

UMA REVISÃO SOBRE O PROJETO MECÂNICO DE ABSORVEDORES DE VIBRAÇÃO

Vergílio Torezan Silingardi Del Claro, LMest - UFU, vergiliotorezan@gmail.com

Domingos Alves Rade, LMest – UFU / IEM - ITA, domingos@ufu.com.br

Resumo. Em numerosas situações, estruturas funcionando em regime vibratório indesejado estarão sujeitas a uma vida útil reduzida e também à mau funcionamento. Dentre as diversas técnicas existentes para eliminar ou reduzir o problema de vibrações em estruturas e máquinas diversas existem os Absorvedores Dinâmicos de Vibrações - ADVs. Por sua vez, os ADVs existem nas mais diversas configurações e formatos, usando também diversos princípios de funcionamento e métodos de sintonia. O presente trabalho oferece uma revisão sobre a teoria clássica de ADVs, vista de um ponto de vista construtivo e de otimização, visando um design ótimo em diversas configurações usualmente adotadas deste sistema mecânico tão importante.

Palavras chave: vibrações mecânicas; absorvedor dinâmico de vibrações; otimização paramétrica.

1. INTRODUÇÃO

Absorvedores dinâmicos de vibrações são definidos como sistemas dinâmicos auxiliares, acoplados a uma estrutura sujeita a vibrações, cujo objetivo é anular ou reduzir as vibrações às quais a estrutura está sujeita (Korennev & Reznikov, 1993). Existem diversos tipos e tamanhos de ADVs, voltados para as mais diversas aplicações, utilizando muitos conceitos e princípios de funcionamento diferentes, como visto nos estudos de Jacquot (1978), Nissen (1982), Lamancusa (1992), H. Moradi (2008) e Tsuruta (2015).

Historicamente (Frahm, 1911), ADVs vêm sendo usados em diversos tipos de máquinas, equipamentos, construções e estruturas, com o objetivo de melhorar o conforto, vida útil e precisão de operação. Via de regra, o ADV deve ser sintonizado com o equipamento no qual ele será instalado. Isto é feito modelando o sistema completo (ADV + estrutura base) e determinando as frequências de excitação externa e vibração da estrutura (Warburton, 1980).

A abordagem inicial para problemas de vibração usando ADVs, entretanto, é geralmente a construção de um modelo simplificado, visando um pré-dimensionamento do sistema (Meirovitch, 2001). Feito este pré-dimensionamento é iniciada uma análise mais complexa, introduzindo efeitos como amortecimento, introdução de energia externa numa lei de controle, variação de propriedades físicas do ADV, entre outros efeitos. Finalmente, tendo o modelo completo construído, este é ensaiado de forma virtual ou real, comprovando seu funcionamento (Hartog, 1956).

2. TEORIA MECÂNICA DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES

O tipo mais simples de absorvedor é o ADV de 1 grau de liberdade (GDL), não amortecido, ajustado para uma única frequência de excitação harmônica e para uma única frequência de ressonância da estrutura base. O modelo físico para este ADV é o de um sistema massa-mola duplo, onde a massa maior representa a base e a massa menor o ADV, conforme ilustrado na Fig. (1.a). Esta configuração de absorvedor permite obter redução de vibração para a frequência desejada, ao custo de ampliação de vibração nas frequências próximas. O sistema com este ADV se torna de 2 GDL, com dois picos de amplitude de vibração próximos ao pico original, conforme mostrado na Fig. (1.b).

