

REDUÇÃO DE MODELO APLICADA A SISTEMAS MECÂNICOS

U. L. Rosa¹

A. M. G. de Lima²

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Eng. Mecânica, Campus Santa Mônica, 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil

¹ulisses.ufu@hotmail.com

²amglima@mecanica.ufu.br

Resumo. Este trabalho apresenta o desenvolvimento do método de elementos finitos clássico aplicado a uma estrutura mecânica do tipo placa fina. Sua principal ênfase é a obtenção de um procedimento de condensação de modelo, que visa a diminuição do número de graus de liberdade efetivos do sistema possibilitando ganho em tempo computacional e consequente aumento da eficácia do método. A estrutura é modelada através da teoria das placas de Kirchhoff utilizando elementos finitos retangulares com cinco graus de liberdade por nó. Após a obtenção das matrizes de massa e rigidez do sistema é aplicado o método de redução por bases de Ritz. Por fim são realizados testes numéricos visando a comparação entre o sistema completo e o sistema reduzido através da obtenção de funções resposta em frequência (FRF) em diferentes faixas de frequência.

Palavras chave: redução de modelo, condensação de modelo, base de Ritz, elementos finitos

1. INTRODUÇÃO

Algumas aplicações de engenharia requerem desenvolvimento de modelos computacionais visando simular o comportamento de uma estrutura sob diferentes condições. Através dessa abordagem virtual, evita-se a utilização de sistemas reais, que possuem geralmente custos financeiros muito mais elevados.

Análises desse tipo podem ser realizadas tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, sendo que o segundo tipo é mais comum devido ao menor tempo gasto na obtenção de resultados. O método dos elementos finitos é uma ferramenta disponível para se obter esse tipo de resposta, onde o sistema contínuo é discretizado em elementos menores (Faria, 2006). Em sistemas pequenos é possível obter bons resultados de maneira eficaz, porém dependendo da dimensão do problema (sistemas industriais, por exemplo) pode ser necessária a utilização de um grande número de elementos para que sejam gerados valores adequados, refletindo diretamente em acréscimo de esforço computacional.

Devido à necessidade de resolução de problemas em um tempo mais curto e com boa precisão, introduz-se o conceito de métodos de condensação de modelos. Essa técnica permite diminuir o número de graus de liberdade (GDL) efetivos do sistema, tornando-o mais simples, com dimensão menor e possibilitando a obtenção eficaz de respostas (Gerges, 2013).

Com base no que foi descrito acima, o objetivo do presente artigo é obter um modelo condensado de uma placa fina modelada através da teoria das placas de Kirchhoff (Zienkiewicz e Taylor, 2005) discretizada pelo método dos elementos finitos clássico.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O objetivo dessa seção é apresentar a formulação do método dos elementos finitos utilizada na modelagem do problema. O método de discretização é aplicado a uma placa fina de alumínio, dividindo-a em elementos retangulares de quatro nós e cinco graus de liberdade (GDL) por nó, sendo três deslocamentos planos nas direções x, y, z (denotados por u_0, v_0, w_0) e duas rotações (denotadas por θ_x, θ_y) gerando então um total de 845 GDL na estrutura completa. O sistema está bi-engastado ao longo das bordas na direção do eixo y , ou seja, nesses nós todos os graus de liberdade apresentam necessariamente valor nulo.

As propriedades mecânicas e geométricas da placa são mostradas na Tab. (1). Um esquema simplificado apresentando os eixos, dimensões, malha e condições de contorno pode ser visto na Fig. (1).

