

ANÁLISE DE FADIGA EM SISTEMAS DINÂMICOS SUJEITOS A CARGAS CÍCLICAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

U. L. Rosa¹

A. M. G. de Lima²

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Eng. Mecânica, Campus Santa Mônica, 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil

¹ulisses.ufu@hotmail.com

²amglima@mecanica.ufu.br

Resumo. O dimensionamento de uma estrutura depende de diversos fatores, destacando-se o meio onde atuará e a forma como será solicitada. No caso de estruturas submetidas a carregamentos aleatórios um dos principais problemas existentes é a falha do material por fadiga, que ocorre sem aviso prévio e geralmente de maneira súbita e catastrófica. Nesses casos devem ser aplicados métodos estatísticos para sua caracterização e análise. O interesse dessa contribuição é descrever o fenômeno de fadiga por meio de um modelo de elementos finitos no qual a estimativa dos danos acarretados por fadiga é obtida através da aplicação do critério de Sines. A utilização desse critério faz necessária a análise do sistema no domínio de Fourier por meio de densidades espectrais de potência em tensão da estrutura sujeita a um carregamento do tipo ruído branco. Após o desenvolvimento teórico dos métodos e critérios são apresentados alguns resultados obtidos pela análise de uma placa fina sujeita a carregamentos multiaxiais aleatórios do tipo Gaussianos, obtendo como resultado a probabilidade de falha para cada elemento da estrutura.

Palavras chave: fadiga, vibrações, critério de Sines, elementos finitos

1. INTRODUÇÃO

A maior parte de ensaios mecânicos que visam a determinação de parâmetros relacionados a tensão e deformação requerem aplicação de cargas graduais e quase estáticas. Além disso em alguns deles as cargas são aplicadas somente uma vez e o corpo de prova é destruído (Budynas e Nisbett, 2011). Esses testes avaliam com precisão apenas algumas propriedades do material, como módulo de elasticidade, limites elásticos e resistência mecânica. Apesar disso, eles não aproximam as condições reais de operação da maior parte das estruturas.

Dimensionar uma estrutura para aplicação de cargas estáticas não é um processo complexo, visto que os limites de resistência estão disponíveis para a maior parte dos materiais. Caso haja algum tipo de carga cíclica ou aleatória atuando na estrutura pode ocorrer o fenômeno de fadiga, cuja falha é geralmente dada por fratura súbita em tensões inferiores às tensões de escoamento do material (Dowling, 2007).

Lambert (2007) enfatiza que as trincas por fadiga geralmente aparecem em pontos críticos da estrutura, tais como mudanças de geometria, pontos de aplicação de carga e pontos de restrição de movimento (engastes e apoios, por exemplo). Os métodos de prevenção desse tipo de falha envolvem levantamentos estatísticos sobre o carregamento e as tensões na estrutura. Um desses métodos envolve o uso do diagrama tensão-número de ciclos (S-N) e históricos temporais de tensão. Esse é um método viável, porém impraticável devido ao alto custo computacional e tempo envolvidos na aquisição de dados e pós-tratamento. A melhor forma então é trabalhar no domínio da frequência através da análise estatística de densidades espectrais de potência (do inglês PSD) da estrutura.

Ao longo dos anos vários critérios para análise multiaxial de fadiga foram estabelecidos (Weber, 1999). O critério de Sines (1959) utiliza como parâmetros a raiz quadrada do segundo invariante do tensor desvio de tensão e propriedades do material relativas à ensaios de fadiga. Li e de Freitas (2002) desenvolveram um método de estimação deste segundo invariante, envolvendo momentos espectrais obtidos das PSDs.

Um modelo de elementos finitos foi desenvolvido para uma placa fina sujeita à esforços do tipo ruído branco Gaussiano visando a obtenção das respostas em tensão no domínio da frequência e a estimativa da probabilidade de falha de cada elemento foi aplicada ao modelo por meio do critério de Sines.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O objetivo dessa seção é apresentar a formulação do método dos elementos finitos utilizada na modelagem do problema. A estrutura considerada nesse estudo é uma placa fina de alumínio bi-engastada ao longo do eixo y . Possui dimensões $0.654m \times 0.527m$ discretizada por uma malha 12×12 composta por elementos retangulares de quatro nós. Cada um deles possui cinco graus de liberdade (GDL), sendo três deslocamentos planos nas direções x, y, z (denotados por u_0, v_0, w_0) e duas rotações (denotadas por θ_x, θ_y) gerando então um total de 845 GDL na estrutura completa.

