

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO CONTORNO INATIVO NOS TEMPOS DE PENETRAÇÃO E DESVIO DE CALOR DE MODELOS 1D

Luís Henrique da Silva Ignacio, UFU, luishenrique.meta@yahoo.com.br

Ana Paula Fernandes, UFU, anapaula@mecanica.ufu.br

Gilmar Guimarães, UFU, gguima@mecanica.ufu.br

Resumo. Os tempos de penetração e desvio de calor determinam, respectivamente, o tempo necessário para que a condição de contorno ativa comece a influenciar em um determinado ponto e o tempo gasto para que a condição de contorno inativa influencie este mesmo ponto. A aplicação de tais tempos se mostra bastante importante para simplificar modelos. Em alguns casos, problemas tridimensionais podem ser reduzidos a bi ou unidimensionais sem perda de precisão, ou problemas unidimensionais com geometria finita podem ser reduzidos a problemas de geometria mais simples como a semi-infinita. Neste estudo foram calculados os tempos de penetração e desvio de calor para os modelos X21, X22 e X23 em várias posições. O objetivo do estudo é analisar a influência do contorno inativo nos tempos de penetração e desvio de calor. As soluções diretas dos modelos foram obtidas usando Funções de Green.

Palavras chave: tempo de penetração e desvio de calor, condição de contorno inativa, X21, X22, X23.

1. INTRODUÇÃO

O uso de soluções analíticas tem um papel extremamente importante na análise térmica de diversas aplicações práticas, desde problemas de engenharia a aplicações em medicina. Por exemplo, a modelagem de problemas térmicos é sempre necessária em vários processos de fabricação onde a geração de calor esteja presente. Neste exemplo ou na maioria dos processos reais os problemas são multidimensionais e as condições de contorno são normalmente não homogêneas. As soluções analíticas obtidas nestes casos podem apresentar certa complexidade, requerendo uma habilidade específica para a sua implementação e uso (Fernandes et al., 2015).

Todavia, vários problemas térmicos multidimensionais ou com geometrias complexas podem ser simplificados, dependendo da observação da ocorrência dos fenômenos físicos presentes no processo. Em alguns casos, problemas tridimensionais podem ser reduzidos a problemas bi ou unidimensionais sem perda de precisão. Em outros casos, problemas unidimensionais com geometria finita podem ser reduzidos a problemas de geometria mais simples como a semi-infinita. A possibilidade física de análise dessas condições permitem a obtenção de soluções simplificadas e com a mesma confiança e precisão da formulação mais geral e complexa.

O potencial de uso dessas simplificações é grande e abrangente podendo, por exemplo, ser aplicado na solução de problemas inversos, obtendo-se estimativas de fluxo de calor em regiões inacessíveis à instrumentação utilizando soluções analíticas suficientemente simples. Tais simplificações são realizadas tendo como base os valores dos tempos de penetração e desvio de calor.

O presente trabalho tem por objetivo analisar a influencia do contorno inativo nos tempos de penetração e desvio de calor para várias posições em uma placa plana com espessura L. Definiu-se que a placa está sujeita a um fluxo de calor como condição ativa em $x=0$ e a superfície oposta, $x=L$, sujeita a três tipos de contorno inativo: temperatura prescrita, isolamento e convecção, sendo os modelos denominados X21, X22 e X23, respectivamente.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Problema direto

Os problemas foram definidos como uma placa plana de espessura L inicialmente a uma temperatura de equilíbrio e submetida instantaneamente em um tempo $t > 0$ a um fluxo de calor q'' , em $x = 0$ enquanto a face oposta: com temperatura prescrita $T_1 = 25^\circ\text{C}$, isolamento e exposta a um meio convectivo com um coeficiente de troca de calor, $h = 5$ [$\text{W/m}^2\text{K}$] e temperatura $T_\infty = 25^\circ\text{C}$. Esses problemas são descritos pelas Eqs. (1), (2) e (3) da difusão de calor mostradas a seguir.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t) \quad X21: -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = T_1; \quad X22: -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0; \quad X23: -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h\theta \quad (2)$$

$$\theta(x,0) = 0 \quad (3)$$

Nas Eq. (1), (2) e (3) a variável θ é definida como $\theta(x,t) = T(x,t) - T_\infty$. Os parâmetros k e α são, respectivamente, a condutividade e a difusividade térmica do material e h é o coeficiente de transferência de calor por convecção.

