

IMPLEMENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA UTILIZANDO MALHA BLOCO ESTRUTURADA E A METODOLOGIA DA FRONTEIRA IMERSA

Rafael Romão da Silva Melo, Universidade Federal de Uberlândia, faelromelo@gmail.com

Denise Kinoshita, Universidade Federal de Uberlândia, denikino@hotmail.com

Millena Martins Villar, Universidade Federal de Uberlândia, millena.villar@gmail.com

Aristeu da Silveira Neto, Universidade Federal de Uberlândia, aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo. Neste trabalho é proposto resolver numericamente a equação da energia, utilizando malhas bloco-estruturadas, incluindo ainda fronteira imersa térmica com condição de contorno de primeira espécie. Foi adaptada uma sub-rotina implementada anteriormente na versão atual do código AMR3D, sub-rotina utilizada para solução da energia, e foi implementado também a fronteira imersa térmica, com condições de primeira espécie. Resultados de verificação e validação de todo equacionamento implementado foram apresentados, e estes foram satisfatórios e estão em concordância com dados da literatura.

Palavras chave: Equação da energia, Malha multi bloco, Metodologia da fronteira imersa

1. INTRODUÇÃO

Grande parte das aplicações em engenharia em mecânica dos fluidos pode envolver troca de energia, podendo envolver processos de reação química ou não. Sendo assim se faz necessário a solução da equação da energia, acoplada a solução do escoamento.

Neste trabalho foi adaptada uma sub-rotina implementada anteriormente na versão atual do código AMR3D, sub-rotina esta que resolve o transporte de um escalar qualquer, sendo que para esta aplicação a equação foi simplificada para solução da energia. Resultados de verificação da solução serão apresentados na seção dos resultados. E no que tange a fronteira imersa térmica, foram implementadas as condições de primeira espécie (imposição de temperatura). Resultados de validação também serão apresentados na seção dos resultados.

2. MODELO MATEMÁTICO

Para modelagem do escoamento são discretizadas e implementadas as equações de Navier-Stokes, nas formas conservativa. O modelo deve obedecer ao balanço de massa, apresentado abaixo tensorialmente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

O modelo ainda resolve uma equação do momentum para cada componente de velocidade, apresentadas abaixo na forma tensorial:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + f_i, \quad (2)$$

em que p é a pressão, ρ é a massa específica do fluido, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, u_i é a componente i do vetor velocidade e f_i é a componente i do termo fonte, onde no método da fronteira imersa é o vetor campo de força euleriano, através do qual uma geometria complexa pode ser representada.

2.1 Formulação diferencial para a equação da energia

Para modelagem da parte térmica foi feita a adaptação de uma sub-rotina implementada anteriormente na versão atual e paralela do código AMR3DP. Nesta sub-rotina é discretizada e implementada a equação de transporte de um escalar φ qualquer, da seguinte forma conservativa:

$$\frac{\partial (\rho \varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho \varphi) \vec{u}) = \nabla \cdot (\omega(\vec{x}, t) \rho \nabla \varphi) + \xi(\varphi) + S(\vec{x}, t), \quad (3)$$

onde são englobados todos os termos: temporal, advectivo, difusivo, termo de reação química e termo fonte.

Como a aplicação desejada neste trabalho para esta equação é a solução da parte térmica, esta equação é simplificada para a equação da energia:

$$\frac{\partial (\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} T) = \nabla \cdot (\alpha (\vec{x}, t) \nabla T) + f_{TT} (\vec{x}, t), \quad (4)$$

onde T é a temperatura, $\vec{u}$ é o vetor velocidade, ρ é a massa específica, α é a difusividade térmica e f_{TT} é o termo fonte o qual representará a fronteira imersa com propriedades térmicas em meio ao fluido.

2.2 Formulação para a fronteira imersa dinâmica

A metodologia da fronteira imersa utiliza uma malha independente para definir o corpo em meio fluido. Uma das principais vantagens é poder simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando malha cartesiana para o domínio de fluido, ou domínio euleriano. Neste trabalho é utilizada a multi forçagem direta, proposta por Wang et al (2008).

