

PROBLEMA DE INCERTEZA EM SISTEMAS DINÂMICOS UTILIZANDO DEFUZZIFICAÇÃO PELO CENTROIDE

Nathali Vega Cabrera, nathy232_@hotmail.com, nathyvc232@gmail.com
Valder Steffen Júnior, vsteffen@mecanica.ufu.br

Resumo. Este trabalho apresenta uma metodologia para a análise das incertezas nos sistemas mecânicos. As incertezas paramétricas estão sendo modelados através das variáveis fuzzy mostrando resultados preliminares promissores. Propõe-se uma abordagem dos conjuntos fuzzy tipo 1 e tipo 2 e a aplicação do algoritmo de Karnik-Mendel e o Centróide como técnica de defuzzificação.

Palavras chave: Análise de Incertezas, Variáveis fuzzy, Conjuntos Fuzzy Tipo 1 e Tipo 2, Algoritmo de Karnik-Mendel, Centróide.

1. INTRODUÇÃO

A defuzzificação é uma fase importante da lógica fuzzy. O defuzzificador é que pesa as diversas respostas fornecidas pelas regras lógicas e atribui à saída um número. Esse número é que dirá o que é mais *pertinente* de fazer e com que grau. Essa ponderação de respostas pode ser realizada por diversos métodos. Essa fase é conhecida também como máquina de inferência fuzzy e segue os seguintes passos para obter o resultado da inferência para um conjunto de fatos: fatos com premissas (antecedentes); grau de compatibilidade de cada regra; crença em cada regra; agregação. Os dois métodos mais importantes são: método baseado no centro de massa e método baseado na média dos máximos das funções de pertinência, também conhecido como Mamdani. No presente trabalho, utilizamos a defuzzificação pelo Centróide, por este método encontra-se o valor numérico no eixo “x” mais pertinente. Então, voltando às funções de pertinência elaboradas pelas regras, descobre-se o significado da defuzzificação em termos das variáveis linguísticas.

2. ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS COM PARÂMETROS FUZZY

2.1. Conjuntos fuzzy tipo 1

Definição 1. Um subconjunto fuzzy A do universo X é uma função de pertinência μ que, a cada elemento x de X , associa um número $\mu(x)$ entre zero e um, chamado de grau de pertinência de x a A , o qual é denotado por:

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1] \quad (1)$$

Os valores $\mu_A(x) = 1$ e $\mu_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x a A .

Definição 2. Seja A um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0, 1]$. Definimos como α -nível de A ao conjunto,

$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A \geq \alpha\} \quad (2)$$

Definição 3. Suporte de um conjunto fuzzy A são todos os elementos de X que têm grau de pertinência diferente de zero em A e denotamos por $\text{supp}(A)$.

$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A > 0\} \quad (3)$$

Definimos o nível zero de um conjunto fuzzy A , como o fecho do suporte de A , isto é,

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} \quad (4)$$

Definição 4. Seja A um subconjunto não vazio de um conjunto parcialmente ordenado E . Ao menor dos limites superiores de A dá-se o nome de supremo de A que é indicado por $\sup A$.

Princípio da Extensão de Zadeh: Sejam X e Y dois universos não vazios e uma função $f: X \rightarrow Y$. Dado um conjunto fuzzy $D \subset X$, o conjunto fuzzy $\hat{f}(D) \subset Y$, com função de pertinência dada por:

$$\mu_{\hat{f}(D)}(y) = \begin{cases} \sup_{\{x: f(x)=y\}} \mu_D(x), & \text{se } \{x: f(x)=y\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

é chamada de Princípio da Extensão de Zadeh de D por f . Note que $\hat{f}(D) = f(D)$ se D é um conjunto clássico de X .

Proposição 1. Sejam X e Y espaços métricos não vazios, D um conjunto fuzzy de X e $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então para cada $0 \leq \alpha \leq 1$, $[\hat{f}(D)]^\alpha = f([D]^\alpha)$.

Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis pela função f .

