânica elementar foi parametrizada em termos das espessuras e dos ângulos das fibras das camadas e separada em termos dos efeitos de flexão-membrana, Eq. (2), e cisalhamento, Eq. (3), (Ribeiro, 2015):

$$\mathbf{K}_{ub}^e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n t_k^i \left(c_{k1}^4 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + c_{k2}^2 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + s_k c_{k3}^3 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + {}_4 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + s_k c_{k5} \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} + s_k^2 c_{k6}^2 \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} \right) \quad (2)$$

$$\mathbf{K}_{us}^e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n t_k^i \left(c_{k1}^2 \mathbf{K}_{usi}^{(k)} + s_k c_{k2} \mathbf{K}_{usi}^{(k)} + s_k^2 c_{k3} \mathbf{K}_{ubi}^{(k)} \right) \quad (3)$$

onde $\mathbf{K}_{uu}^e = \mathbf{K}_{ub}^e + \mathbf{K}_{us}^e$, $s_k = \sin(\theta_k)$, $c_k = \cos(\theta_k)$ e θ_k é o ângulo de direção das fibras da k -ésima camada.

Para modelagem de estruturas compósitas laminadas contendo piezelétricos a teoria FSDT é utilizada na aproximação dos deslocamentos mecânicos e os potenciais elétricos distribuídos ao longo das espessuras das camadas. O potencial elétrico da k -ésima camada, Eq. (4), pode ser escrito em termos das funções de forma, $\mathbf{N}_u(\xi, \eta)$, das funções *layerwise* transversais, $\mathbf{L}_k(z)$, e dos potenciais elétricos nodais, ϕ_{ek} (Saravanas e Heyliger, 1995; Faria, 2006):

$$\Phi_{(k)}(\xi, \eta, z, t) = \mathbf{L}_k(z) \mathbf{N}_u(\xi, \eta) \phi_{ek}(t) = \mathbf{N}_\phi(\xi, \eta, z) \phi_{ek}(t) \quad (4)$$

O campo elétrico é dado pelo gradiente negativo do potencial elétrico (Faria, 2006):

$$\mathbf{E}_{(k)}(\xi, \eta, z, t) = -\nabla \Phi_{(k)}(\xi, \eta, t) = -\nabla \mathbf{N}_\phi(\xi, \eta, z) \phi_{ek}(t) = -\mathbf{B}_\phi(\xi, \eta, z) \phi_{ek}(t) \quad (5)$$

As matrizes de rigidezes elementares do sistema eletromecânico são obtidas a partir da equação da energia de deformação do sistema envolvendo a contribuição elétrica, sendo que, as matrizes de rigidezes eletromecânica e elétrica são dadas, respectivamente, na sequência (Faria, 2006):

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\phi) J d\eta d\xi dz; \quad \mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} (-\mathbf{B}_\phi^T \chi_t \mathbf{B}_\phi) J d\eta d\xi dz \quad (6)$$

onde $\mathbf{e}_t$ são as constantes dielétricas e χ_t é a matriz de permissividade elétrica, ambas levando-se em consideração as direções das fibras do compósito laminado.

A matriz de rigidez mecânica parametrizada foi previamente mostrada nas Eqs. (2) e (3). Já as matrizes de rigidezes eletromecânica, Eq. (7), e elétrica, Eq. (8), parametrizadas em termos da espessura das camadas e dos ângulos de direções das fibras do compósito laminado são apresentadas a seguir (Ribeiro, 2015):

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \frac{1}{t_k} \left(t_k \mathbf{K}_{u\phi}^{00} + t_k c_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{01} + t_k s_k c_k \mathbf{K}_{u\phi}^{02} + t_k s_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{03} + t_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{10} + t_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{11} + t_k^2 s_k c_k \mathbf{K}_{u\phi}^{12} + t_k^2 s_k^2 \mathbf{K}_{u\phi}^{13} \right) \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \frac{1}{t_k^2} \left(t_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{00} + t_k c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{01} + t_k s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{02} + t_k s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{03} + t_k^2 c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{11} + t_k^2 s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{12} + t_k^2 s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{13} + t_k^3 c_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{21} + t_k^3 s_k c_k \mathbf{K}_{\phi\phi}^{22} + t_k^3 s_k^2 \mathbf{K}_{\phi\phi}^{23} \right) \quad (8)$$