O termo de força f_i da equação da quantidade de movimento é o responsável por definir a interface imersa. Para calcular esta força utilizamos uma função distribuição:

$$f_i (\vec{x}) = \sum_K \vec{F} (\vec{x}_K) D_{ij} (\vec{x} - \vec{x}_K) \Delta V (\vec{x}_K), \quad (5)$$

sendo $\Delta V (\vec{x}_K)$ o volume do elemento lagrangiano e D_{ij} representa uma função de interpolação / distribuição. Neste trabalho é adotada a função gaussiana, a qual possui a seguinte forma:

$$D_{ij} (\vec{x}_K) = \frac{g [(x_K - x_i) / \Delta] g [(y_K - y_j) / \Delta] g [(z_K - z_i) / \Delta]}{\Delta^3}, \quad (6)$$

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r), & \|r\| < 1 \\ \frac{1}{2} - g_1(2 - \|r\|), & 1 < \|r\| < 2 \\ 0, & \|r\| > 2 \end{cases}, \quad (7)$$

$$g_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8}, \quad (8)$$

sendo Δ o tamanho característico da malha euleriana. Esta função mostra que quanto mais distantes estão os volumes eulerianos do ponto lagrangiano, menor é o valor da força distribuída naqueles pontos. Uma propriedade importante desta função é que ao integrá-la em todo domínio se obtém o valor unitário, significando que a força é distribuída em sua totalidade.

Por fim $\vec{F} (\vec{x}_K)$ representa a força no ponto lagrangiano, a qual é distribuída no campo euleriano, delimitando assim a fronteira. Assim como em todo o domínio de cálculo a equação da quantidade de movimento é válida em cada ponto lagrangiano, respeitando assim a hipótese do contínuo, uma vez que estes pontos estão presentes no campo euleriano. Assim reescrevendo a Eq. (2) para cada ponto lagrangiano, considerando fluido incompressível e isolando a força obtemos:

$$F_i (\vec{X}, t) = \rho \frac{\partial (U_i)}{\partial t} + \rho \frac{\partial (U_j U_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right), \quad (9)$$

sendo que as variáveis maiúsculas representam o domínio lagrangiano.

Partindo desta equação e discretizando o termo temporal em um esquema de segunda ordem obtém-se:

$$F_i (\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} + R H S_i^t, \quad (10)$$

$$\text{onde } R H S_i^t = \frac{\partial (U_i U_j)}{\partial X_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right).$$

Para realizar este método escolhido soma-se e subtrai-se um parâmetro auxiliar U^* no termo temporal:

$$F_i (\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t} - U_i^* + U_i^*}{\Delta t} + R H S_i^t. \quad (11)$$

O passo seguinte é utilizar o princípio da superposição e resolver a equação anterior em duas partes:

$$\frac{U_i^* - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + R H S_i^t = 0, \quad (12)$$

$$F_i (\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (13)$$

sendo que $U_i^{t+\Delta t}$ representa a velocidade desejada para a fronteira. Se for uma fronteira estacionária o seu valor é nulo. Se for uma fronteira em movimento o seu valor é igual a velocidade da fronteira. Para o cálculo de U_i^* utilizamos a Eq. (14):

$$U_i^* = \sum_{\Omega} u_i^* D_h (x_i - x_K) h^3, \quad (14)$$

onde D_h é representada por uma função interpolação/distribuição com propriedades de uma função gaussiana, u^* é a velocidade no ponto euleriano e h é o volume lagrangiano.

Resumindo, na multi forçagem direta calcula-se a velocidade no ponto lagrangiano, posteriormente calcula-se a força no ponto lagrangiano, e por fim esta força é distribuída no domínio euleriano. Este procedimento é realizado de maneira iterativa, e o critério de parada é a convergência para um valor de resíduo mínimo desejado, para todos os passos de tempo.