As propriedades mecânicas e geométricas da placa são mostradas na Tab. (1). Um esquema simplificado apresentando os eixos e a malha podem ser vistos na Fig. (1).

Tabela 1. Propriedades da placa de alumínio

Espessura (mm)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson	Massa Específica (kg/m³)	Limite de Ruptura (MPa)	Limite de Torção Alternada ⁽¹⁾ (MPa)	Limite de Tração Alternada ⁽¹⁾ (MPa)
1.5	70	0.33	2700	343	92	132

⁽¹⁾obtidos para 2.0×10^6 ciclos

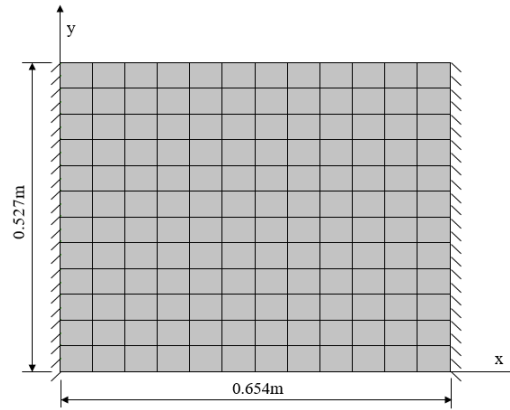


Figura 1. Esquema de malha da placa fina

Para obtenção das equações de movimento desse sistema foi aplicada a teoria de placas de Kirchhoff (Zienkiewicz e Taylor, 2005). Os campos de deslocamento são dados pela Eq. (1).

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x, y, z, t) \\ \mathbf{v}(x, y, z, t) \\ \mathbf{w}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + z\theta_x \\ v_0 + z\theta_y \\ w_0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Os elementos no lado direito das equações representam os graus de liberdade dessa estrutura. Na formulação do método dos elementos finitos, o sistema contínuo é aproximado pelas chamadas funções de forma, como mostrado na Eq. (2).

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(z)\mathbf{N}(x, y)\mathbf{u}_e(t) \quad (2)$$

onde $\mathbf{A}(z)$ é uma matriz contendo o parâmetro z da Eq. (1), $\mathbf{N}(x, y)$ são as funções de forma e $\mathbf{u}_e(t)$ é o vetor nodal de deslocamentos.

As funções de forma são utilizadas também no cálculo as propriedades de massa e rigidez do sistema. Após realizada a discretização, essas propriedades são representadas por matrizes quadradas, simétricas e de dimensão igual ao número total de graus de liberdade. Seu cálculo envolve desenvolvimento baseado no método variacional energético (energia cinética para cálculo da massa e potencial para a rigidez). A formulação é primeiramente desenvolvida para cada elemento em seu volume elementar V_e e depois expandida para o sistema global por meio da conectividade dos nós. Equações (3) e (4) mostram a obtenção das matrizes elementares (Faria, 2006).

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}(x, y)^T \mathbf{N}(x, y) dV_e \quad (3)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \dot{\mathbf{N}}(x, y)^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{N}}(x, y) dV_e \quad (4)$$

onde $\mathbf{H}$ é a matriz de propriedades mecânicas, dependendo do material da estrutura.

Dessa forma é possível escrever a equação diferencial de movimento do sistema não-amortecido cuja solução estima os campos de deslocamento. Sua formulação é mostrada na Eq. (5).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5)$$

onde $\mathbf{F}$ representa uma carga externa aplicada à estrutura.

Os campos de deformação do sistema podem ser calculados através da aplicação de técnicas de derivação clássicas da resistência dos materiais ao campo de deslocamentos. Esse método é descrito detalhadamente no trabalho referenciado de Timoshenko e Goodier (1951). Para facilitar a representação que será usada posteriormente, introduz-se a notação $\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{D} \mathbf{A}(z) \mathbf{N}(x, y)$ e obtém-se o vetor de deformação através da Eq. (6).

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{u}_e(t) \quad (6)$$

Através da aplicação da lei de Hooke generalizada (Boresi et al., 2011) obtém-se finalmente através da Eq. (7) os campos de tensão para cada elemento da estrutura.

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) \quad (7)$$

3. RESPOSTA EM TENSÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Assumindo que funções de auto correlação e correlação cruzada do sistema existem é possível definir funções de densidade espectral via funções de correlação (Bendat e Piersol 2010). A formulação da matriz de densidade espectral de potência de deslocamento no domínio de Fourier é mostrada na Eq. (8).

$$\boldsymbol{\phi}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (8)$$

onde $\mathbf{R}_u(\tau)$ é a função de auto correlação do campo de deslocamentos sujeita a um carregamento impulsivo $g(t)$ no domínio do tempo.