Tabela 1. Propriedades da placa de alumínio

Espessura (mm)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson	Massa Específica (kg/m ³)
1.5	70	0.33	2700

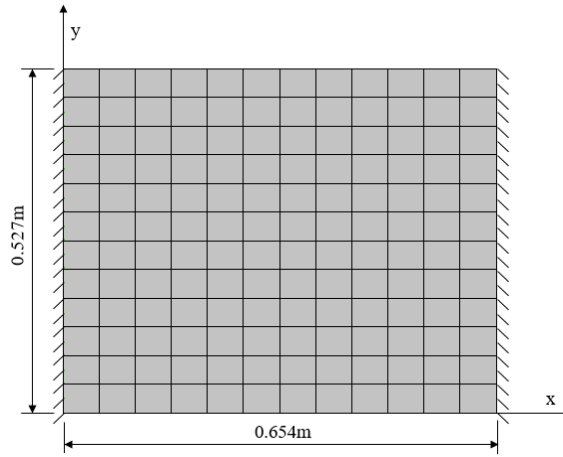


Figura 1. Esquema de malha da placa fina

2.1. Equação de movimento

A resolução da equação de movimento do sistema discretizado possibilita a obtenção dos deslocamentos para cada um dos nós que compõem a estrutura (o chamado campo de deslocamentos nodais). Pela teoria das placas de Kirchhoff (Zienkiewicz e Taylor, 2005) ele é obtido através da Eq. (1).

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x, y, z, t) \\ \mathbf{v}(x, y, z, t) \\ \mathbf{w}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + z\theta_x \\ v_0 + z\theta_y \\ w_0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Aplicando o método dos elementos finitos, esses campos passam a ser interpolados por funções de aproximação, também chamadas de funções de forma (denotadas por $\mathbf{N}(x, y)$) bidimensionais, para o caso da placa fina. A Equação (2) representa essas funções aplicadas ao campo gerado pela Eq. (1).

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(z) \mathbf{N}(x, y) \mathbf{u}_e(t) \quad (2)$$

onde, tem-se:

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.a)$$

$$\mathbf{u}_e(t) = [u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y]_i^T \quad (3.b)$$

para cada elemento indicado pelo sub índice e e cada nó indicado pelo sub índice i .

As funções de forma são utilizadas também no cálculo das propriedades de massa e rigidez do sistema através do método variacional energético. A formulação é primeiramente desenvolvida para cada elemento em seu volume elementar V_e e depois expandida para o sistema global por meio da conectividade dos nós. Equações (4) e (5) mostram a obtenção das matrizes elementares (Faria, 2006).

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}(x, y)^T \mathbf{N}(x, y) dV_e \quad (4)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \dot{\mathbf{N}}(x, y)^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{N}}(x, y) dV_e \quad (5)$$

onde $\mathbf{H}$ é a matriz de propriedades mecânicas, dependendo do material da estrutura.

Dessa forma é possível escrever a equação diferencial de movimento do sistema não-amortecido cuja solução estima os campos de deslocamento. Sua formulação é mostrada na Eq. (6).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (6)$$

onde $\mathbf{F}$ representa uma carga externa aplicada à estrutura.

2.2. Função resposta em frequência

A obtenção de respostas temporais geralmente acarreta grande custo computacional. Devido a isso, é altamente recomendável trabalhar no domínio da frequência de Fourier (Lambert, 2007). Para aproximar ainda mais o problema do caso real, introduz-se um amortecimento estrutural (também chamado inerente) à Eq. (6). Para a placa fina considerada ele pode ser inserido proporcionalmente na forma de um coeficiente multiplicando diretamente a matriz de rigidez ($\mathbf{C} = \beta\mathbf{K}$). A Equação (7) representa o novo modelo completo.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (7)$$

A Equação (8) representa a resposta no domínio frequencial do sistema. Ela é obtida através da aplicação da transformada de Fourier à Eq. (7) e de manipulações algébricas.

$$\mathbf{U}(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{F}(\omega) \quad (8)$$

onde $\mathbf{U}(\omega)$ e $\mathbf{F}(\omega)$ são as transformadas de Fourier do deslocamento e do esforço externo aplicado, respectivamente.

Define-se então, a função resposta em frequência (FRF) entre deslocamento de força do sistema através da Eq. (9).

$$\mathbf{G}(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \right]^{-1} \quad (9)$$

3. MÉTODO DE REDUÇÃO DE MODELO

A avaliação da Eq. (9) requer inversões de matrizes cuja dimensão é proporcional ao número de GDL da estrutura completa, o que torna proibitiva sua aplicação em sistemas complexos. Lambert (2007) afirma que essa é a principal razão da necessidade da aplicação de um método de condensação por meio de uma base modal. O interesse aqui é obter uma base $\mathbf{T}$ que, ao ser multiplicada pelas matrizes globais do sistema, reduz seu número de graus de liberdade efetivo.