O problema térmico dado pelas Eq. (1), (2) e (3) pode ser resolvido usando o método das funções de Green (Cole et al., 2010). Nesse caso a solução é dada pela Eq. (4).

$$\theta(x,t) = \alpha \int_0^t G(x,t | 0, \tau) \frac{q(\tau)}{k} d\tau \quad (4)$$

Onde a $G(x,t | x', \tau)$ é a função de Green, denominada G_{XII} . Para o modelo X21 ela é dada pela Eq.(5), para o X22 pela Eq.(6) e X23 pela Eq.(7).

$$G_{X21}(x,t | x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha (t-\tau) / L^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (5)$$

$$G_{X22}(x,t | x', \tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \pi^2 \alpha (t-\tau) / L^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (6)$$

$$G_{X23}(x,t | x', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha (t-\tau) / L^2} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right) \cos\left(\beta_m \frac{x'}{L}\right) \quad (7)$$

Sendo β_m os autovalores do problema, obtidos através da solução das equações mostradas na Eq. (8).

$$X21: \beta_m = \pi \left(m - \frac{1}{2} \right); \quad X23: \beta_m \tan(\beta_m) = B_2, \text{ sendo } B_2 = \frac{hL}{k} \quad (8)$$

Substituindo a função de Green, mostrada nas Eqs. (5), (6) e (7), na Eq. (4) e considerando o fluxo de calor constante, obtem-se as soluções analíticas dos modelos X21, X22 e X23, que são mostradas nas Eq. (9), (10) e (11), respectivamente.

$$\theta_{X21} = \frac{q_0 L}{k} \left(1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{2q_0 L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \quad (9)$$

$$\theta_{X22} = \frac{\alpha q_0 t}{kL} - \frac{2q_0 L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \pi^2 \alpha t / L^2} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{m^2 \pi^2} + \frac{q_0}{k} \left(\frac{L}{3} - x + \frac{x^2}{2L} \right) \quad (10)$$

$$\theta_{X23} = \frac{2q_0 L}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 + B_2^2}{\beta_m^2 + B_2^2 + B_2} \frac{\cos\left(\beta_m \frac{x}{L}\right)}{\beta_m^2} \left[1 - e^{-\beta_m^2 \alpha t / L^2} \right] \quad (11)$$

Observa-se que a solução do modelo X23 mostrada na Eq. (11) envolve um somatório que é função do número de autovalores β_m . Estes autovalores, por sua vez devem ser calculados através da solução da equação transcendental dada pela Eq. (8). Caso o problema real abordado envolva as três dimensões, a solução do campo de temperatura envolveria três somatórios e o cálculo de três equações transcendentais (Fernandes et al., 2015). Uma alternativa é a abordagem do

problema considerando a placa finita como um meio semi-infinito, ou seja, com espessura muito grande, o qual é denominado neste trabalho como modelo auxiliar.

Obviamente, somente em determinadas condições físicas e ou geométricas e para determinadas posições da placa a evolução de temperatura será a mesma para os modelos originais (X21, X22 e X23) e o modelo auxiliar (X20). Nestas condições, como o fluxo de calor imposto em $x = 0$ é o mesmo para todos os modelos, o modelo semi-infinito poderia ser usado para a estimativa do fluxo de calor aplicado no problema original. A função de Green para o modelo semi-infinito do problema auxiliar é dada por Cole et al. (2010) e é mostrada na Eq. (12).

$$G_{X20}(x, t | x', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha(t-\tau)}} \right] \quad (12)$$

Substituindo a função de Green, mostrada na Eq. (12), na Eq. (4) e considerando o fluxo de calor constante, obtém-se a solução analítica do modelo X20, mostrada na Eq. (13).

$$\theta_{X20} = \frac{q_0}{k} \sqrt{4\alpha t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \quad (13)$$

2.2. Tempos de penetração e desvio de calor

Observa-se que as soluções analíticas dos modelos térmicos da placa plana (problemas originais) e semi-infinito (problema auxiliar), mostradas nas Eq. (7), (8), (9) e (10), representam soluções exatas de seus respectivos modelos. Todavia, o comportamento dessas soluções originais é idêntico ao da solução auxiliar em determinadas condições físicas e/ou geométricas num certo intervalo de tempo. De fato, uma vez determinadas estas regiões e este intervalo, ambas as soluções podem ser usadas indistintamente. Ainda, uma vez identificado esse comportamento, cada solução na realidade verifica a outra. A este tipo de verificação dá-se o nome de verificação intrínseca (Cole et al., 2014), pois cada solução exata é obtida e implementada numericamente de forma independente. Duas variáveis fundamentais para o estabelecimento físico desta verificação são dadas pelos chamados tempos de penetração de calor e tempo de desvio de calor que indicam, respectivamente, a influência da condição de contorno ativa e da condição de contorno inativa no interior da placa plana.