Definição 5. O Centro de Gravidade (CG) é o método de defuzzificação mais comum, na qual, para um domínio discreto, é calculado da seguinte forma:

$$CG = \frac{\sum_{i=1}^n \mu(z_i) z_i}{\sum_{i=1}^n \mu(z_i)}, \quad n \text{ é o número de pontos através do qual o domínio é discretizado.} \quad (6)$$

2.2. Conjuntos fuzzy tipo 2

Definição 6. A teoria de conjuntos fuzzy tipo 2 foi introduzida por Lotfi Zadeh em 1975 como uma extensão do conjunto fuzzy tradicional. Um conjunto fuzzy tipo 2, $\bar{A}$ sobre X , é caracterizado por uma função de pertinência tipo 2, $\mu_{\bar{A}}(x, u)$, onde $x \in X$ e $u \in J_x \subseteq [0, 1]$, ou seja,

$$\bar{A} = \{((x, u), \mu_{\bar{A}}(x, u)) / \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}, \text{ onde } 0 \leq \mu_{\bar{A}}(x, u) \leq 1. \quad (7)$$

Se $\mu_{\bar{A}}(x, u) = 1, u \in J_x, \forall x \in X$, o conjunto fuzzy tipo 2 é chamado de conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, tal como mostra a Fig. (1).

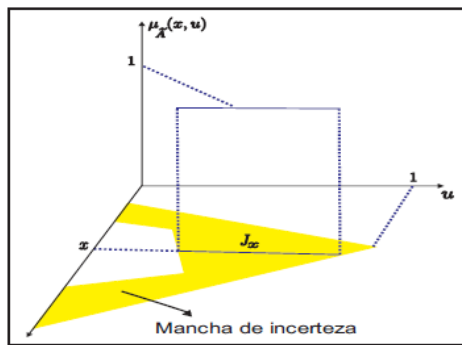


Figura 1. Conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

Definição 7. As funções de pertinência primárias do conjunto fuzzy tipo 2 são definidos por $(J_x, \forall x \in X)$ e sua incerteza é representado pela Manca de Incerteza (FOU) que é definido como a união de todas as pertinências primárias, dado por,

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} (x, J_x), \quad J_x = [\underline{J}_x, \bar{J}_x], \quad (8)$$

Definição 8. Um conjunto fuzzy tipo 2 é delimitado por uma função de pertinência tipo 1 superior [Mendel et. al, 2006] que é representada na forma $\bar{\mu}_A(x), \forall x \in X$ e uma função de pertinência inferior que é a função mais interna que limita a $FOU(\tilde{A})$ e é representada na forma de $\underline{\mu}_A(x), \forall x \in X$, dadas por

$$\bar{\mu}_A(x) = \bigcup_{x \in X} (x, \bar{J}_x), \quad \underline{\mu}_A(x) = \bigcup_{x \in X} (x, \underline{J}_x) \quad (9)$$

Princípio de Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar. Seja $X = X_1 \times \dots \times X_n$ o produto cartesiano de $X_i, i = 1, \dots, n$ e sejam $\tilde{A}_i$ conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar, definido em cada de $X_i, i = 1, \dots, n$, respectivamente. Além disto, seja Y outro conjunto universo e $\tilde{B} \subset Y$, um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar tal que $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$, onde $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação monótona. Então o Princípio da Extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar, é como segue:

$$\bar{\mu}_B(y) = \left[\sup_{(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}(y)} \min\{\underline{\mu}_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \underline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x_n)\}, \sup_{(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}(y)} \min\{\bar{\mu}_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \bar{\mu}_{\tilde{A}_n}(x_n)\} \right] \quad (10)$$

onde $y = f(x_1, \dots, x_n)$ [Hamrawi, et. Al, 2010].

A Fig. (2) representa o Princípio da Extensão de Zadeh para a função de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, onde f é uma função monótona. Utilizamos a Proposição 1 para as funções de pertinência superior $\bar{\mu}_{\tilde{A}}$ e inferior $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$ de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar $\tilde{A}$ com parâmetro fuzzy triangular.

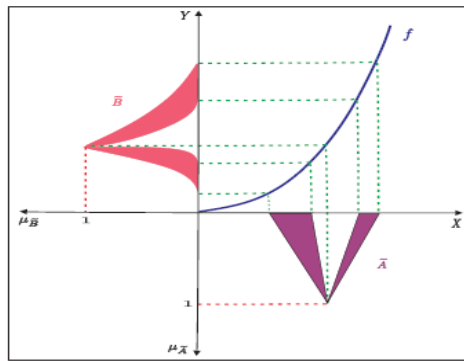


Figura 2. Princípio da Extensão de Zadeh para $\bar{\mu}_{\tilde{A}}$ e $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$ de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar [Cabrera, N.V., 2014].