Gerges (2013) cita alguns métodos para obtenção dessa base, sendo que o mais apropriado para esse tipo de estrutura é a base de Ritz. Ela é composta por deslocamentos nodais obtidos dos modos de vibrar da estrutura (análise modal) e enriquecida através da adição de resíduo estático gerado pela aplicação de uma carga unitária. Quanto mais modos são inseridos no sistema, mais ele se aproxima do sistema real, porém gera maior custo computacional. Dessa forma é usual analisar até 1,5 vezes a frequência máxima desejada incluindo na composição da base todos os modos de vibrar compreendidos nessa faixa. À título de exemplo, se é desejada uma análise da faixa de 0-100 Hz, é recomendado obter respostas para 0-150 Hz considerando todos os modos de vibrar das frequências naturais abaixo de 150 Hz. A Equação (10) mostra como ela é montada.

$$\mathbf{T} = [\mathbf{U}_{LF} \quad \bar{\mathbf{U}}] \quad (10)$$

onde $\mathbf{U}_{LF}$ são os modos de vibrar obtidos através da solução do problema de auto vetores da equação homogênea associada à Eq. (6) e $\bar{\mathbf{U}}$ é o resíduo estático resultante da aplicação de uma força unitária.

Essa base é então aplicada às matrizes globais, gerando um novo sistema de dimensões menores, como mostrado nas Eqs. (11) (Diacenco et al., 2010).

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (11.a)$$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (11.b)$$

onde $\mathbf{M}_R$ e $\mathbf{K}_R$ são as matrizes de massa e rigidez reduzidas, respectivamente. É possível ainda obter um amortecimento estrutural reduzido da mesma maneira descrita anteriormente ($\mathbf{C}_R = \beta \mathbf{K}_R$).

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente, foi estabelecida a faixa de frequência de interesse de 0 a 100 Hz. Sendo assim, conforme apresentado anteriormente recomenda-se obter FRFs até 150 Hz. Para saber quantos modos e frequências naturais devem ser considerados na composição da base foi realizada uma análise modal do sistema. As quinze primeiras frequências naturais estão representadas na Tab. (2).

Tabela 2. Valores das primeiras quinze frequências naturais da placa

Número	Frequência	Número	Frequência	Número	Frequência
1 ^a	19,21 Hz	6 ^a	86,46 Hz	11 ^a	140,57 Hz
2 ^a	24,45 Hz	7 ^a	96,89 Hz	12 ^a	173,23 Hz
3 ^a	47,56 Hz	8 ^a	104,46 Hz	13 ^a	173,89 Hz
4 ^a	53,09 Hz	9 ^a	112,84 Hz	14 ^a	181,93 Hz
5 ^a	60,65 Hz	10 ^a	134,36 Hz	15 ^a	188,87 Hz

Nota-se nessa tabela que existem onze valores de frequências naturais menores que 150 Hz. Nesse caso, recomenda-se usar os onze primeiros auto vetores obtidos na análise modal mais o resíduo estático na composição da base de redução. Dessa forma, a matriz **T** ao ser multiplicada pelas matrizes globais do sistema proporciona uma redução de 845 GDL do sistema completo para 12 GDL efetivos.

Obteve-se para o sistema completo e o sistema reduzido as FRFs na faixa de frequência de interesse. O sistema foi excitado por impulso unitário em seu nó central e teve deslocamento obtido no mesmo ponto. A Figura (2) apresenta o gráfico contendo essa resposta. Foi considerado amortecimento proporcional com $\beta = 2.5 \times 10^{-4}$.