2.3 Formulação para a fronteira imersa térmica

Para a solução da fronteira imersa térmica foi utilizada a mesma ideia utilizada na fronteira imersa para a fluido dinâmica, apresentada anteriormente. A diferença é que ao invés de partir da equação do momentum, parte-se da equação da energia. O termo de força f_{TT} da equação da energia é o responsável por definir a interface térmica imersa. Para calcular esta força utilizamos também utilizamos uma função distribuição:

$$f_{TT}(\vec{x}) = \sum_K \vec{F}_T(\vec{x}_K) D_{ij}(\vec{x} - \vec{x}_K) \Delta V(\vec{x}_K), \quad (15)$$

sendo $\Delta V(\vec{x}_K)$ o volume do elemento lagrangiano e D_{ij} representa uma função de interpolação / distribuição, apresentada anteriormente na Eq. (6) e $\vec{F}_T(\vec{x}_K)$ representa a força no ponto lagrangiano, a qual é distribuída no campo euleriano, representando assim a fronteira térmica.

Para a parte térmica também foi utilizada a multi forçagem direta. Para condição de primeira espécie, ou seja, imposição direta da temperatura na fronteira imersa, a força no ponto lagrangiano é calculada de maneira similar a parte dinâmica, primeiro calculando a temperatura no ponto lagrangiano através da equação de interpolação:

$$T^* = \sum_{\Omega} \varphi^* D_h (x_i - x_K) h^3 \quad (16)$$

Em seguida é calculada a força no ponto lagrangiano, através da equação:

$$F_T(\vec{X}, t) = \rho C_p \frac{\alpha_2 T^{t+\Delta t} - T^*}{\Delta t} \quad (17)$$

sendo $T^{t+\Delta t}$ a temperatura que desejamos aplicar na fronteira.

Em fim essa força é distribuída através da Eq. (15). Esse processo é feito iterativamente até a convergência da solução.

3. RESULTADOS

Para validação da equação da energia utilizando também a sub-rotina de fronteira imersa térmica implementada, foi escolhido o problema da cavidade térmica retangular, onde existe uma parede quente e uma parede fria, e o gradiente de temperatura criado dentro desta cavidade gerará o movimento do fluido. Para ocorrer este movimento foi adotado a Hipótese de Boussinesq, onde um termo a mais, o termo de empuxo, é adicionado na equação da quantidade de movimento na direção de onde se tem gravidade. Esta aproximação dita que a densidade somente varia com a temperatura, e é dado pela equação:

$$\rho g \beta (T - T_{REF}) \quad (18)$$

onde g é a gravidade, β é uma constante, T é a temperatura do volume analisado e T_{REF} é a temperatura de referência do problema.

O problema da cavidade térmica é apresentado na Fig. (1), onde é ilustrado as paredes com gradiente de temperatura e a direção da gravidade.

A cavidade foi modelada com fronteira imersa, sendo uma malha triangular onde foram definidos triângulos de tal forma que o volume atribuído para o ponto lagrangiano (área do triângulo multiplicado por uma altura) seja igual ao

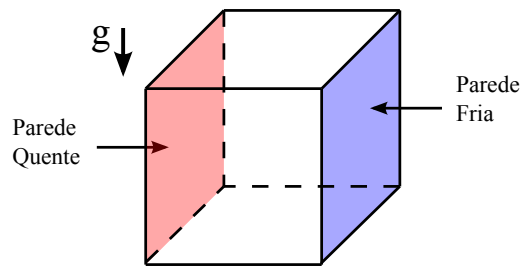


Figura 1. Cavidade térmica

volume euleriano onde a cavidade está imersa. Esta altura escolhida para o volume lagrangiano foi mesmo delta da malha euleriana. A dimensão da cavidade é de $1m \times 1m \times 1m$.