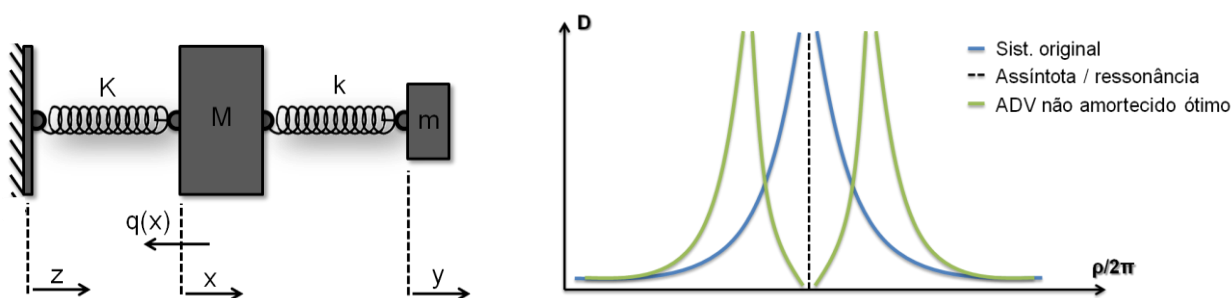


Figura 1.a: Esquema de um ADV de 1 GDL não amortecido aplicada a um sistema base de 1 GDL; Figura 1.b: Função de resposta em frequência do sistema de 1 GDL com ADV não amortecido;

Considera-se para este modelo as seguintes variáveis (Korenev & Reznikov, 1993):

$$\omega_0 = \sqrt{K/M} = \text{freq. base} \quad e \quad f_0 = \sqrt{k/m} = \text{freq. ADV}(\omega_a) \quad (1)$$

$$\rho_0 = \text{freq. da força externa } (\omega) \quad e \quad Q = \text{amplitude da força externa} \quad (2)$$

$$f^2 = f_0^2 / \omega_0^2 = \text{sintonia} \quad e \quad v = m/M = \text{massa relativa} \quad (3)$$

Aplicando no problema a segunda lei de Newton, e admitindo solução harmônica, pode-se formular o modelo matemático como segue:

$$M\ddot{x} + Kx + k(x - y) = Qe^{i\rho_0 t} \quad e \quad m\ddot{y} + k(y - x) = 0 \quad (4)$$

$$x = X_0 e^{i\rho_0 t} \quad e \quad y = Y_0 e^{i\rho_0 t} \quad (5)$$

Tornando a solução do problema uma função adimensional, pode-se determinar as respostas do sistema de 2 GDL (Hartog, 1956):

$$X_0 = \frac{Q f^2 - \rho^2}{K \Delta} \quad e \quad Y_0 = \frac{Q f^2}{K \Delta} \quad (6)$$

$$\rho = \rho_0 / \omega_0 \quad e \quad \Delta = (1 - \rho^2)(f^2 - \rho^2) - v\rho^2 f^2 \quad (7)$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\{1 + f^2(1 + v) \pm \sqrt{[1 + f^2(1 + v)]^2 - 4f^2}\}}{2}} \quad (8)$$

Otimizando a frequência do ADV, para que ele atue na ressonância da base, anulando a vibração da base na frequência mais crítica temos (Warburton, 1980):

$$\text{Critério de otimização} = D = \left| \rho^{(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{f^2 - \rho^2}{\Delta} \right| \quad (9)$$

$$v = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 (\varphi_2 - \varphi_1)} \quad e \quad f^2 = \frac{\rho_1^2 \rho_2^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{\rho_2^2 \varphi_2 - \rho_1^2 \varphi_1} \quad (10)$$

onde $\varphi_{1,2}$ e β são as variáveis das equações anteriores e A é um intervalo próximo ao ponto de ressonância do ADV:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{(\beta + \rho_{1,2}^2 - 1)} \quad e \quad \beta = \pm \frac{\rho^{(\alpha_1 + \alpha_2)}}{A} \quad (11)$$

Esta otimização permite determinar as propriedades de massa, rigidez e amortecimentos ideais para o ADV, atingindo uma sintonia ótima.

2.1. Formulação para ADVs de um grau de liberdade e com amortecimento não nulo

Um segundo tipo de ADV é o absorvedor com amortecimento, que permite atenuar vibrações numa banda de frequências mais ampla, ao custo de uma menor eficiência no ponto de ressonância da massa principal. Este modelo permite dissipar energia vibratória no amortecedor, geralmente na forma de calor, reduzindo a energia mecânica total do sistema. Para este caso, não haverá ressonâncias nem antirressonâncias com amplitudes tendendo ao infinito, porém as amplitudes de vibração ao redor do pico original serão bastante reduzidas (Korenev & Reznikov, 1993).