A obtenção das matrizes de massa e rigidezes globais se dá por meio de procedimentos clássicos de montagem por elementos finitos conhecendo-se a conectividade dos nós. A equação do movimento é então dada na Eq. (9):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\Phi}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\Phi}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde $\mathbf{M}_{uu}$, $\mathbf{K}_{uu}$, $\mathbf{K}_{u\phi}$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ são as matrizes de massa e rigidezes mecânica, eletromecânica e elétrica globais, respectivamente, $\mathbf{K}_{\phi u} = \mathbf{K}_{u\phi}^T$, $\mathbf{u}(t)$ é o vetor contendo os graus de liberdade mecânicos globais, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ é o vetor contendo os potenciais elétricos globais, $\mathbf{f}(t)$ é o vetor dos esforços generalizados e $\mathbf{q}(t)$ é o vetor das cargas elétricas generalizadas.

De posse das equações do movimento a nível global, faz-se a inclusão do circuito elétrico *shunt* no modelo. Assim, a função de resposta em frequência (FRF) do sistema, levando-se em consideração a impedância do circuito, $\mathbf{Z}(\omega)$, é dada na Eq. (10) (Ribeiro, 2015):

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi} \left(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} \right]^{-1} \quad (10)$$

3. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS

As incertezas são agora inseridas no modelo determinístico parametrizado. Os parâmetros de projeto que foram fatorados das matrizes e a resistência do circuito, são agora tomados como aleatórios. As variáveis aleatórias modeladas como campos estocásticos, $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta)$, e a discretização destes campos dada pela expansão em série de Karhunen-Loève (KL).

Pela utilização da expansão de KL é possível encontrar as matrizes aleatórias elementares de massa e rigidezes do sistema da estrutura eletromecânica. Observa-se que as matrizes possuem uma parcela determinística que é calculada como mostrado na seção anterior e uma parcela estocástica que é melhor detalhada nos trabalhos de De Lima, Rade e Bouhaddi (2010), Koroishi et al (2012) e Ribeiro (2015).

$$\mathbf{M}_{uu}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega_e = \mathbf{M}^e + \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega_x d\Omega_y \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_e = \mathbf{K}_{uu}^e + \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_u d\Omega_x d\Omega_y \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_e = \mathbf{K}_{u\phi}^e + \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_x d\Omega_y \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) \mathbf{B}_\phi^T \chi_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_e = \mathbf{K}_{\phi\phi}^e + \sum_{k=1}^n \xi_r^k \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(\mathbf{y}) \int_{\Omega_x} f_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}_\phi^T \chi_t \mathbf{B}_\phi d\Omega_x d\Omega_y \quad (14)$$

onde k é o número de camadas do compósito, $\{\xi_r, r \in N^*\}$ são as variáveis ortogonais de medias zero, as funções determinísticas dadas por $f_i(\mathbf{x})$ e $f_j(\mathbf{y})$ e os valores escalares λ_i e λ_j são, respectivamente, os autovetores e autovalores da função de covariância.

A resposta em frequência do sistema eletromecânico, de posse do circuito elétrico *shunt* e considerando-se as matrizes estocásticas globais é mostrada na Eq. (15):

$$\mathbf{H}(\omega, \theta) = \left[\mathbf{K}_{uu}(\theta) - \mathbf{K}_{u\phi}(\theta) \left(\mathbf{K}_{\phi\phi}(\theta) - \frac{1}{j\omega} \mathbf{Z}^{-1}(\omega, \theta) \right)^{-1} \mathbf{K}_{\phi u}(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}(\theta) \right]^{-1} \quad (15)$$

Escolhendo-se primeiramente as funções de distribuição de probabilidades das variáveis incertas, o problema estocástico dado pela Eq. (15) pode ser resolvido por meio do método MCS combinado com a amostragem por LHC.

4. SIMULAÇÕES

As simulações foram realizadas com uma viga engastada livre de compósito contendo elemento piezelétrico acoplado de circuito *shunt* resistivo como mostrado na figura a seguir. Observa-se pela figura que a viga de $0,306m$ de comprimento foi discretizada em seis elementos finitos. Todas as dimensões são dadas em metros. A estrutura compósita, a qual possui quatro camadas, todas com a mesma espessura, $0,002m$, e também o PZT (Titanato Zirconato de Chumbo), e a mesma largura, $0,0255m$. A configuração $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ foi investigada para a direção das fibras do compósito.