A Fig. (2) mostra a malha euleriana utilizada neste problema. Foi definido um bloco de malha mais refinado no centro do domínio, onde a cavidade lagrangiana foi imersa. Ao se distanciar da região de interesse, ou seja, o interior da cavidade, a malha euleriana é engrossada gradativamente, até atingir o contorno do domínio, onde foi aplicada a condição de contorno ambiente $T_A = 25^{\circ}C$. Esta figura também mostra a malha lagrangiana imersa na região de maior refinamento partida ao meio. Esta malha euleriana foi criada de tal forma que no interior da cavidade se tenha $64 \times 64 \times 64$ volumes eulerianos.

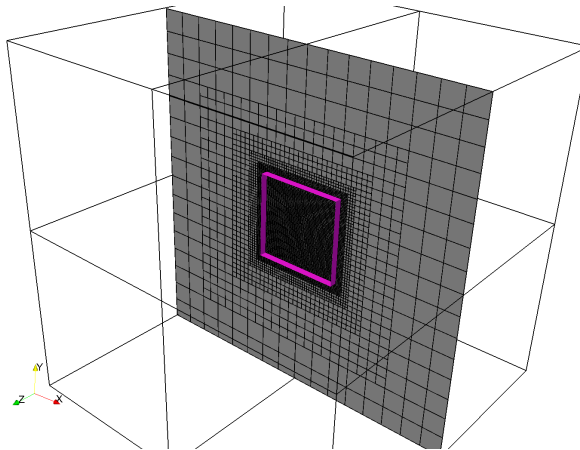


Figura 2. Malha euleriana no plano central normal à z e cavidade formada por elementos lagrangianos

Para validação foi simulado um tempo total de 200 segundos, a temperatura da parede quente foi de $T_H = 25^{\circ}C$ e da parede fria de $25^{\circ}C$. As propriedades do fluido foram escolhidas de tal forma que o número de Rayleigh fosse igual a $Ra = 1,89 \cdot 10^5$ e o número de Prandtl igual a $Pr = 0,71$. A força gravitacional foi imposta somente no interior da cavidade e foi utilizado processamento paralelo, sendo que o domínio foi dividido em quatro processos.

Para a condição de primeira espécie foram imposta a temperatura das duas paredes, quentes e frias, e para as demais paredes foi imposto um perfil linear de temperatura, variando de T_H até T_C .

A Fig. (3) apresenta o campo de temperatura em um plano central normal a direção z . Nota-se que próximo a parede quente o fluido sobe devida a força de empuxo, e perto da parede fria o fluido desce, como esperado. Neste plano também são apresentadas as linhas de corrente, mostrando que o fluido circula no interior da cavidade, e para este número de Rayleigh foi observada a formação de duas recirculações secundárias. Esta figura está dividida em quatro partes, apresentando as quatro regiões utilizadas em cada processador.

A Fig. (4) apresenta os perfis de temperatura adimensionalizados no plano central em z . Primeiro é mostrado a temperatura em função de x para os planos em $y = 0,3m$, $y = 0,5m$ e $y = 0,7m$. Em seguida é mostrado a temperatura em função de y para o plano $x = 0,5m$. Os perfis são comparados com a literatura, sendo comparados com dados numéricos (Padilla et al., 2012) e dados experimentais (Krane et al., 1983). Os resultados encontrados são condizentes, exceto uma pequena variação nas condições de contorno próximo a parede quando comparado com dados experimentais. Essa diferença ocorre pelo fato do experimento não conseguir impor um perfil linear na condição de contorno de forma eficiente.

4. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou a implementação das condições de primeira e segunda espécie para a fronteira imersa, foram realizadas simulações para validação, e o problema utilizado foi a cavidade retangular utilizando paredes com