Neste caso, o modelo físico é um sistema massa-mola-amortecedor duplo, mantendo as notações anteriormente definidas, como visto na Fig. (2.a). Formula-se o problema pela 2ª Lei de Newton, considerando $C=0$ e $c \neq 0$, novamente se assume solução oscilatória, como demonstrado adiante:

$$M\ddot{x} + Kx + k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = Qe^{i\rho_0 t} \quad (21)$$

$$m\ddot{y} + k(y - x) + c(\dot{y} - \dot{x}) = 0 \quad (22)$$

Solucionando este problema percebe-se que, a amplitude de vibração do sistema é diretamente dependente do valor de c , Fig. (2.b). Além disso, existem dois pontos pelos quais todas as curvas, independentemente do valor do amortecimento, passam, que são os pontos invariantes. Define-se como ADV amortecido ótimo aquele que tem derivadas nulas nos pontos invariantes (Korenev & Reznikov, 1993).

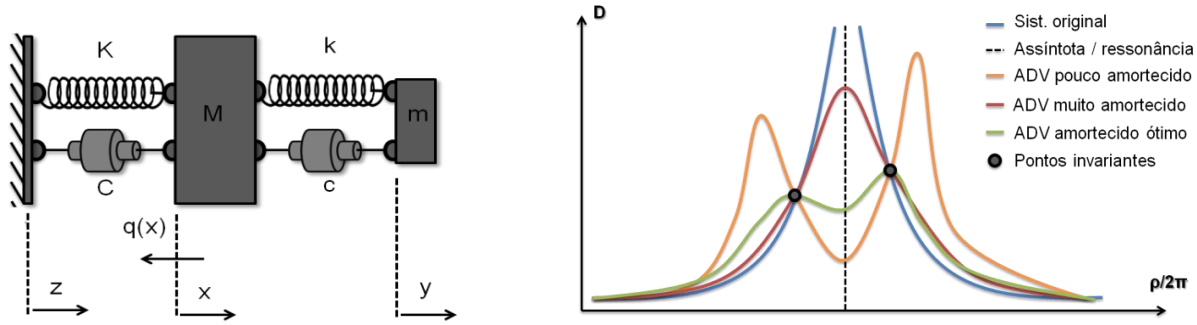


Figura 2.a: ADV de 1 gdl amortecido; Figura 2.b: Comparação de FRFs de ADVs de 1 gdl amortecidos;

Estes modelos simplificados são bastante úteis no desenvolvimento de técnicas de otimização usadas no ajuste do ADV para uma dada frequência.

2.2. Formulação modal para ADVs de um grau de liberdade e com amortecimento não nulo, aplicados a estruturas primárias complexas

Entretanto, os modelos usados até agora representam a realidade de forma simplificada. Para melhor representar sistemas reais será usada a *teoria modal*, em sistemas onde a base tem “ n ” gdl's não amortecidos, Fig. (3) com ADVs amortecidos (Cunha Jr., 1999).

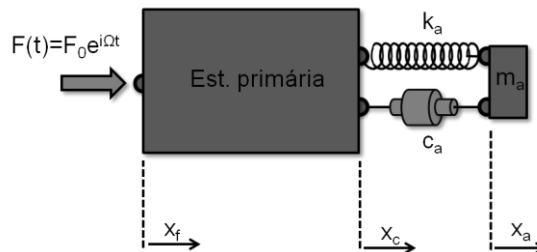


Figura 3: ADV de N GDLs amortecidos

Este modelo considera a excitação vinda da base da estrutura, que é tem “ n ” graus de liberdade e geometria qualquer. Esta estrutura é representada por matrizes de massa e rigidez, e é excitada por uma força harmônica externa “ $F(t)$ ” no ponto “ x_f ”. Será usada neste caso a formulação de *Lagrange*, generalizada para N gdl's, usando ainda os conceitos de coordenadas generalizadas e massa e rigidez efetivas:

$$\{X(t)\} = \{\Psi_\sigma\}q_\sigma(t) \quad (23)$$

$$\{\Psi_\sigma\} = \sigma_{ésimo} \text{ autovetor da E.P.} \quad (24)$$

$$q_\sigma(t) = \text{coord. generalizadas} \quad (25)$$

$$X_f(t) = \Psi_{\sigma f} q_\sigma(t) \quad (26)$$

$$X_c(t) = \Psi_{\sigma c} q_\sigma(t) \quad (27)$$

$$\Psi_{\sigma i} = \text{componentes de } \{\Psi_\sigma\} \text{ nas extremidades} \quad (28)$$

$$\{\Psi_\sigma\}^T [M] \{\Psi_\sigma\} = M_p = \text{massa generalizada da E.P.} \quad (29)$$

Calculando então as energias *cinética* e de *deformação* pode-se fazer matricialmente o seguinte:

$$T = 1/2 \{\dot{X}(t)\}^T [M] \{\dot{X}(t)\} + 1/2 (m_a \dot{X}_a^2(t)) \quad (31)$$

$$T = 1/2 M_p \dot{q}_\sigma^2(t) + 1/2 m_a \dot{X}_a^2(t) \quad (32)$$

$$V = 1/2 \{X(t)\}^T [K] \{X(t)\} + 1/2 k_a (X_a(t) - X_c(t))^2 \quad (33)$$

$$V = 1/2 M_p \omega_\sigma^2 q_\sigma^2(t) + 1/2 k_a [X_a(t) - \Psi_{\sigma c} q_\sigma(t)]^2 \quad (34)$$

Calculando agora a *função dissipação de Rayleigh* e aplicando o princípio do *trabalho virtual* na força externa obtém-se:

$$F = 1/2 C_a [\dot{X}_a(t) - \dot{X}_c(t)]^2 \quad (35)$$

$$F = 1/2 C_a [\dot{X}_a(t) - \Psi_{\sigma c} \dot{q}_\sigma(t)]^2 \quad (36)$$

$$\delta_{Wnc} = F e^{i\Omega t} \delta X_f = F e^{i\Omega t} \Psi_{\sigma c} \delta q_\sigma \quad (37)$$

$$\delta_{Wnc} = Q_\sigma \delta q_\sigma + Q_X \delta X_a = F e^{i\Omega t} \Psi_{\sigma c} + 0 \delta X_a \quad (38)$$

Finalmente, aplicando as equações de *Lagrange* seguintes obtêm-se as equações do movimento:

$$\begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_\sigma \\ \ddot{X}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a \Psi_{\sigma c}^2 & -C_a \Psi_{\sigma c} \\ -C_a \Psi_{\sigma c} & C_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_\sigma \\ \dot{X}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (M_p \omega_\sigma^2 + k_a \Psi_{\sigma c}^2) & -k_a \Psi_{\sigma c} \\ -k_a \Psi_{\sigma c} & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_\sigma \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F e^{i\Omega t} \Psi_{\sigma c} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Para simplificar a notação e melhor representar a física do problema, definem-se as seguintes variáveis efetivas e variáveis adimensionais:

$$M_{ef} = M_p / \Psi_{\sigma c}^2 \quad (40)$$

$$K_{ef} = M_p \omega_\sigma^2 \quad (41)$$

Considerando para este modelo as seguintes variáveis:

$$\mu_{ef} = m_a / M_{ef} = \text{razão de massas} \quad (42)$$

$$g = \Omega / \omega_\sigma = \text{razão de freq. forçadas} \quad (43)$$

$$\omega_a = \sqrt{k_a / m_a} = \text{freq. nat. do ADV} \quad (44)$$

$$f = \omega_a / \omega_\sigma = \text{razão de freq. nat.} \quad (45)$$

$$\eta_a = C_a / (2m_a \omega_\sigma) = \text{fator de amort. do ADV} \quad (46)$$