Ou seja, nesse trabalho, o tempo de penetração de calor determina quanto tempo leva para que uma determinada posição x seja influenciada pela pelo fluxo de calor $q(t) = q_0$, nesse caso, o tempo em que a temperatura em um determinado ponto começa a mudar em uma fração de 10^{-n} em relação à temperatura em $x = 0$ (Cole et al., 2014; de Monte et al., 2008). Já o tempo de desvio de calor representa o tempo gasto para que o efeito da condição inativa influencie em uma determinada posição x , ou seja, o instante em que os modelos originais divergem do auxiliar.

de Monte et al. (2008) define em seu trabalho uma relação para a obtenção do tempo de penetração de calor, a qual é mostrada na Eq. (14).

$$\frac{\theta_{X20}(x, t)}{\theta_{X20}(0, t)} = 10^{-n} \quad (14)$$

Nota-se que a Eq. (14) é uma relação entre a temperatura na posição em que se deseja calcular o tempo de penetração de calor e a temperatura em $x = 0$. Ambas temperaturas são calculadas pela expressão do modelo semi-infinito, pois a definição de tempo de penetração de calor leva em consideração apenas a condição de contorno ativa que é preservada por este modelo. Nela é aplicada uma fração aceitável de mudança na temperatura na posição x analisada e assim possa ser usada nos cálculos. O expoente n define a dimensão desta variação aceitável.

Já para o tempo de desvio de calor de Monte et al. (2008) sugere em seu trabalho uma outra relação de temperatura, a qual é mostrada na Eq. (15).

$$\frac{\theta_{X2J}(x, t) - \theta_{X20}(x, t)}{\theta_{X20}(0, t)} = 10^{-n}, \text{ sendo } J=1,2 \text{ ou } 3 \quad (15)$$

Nota-se que o numerador desta relação é a diferença de temperatura entre os modelos finito e semi-infinito, por esta razão o tempo de desvio de calor determina o instante em que o modelo de placa plana finita diverge da placa semi-infinita. Trabalha-se com $\theta(x, t)$, pois para a aplicar a Eq. (15) a condição de contorno em $x = L$ deve ser homogênea. De forma análoga ao tempo de penetração de calor, na Eq. (15) também é aplicado um limite de ordem decimal aceitável, o

qual tem dimensão definido pelo expoente n . O tempo de desvio de calor será o primeiro valor de tempo que atinja o limite definido através de tal expoente.

3. RESULTADOS

Os cálculos dos tempos de penetração e desvio de calor foram realizados considerando dois materiais: o Policloreto de Vinila (PVC) e o Metal Duro ISO K10. Foram escolhidos estas materiais, pois eles apresentam características térmicas opostas, sendo o PVC um bom isolante e o Metal Duro um bom condutor. As propriedades térmicas de ambos materiais são mostradas na Tab. (1).

Tabela 1. Propriedades térmicas do PVC e metal duro ISO K10.

Propriedades Térmicas	PVC	Metal Duro Iso K10
α (m ² /s)	1.17×10^{-7}	4.36×10^{-5} ^{(1) (2)}
k (W/mK)	0.15	130 ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Engqvist et al. (2000) ⁽²⁾ Brito et al. (2009)

Considerou-se um placa plana com comprimento $L=10$ mm. Os tempos foram calculados para cinco posições, espaçadas de 2 e 2 mm e começando em $x=2$ mm. Para o expoente n foram atribuídos três valores: 2, 4 e 10.

Utilizando as Eqs. (13) e (14) calculou-se os tempos de penetração de calor para os materiais anteriormente apresentados, como mostrado na Tab. (2). Apenas analisando a Eq. (14) é possível concluir que não haverá diferença entre os tempos de penetração de calor dos modelos X21, X22 e X23, pois todos tem o modelo X20 como modelo auxiliar.

Tabela 2. Tempos de penetração de calor [s].

n x(mm)	PVC			Metal Duro		
	2	4	10	2	4	10
2	3.3134	1.3217	0.4426	0.0089	0.0036	0.0012
4	13.2534	5.2866	1.7701	0.0356	0.0142	0.0048
6	29.8200	11.8949	3.9828	0.0801	0.0320	0.0107
8	53.0133	21.1465	7.0804	0.1423	0.0568	0.0191
10	82.8333	33.0414	11.0632	0.2224	0.0887	0.0297

Já para o cálculo dos tempos de desvio de calor foram utilizadas as Eqs. (9), (10), (11), (13) e (15). Independente da solução do modelo original utilizado os valores dos tempos de desvio de calor foram idênticos. Tais valores são apresentados na Tab. (3).