Utilizando as definições da transformada de Fourier e propriedades da densidade espectral de potência (Lambert, 2007) é possível formular a Eq. (9), que calcula a PSD em tensão $\boldsymbol{\phi}_s(\omega)$ através da função resposta em frequência ao impulso $\mathbf{G}(\omega)$.

$$\boldsymbol{\phi}_s(\omega) = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{G}(\omega) \boldsymbol{\phi}_f(\omega) \mathbf{G}^H(\omega) \mathbf{B}^T \mathbf{H}^T \quad (9)$$

onde $\boldsymbol{\phi}_f(\omega)$ é a densidade espectral de potência dos esforços externos aplicados.

4. CRITÉRIO DE FADIGA DE SINES

Para a análise de fadiga multiaxial existem diversos critérios disponíveis na literatura. Webber (1999) estudou diversos desses critérios em seu trabalho e apontou que os melhores resultados foram gerados através do critério de Sines, que utiliza o segundo invariante do tensor desvio de tensão e apenas duas propriedades de resistência a tensões alternadas (tração alternada f_{-1} e torção alternada t_{-1}).

Sines (1959) estabeleceu um coeficiente chamado D_{Sines} que expressa a probabilidade de falha da estrutura. Ele é calculado de forma estatística quando a estrutura está sujeita a carregamentos aleatórios. Sendo assim, o fator que se usa na estimativa da vida em fadiga do material é sua esperança matemática, dada pela Eq. (10).

$$E[D_{Sines}] = \frac{E[\sqrt{J_{2,a}}] + \alpha E[p(t)]}{A} \quad (10)$$

onde $\sqrt{J_{2,a}}$ é uma estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desvio, $p(t)$ é o vetor de tensões hidrostáticas, $A = t_{-1}$, $\alpha = \frac{3t_{-1}(R_m + f_{-1})}{f_{-1}R_m} - \sqrt{6}$ e R_m o limite de ruptura.

A estimativa de $\sqrt{J_{2,a}}$ é obtida através de um método proposto por Li e de Freitas (2002), através do caminho elíptico percorrido pelo invariante. Esse método foi expandido por Lambert et al. (2010) e pode ser encontrado de forma detalha no trabalho referenciado.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1. Efeito da espessura

Em um primeiro momento foram obtidas as respostas em tensão no domínio de Fourier (PSD) para cada elemento da placa através da Eq. (9). O sistema foi solicitado por um ruído branco do tipo Gaussiano com $\phi_r(\omega) = 85 \times 10^3 \text{ Pa}^2/\text{Hz}$ no centro da placa. A Fig. (2) apresenta os resultados obtidos para um elemento no meio da placa, e mostra como a magnitude forma das curvas de tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} se alteram com o aumento da espessura da placa.

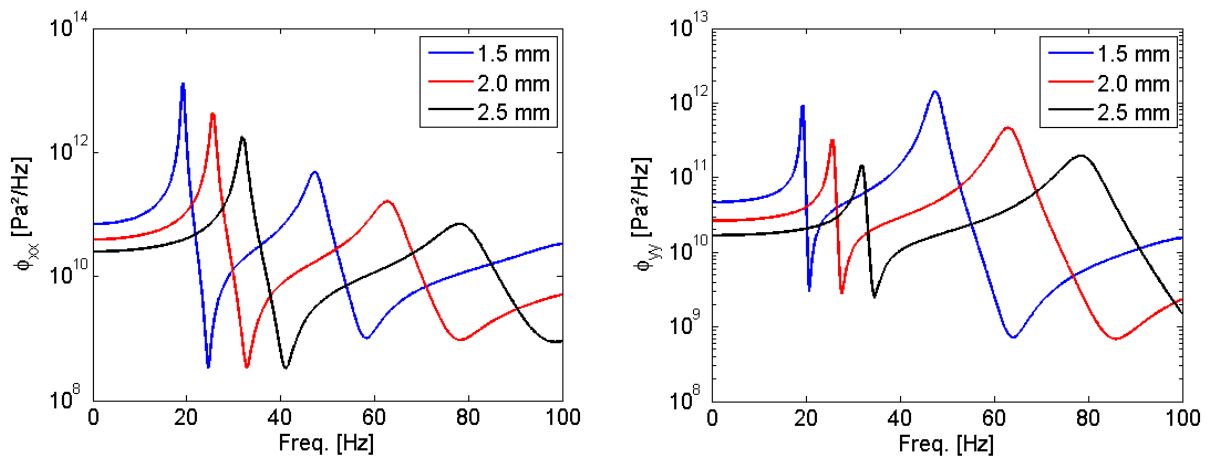


Figura 2. Curvas de tensão normal obtidas para um elemento central da placa com variação de espessura