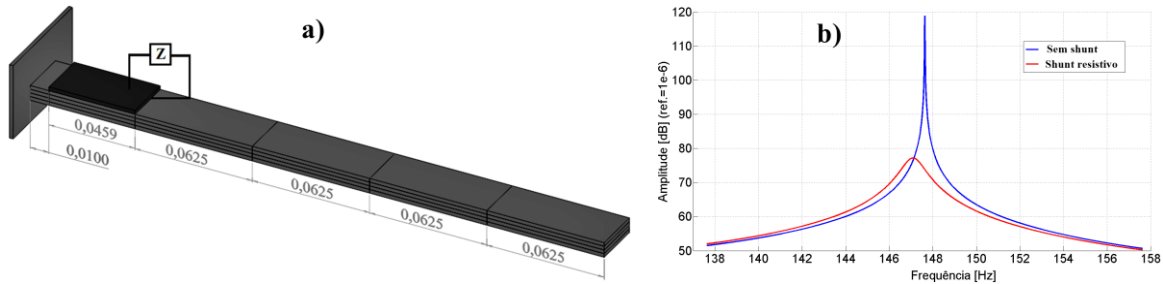


Figure 1. a) Viga de compósito em balanço acoplado de PZT contendo circuito *shunt*; b) Função de resposta em frequência determinística do primeiro modo da viga em balanço

As propriedades mecânicas e elétricas do compósito e do PZTG1195 utilizados podem ser encontrados no trabalho de Ribeiro (2015). O controle passivo de vibrações da estrutura foi realizado na Fig 1b via *shunt* resistivo. O valor do resistor foi calculado como sendo ótimo de acordo com o trabalho de Hagood e von Flotow (1991), cujo valor obtido foi de $R = 96907,00\Omega$. Pode-se observar que houve uma redução de aproximadamente $40dB$ no primeiro modo de vibrar da estrutura utilizando-se do *shunt* resistivo.

Neste ponto do trabalho as variáveis de projeto que foram fatoradas das matrizes e o valor da resistência do circuito foram modelados como campos estocásticos e discretizados via Karhunen-Loève (KL). O domínio estocástico foi definido como sendo as dimensões do elemento finito assim como vários trabalhos na literatura, como Ghanem e Spanos (1991), De Lima, Rade e Bouhaddi (2010) e Koroishi et al (2012). Além disso, de acordo com a literatura, a partir de quatro termos na expansão da série de KL já são suficientes para convergência. Dez termos foram então utilizados.

As simulações foram divididas em dois conjuntos: o primeiro conjunto de simulações considerou apenas a resistência do circuito *shunt* como sendo uma variável aleatória. Desta forma, o parâmetro resistivo foi considerado como incerto, variando seu valor nominal, $R = 96907,00\Omega$, em cinco por cento (Fig. 2a), dez por cento (Fig. 2b), quinze por cento (Fig. 2c) e vinte por cento (Fig. 2d). Já o segundo conjunto de simulações, considerou não somente a resistência como sendo uma variável aleatória, mas também, as espessuras do compósito e do PZT e os ângulos de direções das fibras. Desta forma, um maior número de variáveis foram tomadas como incertas neste segundo conjunto de simulações. Os valores nominais de cada uma dessas variáveis foram variados em cinco por cento (Fig. 2e), dez por cento (Fig. 2f), quinze por cento (Fig. 2g) e vinte por cento (Fig. 2h).

Em todas as simulações realizadas na Fig. 2 nota-se que com o aumento do nível de dispersão dos parâmetros considerados como sendo incertos, aumenta-se também a variabilidade das FRFs, tornando maior o envelope das funções de resposta em frequência estocásticas, aumentando-se o intervalo de confiança. Além disso, observa-se que a FRF média estocástica (cor azul) encontra-se, em todos os casos, dentro do envelope formado pelas FRFs mínimas (cor verde) e máximas estocásticas (cor vermelha).