Tabela 3. Tempos de desvio de calor [s].

n x(mm)	PVC			Metal Duro		
	2	4	10	2	4	10
2	266.5070	107.0080	35.9754	0.6836	0.2867	0.0958
4	220.6730	84.8890	28.4250	0.5657	0.2273	0.0763
6	169.2000	65.0100	21.7629	0.4357	0.1739	0.0584
8	123.5760	47.7740	15.9891	0.3202	0.1277	0.0429
10	82.8333	33.1810	11.1035	0.2224	0.0888	0.0298

Uma vez determinados os valores dos tempos de penetração e desvio do calor, pode-se calcular os respectivos tempos adimensionais de penetração e desvio de calor, definidos pela equações $t_{pen}^+ = \alpha t_{pen} / x^2$ e $t_{desv}^+ = \alpha t_{desv} / (2L - x)^2$, respectivamente. Os valores obtidos para os tempos adimensionais foram iguais e são apresentados na Tab. (4).

Tabela 4. Tempos adimensionais de penetração e desvio de calor.

x(mm) \ n	PVC			Metal Duro		
	2	4	10	2	4	10
2	0.0970	0.0387	0.0130	0.0971	0.0393	0.0131
4	0.0970	0.0387	0.0130	0.0971	0.0387	0.0131
6	0.0970	0.0387	0.0130	0.0970	0.0388	0.0130
8	0.0970	0.0387	0.0130	0.0970	0.0387	0.0130
10	0.0970	0.0387	0.0130	0.0970	0.0388	0.0130

Os tempos adimensionais tanto de penetração como de desvio de calor dependem apenas do expoente n . Como eles são independentes do material podem ser considerados como parâmetros do modelo unidimensional de condução de calor.

Tomando como exemplo a posição $x=2$ mm no PVC e o expoente $n=2$ pode-se afirmar que de 0 a 266.5070 segundos as soluções X2J e X20, com $J=1, 2$ ou 3 , são seguramente equivalentes e que o fluxo de calor leva 3.3134 segundos para atingir tal posição. Mantendo o mesmo material e o expoente, mas mudando para a posição $x=10$ mm, nota-se que o tempo de penetração e desvio são iguais. Isto ocorre, pois esta posição coincide com o comprimento L da placa plana, que é onde está o contorno inativo do modelo.

4. REFERÊNCIAS

- Brito, R.F., Carvalho, S.R., de Lima e Silva, S.M.M. and Ferreira, J.R., 2009. “Análise térmica em ferramenta de metal duro revestida”. V Congresso Brasileiro de Engenharia de fabricação.
- Cole, K.D., Beck, J.V., Haji-Sheikh, A. and Litkouhi, B., 2010. Heat Conduction Using Green’s Functions. Taylor & Francis Group, Whashington, 2nd edition.
- Cole, K.D., Beck, J.V., Woodbury, K.A. and de Monte, F., 2014. “Intrinsic verification and a heat conduction database”. Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 78, pp. 36–47.
- de Monte, F., Beck, J.V. and Amos, D.E., 2008. “Diffusion of thermal disturbances in two-dimensional cartesian transient heat conduction”. Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 51, pp. 25–26.
- Engqvist, H., Hogberg, H., Botton, G.A., Ederyd, S. and Axén, N., 2000. “Tribofilm formation on cemented carbides in dry sliding conformal contact”. Wear, Vol. 239, pp. 219–228.
- Fernandes, A.P., dos Santos, M.B. and Guimarães, G., 2015. “An analytical transfer function method to solve inverse heat conduction problems”. Applied Mathematical Modelling, pp. –.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio das agências de pesquisa governamentais brasileiras CAPES, CNPq e FAPEMIG.

6. ABSTRACT

The heat penetration and deviation times determines, respectively, the time required for the active boundary condition begins to influence at a certain point and the time spent by the inactive boundary condition to influence this same point. The application of these times is very important to simplify models. In some cases, three-dimensional problem can be reduced to bi or one-dimensional without loss of accuracy, or dimensional problems with finite geometry can be reduced to simpler geometry problems as the semi-infinite. In this study were calculated the heat penetration and deviation times of the models X21, X22 and X23 at many positions. The aim of the study is to analyze the influence of the inactive boundary condition in the heat penetration and deviation times. Direct solutions of the models were obtained using Green’s functions.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.