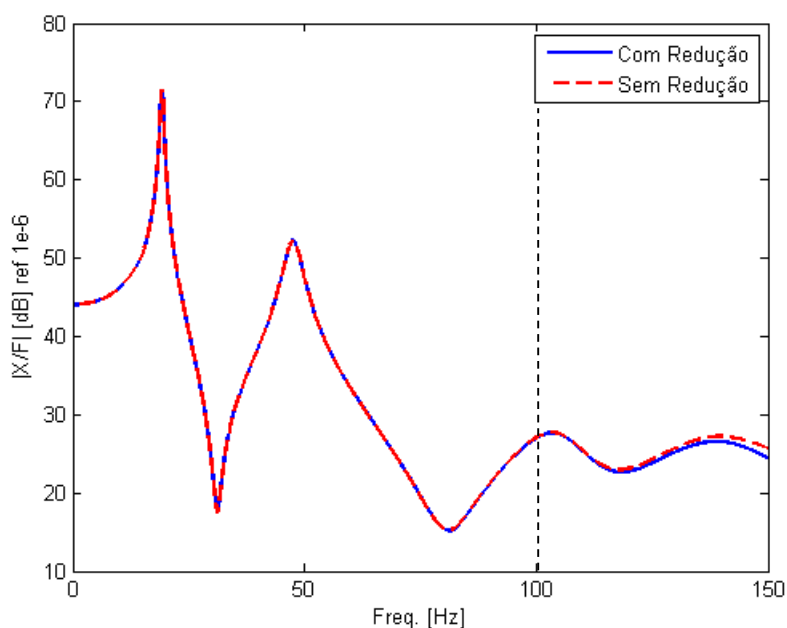


Figura 2. Comparação entre as FRFs do sistema completo e do reduzido

Ao analisar o gráfico, nota-se que os valores obtidos na faixa de 0-100 Hz para o sistema reduzido foram muito próximos aos do sistema completo, porém após esse valor, os dois gráficos começam a destoar levemente. Apesar disso o ganho computacional foi elevadíssimo, como pode-se notar na Tab. (3).

Tabela 3. Comparação entre custo computacional entre os sistemas com redução e sem redução modal

Tipo de Sistema	Tempo Computacional	Ganho Computacional
Completo	401,5036 s	99,86%
Reduzido	0,5563 s	

A estrutura utilizada nesses ensaios é uma placa fina simples. O tempo gasto para gerar a FRF completa da Fig. (2) ficou em torno de sete minutos, o que não é um tempo muito elevado. Apesar disso se fosse necessária a realização de

outros estudos, como por exemplo análise de fadiga, a dimensão das matrizes completas geradas começaria a ficar elevada e o custo computacional envolvido proibitivo. Nesses casos e também em casos industriais e aplicações reais de engenharia um ganho computacional de 99,86% e precisão elevadíssima obtidos por esse método são altamente desejáveis.

5. REFERÊNCIAS

- Diacenco, A. A., de Lima, A. M. G. e Côrrea, E. O., 2010. “Métodos de redução de modelos aplicados a estruturas compostas laminadas incorporando camadas viscoelásticas”. *CONEM*, Campina Grande, Paraíba, Brasil.
- Faria, A. W., 2006. *Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica*. Dissertação de mestrado,UFU , Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- Gerges, Y., 2013. *Méthodes de réduction de modèles em vibroacoustique non-linéaire*. Tese de Ph.D., Université de Franche-Comté, Besançon, França.
- Lambert, S., 2007. *Contribution à l'analyse d l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires*. Tese de Ph.D., INSA de Rouen, Rouen, França.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R. L., 2005. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 6ª edição.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos à Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Laboratório de Mecânica das Estruturas José Eduardo Tannus Reis (LMest) e Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE) pela oportunidade e apoio concedidos à realização deste projeto de pesquisa e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pelo apoio financeiro.

7. ABSTRACT

This work presents a development of the classic finite elements method applied to a mechanical structure (thin plate). It emphasizes the generation of a model condensation procedure that decreases the number of effective degrees of freedom making possible to obtain gains in computational time and effort and consequent increase on the method's effectiveness. The structure is modeled by Kirchoff's theory discretized with five degrees-per-node. After the calculation of the system's mass and stiffness matrices, the Ritz basis reduction method is applied. Numerical results are finally obtained for the comparison between the full and reduced models via frequency response function (FRF) for different frequency ranges.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.