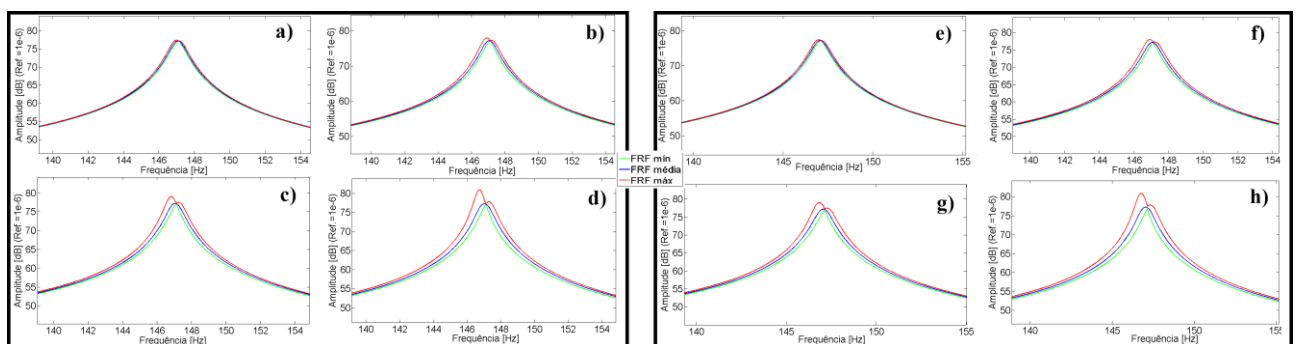


Figure 2. Envelopes de funções de resposta em frequência do sistema estocástico

Nota-se pelas simulações da Fig. 2 que praticamente não houve mudanças nas respostas do sistema ao se adicionar as variáveis estruturais como sendo também aleatórias se comparadas com as simulações do primeiro conjunto onde apenas a resistência foi considerada incerta. Observa-se também que o circuito passivo continuou a atenuar os níveis de vibrações mesmo nos piores casos, onde se inseriu o maior índice de incertezas em seus parâmetros (Fig. 2d e Fig. 2h).

5. CONCLUSÕES

Foi possível observar a grande capacidade de atenuação passiva dos níveis de vibrações e ruídos dos circuitos *shunt* resistivos. Observou-se também que a utilização do circuito elétrico *shunt* resistivo acoplado a estrutura desloca a frequência de ressonância, se assemelhando aos resultados obtidos de sistemas amortecidos viscoelasticamente.

No sistema estocástico, foi possível observar que, dentre as variáveis consideradas como aleatórias, inferiu-se que as incertezas advindas da variabilidade da resistência do circuito, possuem maior influência na variabilidade e consequente aumento do intervalo de confiança das FRFs da estrutura em comparação com as incertezas associadas a espessura das camadas e aos ângulos de direções das fibras. A baixa relevância dos parâmetros da estrutura na variabilidade das respostas do sistema amortecido passivamente via *shunt* resistivo pode ser explicada pelas pequenas dimensões da viga se comparadas com a ordem de grandeza da resistência do circuito. Salienta-se a robustez adicionada pelo circuito resistivo ao ser acoplado a estrutura mais PZT, uma vez que, mesmo para os piores cenários, inserindo-se a máxima dispersão no valor da resistência, este circuito continua a realizar a atenuação dos níveis de vibração do primeiro modo de forma satisfatória.

6. REFERÊNCIAS

- De Lima, A.M.G., Rade, D.A. e Bouhaddi, N., 2010. Stochastic Modeling of Surface Viscoelastic Treatments Combined with Model Condensation Procedures, *Shock and Vibration*, Vol. 17, pp. 429-444.
- Faria, A. W., 2006. *Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica*. 152f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.
- Ghanem, R.G. e Spanos, P.D., 1991. Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach, *Spring Verlag*.
- Hagood, N. W. e von Flotow, A., 1991. Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, Nº2, pp 243-268.
- Koroishi et al, 2012. Stochastic Modeling of Flexible Rotors, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.* vol.34 no.spe2 Rio de Janeiro.
- Reddy, J. N., 1997. Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis. 2.ed. Florida: CRC Press.
- Ribeiro, L. P. *Modelagem Estocástica de Estruturas Compósitas Incorporando Circuitos Shunt para o Controle Passivo de Vibrações*. 2015. 117f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- Saravanan, D. A. e Heyliger P. R. Coupled Layerwise, 1995. Analysis of Composite Beams with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 6, n.3, p. 350-363.

7. AGRADECIMENTOS

À CAPES pela bolsa de estudos e aos órgãos de fomento CNPq e FAPEMIG.

8. ABSTRACT

This work is devoted to the stochastic finite element modeling of a composite structure containing piezoelectric element coupled with a shunt resistive circuit with the aim of passive vibration attenuation. So, Stochastic Finite Element Method is used to model the uncertain variables as Gaussian stochastic homogeneous fields and this fields are discretized in accordance with the Karhunen-Loève series expansion method. By intervening directly in the process of integration, was possible to find the exact mass and stiffness matrices of the composite structure.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.