2.3 Centróide de um Conjunto Fuzzy Tipo 2 Intervalar

O algoritmo de Karnik-Mendel é usado para calcular o centróide de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar mediante dois processos independentes, a primeira para calcular o ponto de extremidade esquerda do intervalo, C_L , e o segundo para calcular sua extremidade direita, C_R , do mesmo intervalo. Foi proposto para calcular o tipo redutor de conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar. Este algoritmo foi estudado teórico e experimentalmente, a fim de melhorar o seu desempenho em aplicações e dar uma maneira exata para obter o centróide (se existir), que é um intervalo fechado, de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

Definição 9 Seja A_e um conjunto fuzzy tipo 1, dizemos que A_e é imerso no conjunto $\tilde{A}$, se,

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{A_e}(x) \leq \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x). \quad (11)$$

Na Fig. (3) vemos exemplos de conjuntos fuzzy tipo 1, A_e , imerso no conjunto tipo 2 intervalar $\tilde{A}$.

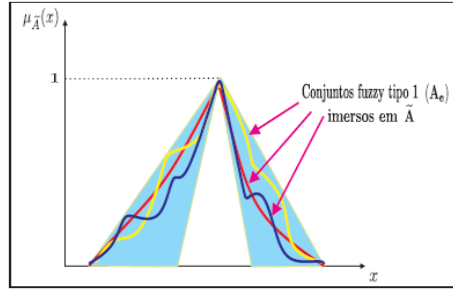


Figura 3. Conjuntos fuzzy tipo 1 imersos em $\tilde{A}$ [Cabrera, N.V., 2014].

Dado um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, $\tilde{A}$, definido em um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ com função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x)$ de suporte compacto, o centróide, $C(\tilde{A})$, é a coleção de centróides de todos os conjuntos imersos tipo 1 [Mendel J.M. e Wu, H., 2007]. Está provado que $C(\tilde{A}) = [c_L, c_R]$. Além disso, o valor defuzzificado do centróide é dado por:

$$C = \frac{c_L + c_R}{2} \quad (12)$$

3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção utilizaremos a técnica de defuzzificação do centróide mediante o algoritmo de Karnik- Mendel [Cabrera, N.V., 2014] para um sistema massa-mola-amortecedor. A aplicação deste método é ilustrada no sistema mecânico simples apresentado a seguir, através de uma análise no domínio do tempo onde se considera incerteza nos parâmetros de rigidez e de amortecimento.

3.1. Sistema massa-mola-amortecedor

O sistema da Fig. (4a) possui um grau de liberdade. Neste modelo consideramos a incerteza no coeficiente de atrito e rigidez da mola representada por $\tilde{c}$ e $\tilde{k}$ respectivamente. A incerteza nos parâmetros é modelada por um número triangular fuzzy do tipo 1 e do tipo 2 na Fig. (4b), onde $m = 0.01\text{Kg}$ e $\tilde{k} = \langle 0.9; 1; 1.1 \rangle \text{ N/m}$ e $\tilde{c} = \langle 0.05; 0.06; 0.07 \rangle \text{ Ns/m}$ [Lara, F. e Steffen, V., 2014].

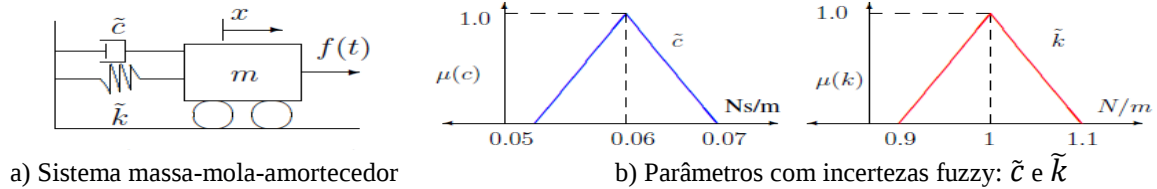


Figura 4. Sistema massa- mola-amortecedor com incerteza fuzzy [Lara, F. e Steffen, V., 2014].