Obtendo-se então a solução desejada para o sistema de *N gdl*, que é notadamente similar à formulação para 1 *gdl*:

$$\frac{|X_i|}{F K_{ef}^{-1}} = \Psi_{\sigma i} \Psi_{\sigma f} \sqrt{\frac{(2\eta_a g)^2 + (g^2 + f^2)^2}{(2\eta_a g)^2 (g^2 - 1 + \mu_{ef} g^2)^2 + [\mu_{ef} f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}} \quad (47)$$

3. CONCLUSÕES

O presente trabalho oferece o embasamento teórico do estudo de ADVs em diversas configurações, e proporciona também uma base teórica para o estudo do tema. A introdução à teoria dos absorvedores dinâmicos de vibrações aqui fornecida, voltada para absorvedores de um grau de liberdade aplicados à sistemas amortecidos ou não e a teoria modal foram apresentadas. Também é desenvolvido um estudo de otimização paramétrica do ADV, objetivando a obtenção de valores dos parâmetros do ADV para que este tenha uma resposta dinâmica ótima.

Vale ressaltar também que, dentre os modelos aqui apresentados, cada um se adapta a um tipo de aplicação. Estes modelos variam em complexidade, e muitas vezes um modelo simplificado representa suficientemente bem a realidade, apesar de haver modelos mais complexos e detalhados. Para a determinação do modelo mais adequado para cada situação pode ser feita uma análise da influência de parâmetros, para determinar, por exemplo, a necessidade de considerar ou não o amortecimento na modelagem.

4. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE) pelo apoio às suas atividades de pesquisa.

5. ABSTRACT

In many situations structures and machines operate with an exaggerated level of vibrations, inducing a reduced lifecycle and improper operation regime to this machines. Among the existing techniques to control and reduce vibration amplitudes, the Dynamic Vibrations Absorbers offer good solutions. This DVAs exist in the most diverse configurations, sizes and working principles, as well as it's tuning methods. The present work offers a review of the classic theory about DVAs, seen by a design and optimization point of view, aiming for optimum designs using the traditional configurations usually adopted for this important mechanical system.

6. REFERÊNCIAS

- Cunha Jr., S. S. (1999). *Estudo teórico e numérico de absorvedores dinâmicos de vibrações*. Uberlândia, Mg, Brasil: FEMEC-UFU.
- Dimaragonas, A. (1996). *Vibrations for engineers*. Prentice Hall.
- Frahm, H. (1911). Device for Damping Vibrations of Bodies. *US Patent 989* , 958 .
- Gérardin, M., & Rixen, D. (1997). *Mechanical Vibrations - Theory and Application to Structural Dynamics*. U.K.: John Wiley & Sons.
- H. Moradi, F. B.-N. (2008). Tuneable vibration absorber design to suppress vibrations. *Journal of Sound and Vibration* , pp. 93-108.
- Hartog, J. P. (1956). *Mechanical Vibrations*. New York: McGraw-Hill.
- Jacquot, R. G. (1978). Optimal Dynamic Vibration Absorber for General Beam Systems. *60*, pp. 535-542.
- Korenev, B. G., & Reznikov, L. M. (1993). *Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Technical Applications*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Lamancusa, P. L. (1992). A variable stiffness vibration absorber for minimization of transient vibrations. *Journal of Sound and Vibration* , pp. 195-211.
- Meirovitch, L. (2001). *Fundamentals of Vibrations*. New York: McGraw-Hill.
- Nissen, J. B.-C. (1982). The broadband dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration* , pp. 573-578.
- Tsuruta, K. M. (2015). *Investigação Numérica e Experimental de Dispositivos Piezelétricos Combinando Geração de Energia e Atenuação de Vibrações*. Uberlândia: FEMEC - UFU.
- Warburton, G. B. (1980). Optimum Absorber Parameters for Simple Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 8 , pp. 197-217.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.