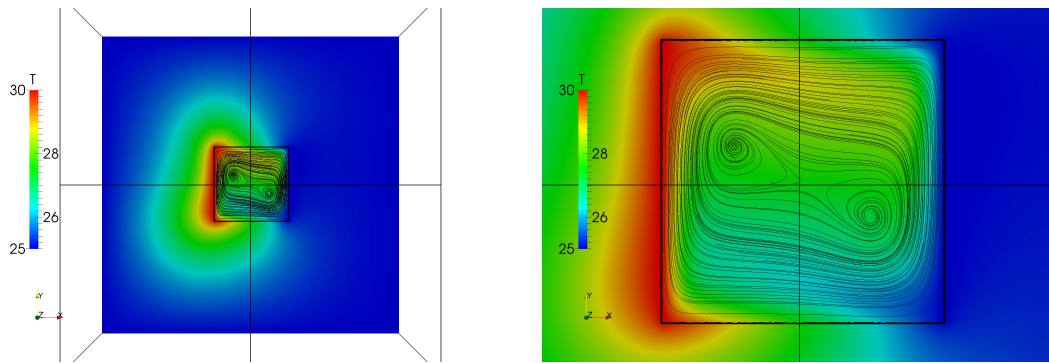
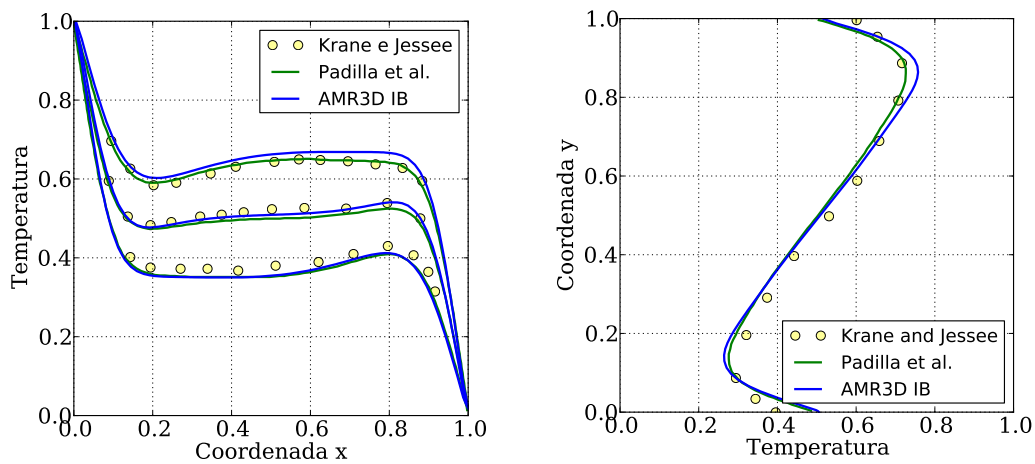

 Figura 3. Campos de temperatura no plano central normal à z


Figura 4. Perfis de temperatura comparados com dados da literatura.

gradientes de temperatura. Os resultados obtidos foram satisfatórios quando comparados com os dados da literatura.

Como trabalho futuro será simulado este mesmo problema para numero de Rayleigh mais elevado. E ainda será apresentado resultados para um outro problema físico onde será imposto fluxo de calor constante, diferente deste problema onde é imposto somente fluxo de calor nulo.

5. REFERÊNCIAS

- Krane, R. J., Jessee, J., 1983, "Some detailed field measurements for a natural convection flow in a vertical square enclosure", Proceedings of 1st Joint Conference at ASME-JSME Thermal Engineering, v. 34, pp. 323-329.
- Padilla, E. L. M, Lourenco, M. A. S., Luo, K., Silveira-Neto, A., 2012, "Natural convection inside cubical cavities: numerical solutions with two boundary conditions", Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.
- Wang, Z., Fan, J., Luo, K., 2008, "Combined multi direct forcing immersed boundary method for simulating flows with moving particles", International Journal of Multiphase Flow, v. 34, pp. 283-302.

6. AGRADECIMENTOS

À PROEX, CAPES, CNPq, FAPEMIG e PETROBRAS pelo suporte financeiro.

7. ABSTRACT

In this work we solve numerically the energy equation, using block-structured grids, also including the termic immersed boundary with the first type of the boundary condition. A subroutine previously implemented has been adapted in the current version of AMR3D code, subroutine used in the energy solution, and we implemented termic immersed boundary. Verification and validation results from all implementation was presented, and these were satisfactory.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.