O modelo do sistema massa-mola-amortecedor é representado por:

$$m\ddot{x}(t) + \tilde{c}\dot{x}(t) + \tilde{k}x(t) = f(t), \quad (13)$$

onde $\tilde{x}(t)$ é o deslocamento de massa e $\dot{\tilde{x}}(t)$ é a respectiva velocidade. A função de resposta em frequência (FRF) do sistema, $H(\omega)$ na equação a seguir, caracteriza a relação entre a saída $X(\omega)$ em estado estacionário e a entrada harmônica $f(t) = F(\omega)e^{i\omega t}$.

$$\frac{X(\omega)}{F(\omega)} = H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega\tilde{c} + \tilde{k}} \quad (14)$$

3.2. Cálculo do Centróide

A Eq. (14) permite encontrar a solução do sistema de massa-mola-amortecedor em função do tempo e com ajuda do software MATLAB, obtemos as respostas do sistema na presença de incertezas fuzzy tipo 2 no domínio de tempo como

mostra a Fig. (5a), neste gráfico também mostramos os valores defuzzificados mediante o centroide Fig. (5b). A Fig. (6) mostra o cálculo do centroide para o tempo $t=0.063$.

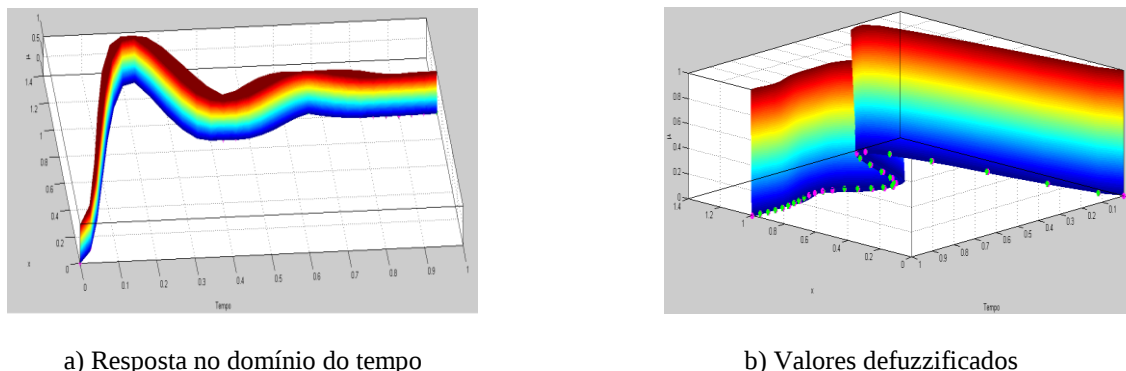


Figura 5. Defuzzificação pelo centroide.

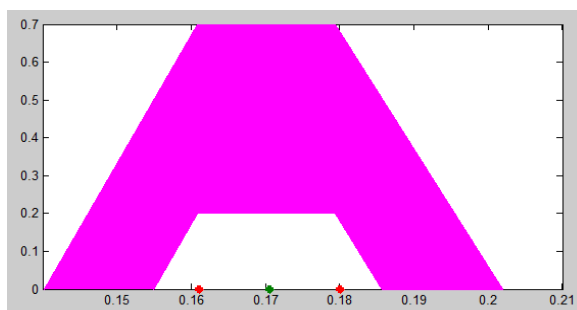


Figura 6. Cálculo do centroide para $t=0.063$.

4. REFERÊNCIAS

- Cabrera, N.V., 2014, “Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar”, Disertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Uberlândia.
- Hamrawi, H., Coupland, S. e R. John, 2010 “A Novel Alpha-cut Representation for Type-2 Fuzzy Sets”, Proc. of IEEE World Congress on Computational Intelligence, Barcelona, Spain, pp. 351-358.
- Lara, F. e Steffen, V., 2014, “Problemas de Incertezas em Sistemas dinâmicos utilizando Lógica Fuzzy”, VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG.
- Mendel, J.M., John, R. e Liu, F.T., 2006, “Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple”, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 14, No. 6, pp. 808-821.
- Mendel J.M. e Wu, H., 2007, “New results about the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule”, Information Sciences , 177, pp. 360-377.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFU.

6. ABSTRACT

This paper presents a methodology for uncertainty analysis of mechanical systems. The parametric uncertainties are modeled using a fuzzy variable approach. Preliminary results are shown. We propose to consider fuzzy sets of types 1. and 2 together with the application of the Kamik-Mendel algorithm and centroid technique for defuzzification.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.