Como as outras dimensões da placa continuam idênticas, um aumento na espessura reflete diretamente no aumento das propriedades de massa e rigidez do sistema. Sendo assim, os resultados esperados são um aumento no valor da frequência natural (obtido pelo pico dos gráficos da Fig. (2)) e diminuição dos valores da magnitude. Para análise de fadiga espera-se que estruturas mais espessas possuam níveis menores de tensão e tenham menos chance de falha.

5.2. Critério de fadiga de Sines

Após o cálculo da resposta em tensão para cada um dos 144 elementos da placa obtém-se uma estimativa para o segundo invariante do tensor desvio e aplica-se a Eq. (10), gerando a esperança matemática do coeficiente de Sines. Sua distribuição de valores é então plotada na Fig. (3), onde fica mais fácil notar os elementos onde estão a maior possibilidade de falha.

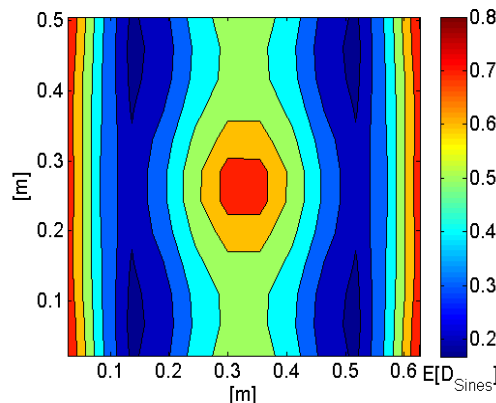


Figura 3. Distribuição da esperança matemática do coeficiente de fadiga de Sines

Analisando o gráfico da Fig. (3) observa-se que os maiores valores para o coeficiente de Sines são esperados nas bordas onde há os engastes e no ponto de aplicação da carga. Como esperado é nesses pontos onde estão as maiores tensões causadas por esforços cíclicos. Ressalta-se também, que quanto mais próximo da unidade, maior é a probabilidade de falha do elemento após dois milhões de ciclos.

Os resultados aqui mostrados são de grande relevância em aplicações de engenharia onde ocorrem flutuações nos valores dos esforços externos aplicados, como por exemplo na indústria aeroespacial e em análises sônicas de metais. Ao realizar um estudo desse tipo obtém-se os prováveis pontos de falha, tornando possível aplicar técnicas de manutenção preditiva de maneira mais efetiva e facilitando o monitoramento da integridade estrutural.

6. REFERÊNCIAS

- Bendat, J. S. e Piersol, A.G., 2010. *Random Data: Analysis and Measurements Procedures*. John Wiley & Sons, New Jersey, 4ª edição.
- Boresi, A. P., Chong, K. P. e Lee, J. D., 2011. *Elasticity in Engineering Mechanics*. John Wiley & Sons, New Jersey, 3ª edição.
- Budynas, R. G. e Nisbett, J. K., 2011. *Shigley's Mechanical Engineering Design*. McGraw-Hill, New York, 9ª edição.
- Dowling, N. E., 2007. *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue*. Pearson Prentice Hall, 3ª edição.
- Faria, A. W., 2006. *Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica*. Dissertação de mestrado,UFU , Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- Lambert, S., 2007. *Contribution à l'analyse d l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires*. Tese de Ph.D, INSA de Rouen, Rouen.
- Lambert, S., Pagnacco E. and Khalij, L., 2010. "A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects". *International Journal of Fatigue*, Vol. 32, p. 463-474.
- Li, B. e de Freitas, M., 2002. "A procedure for fast evaluation of high-cycle fatigue under multiaxial random loading". *Journal of Mechanical Design*, Vol. 124, p. 558-563.
- Sines, G., 1959. "Behavior of Metals Under Complex Static and Alternating Stresses", em *Metal Fatigue*, McGraw-Hill, New York.
- Timoshenko, S. e Goodier, J. N., 1951. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 2ª edição.
- Weber, B., 1999. *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque*. Tese de Ph.D., INSA de Lion, Lion.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R. L., 2005. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 6ª edição.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos à Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Laboratório de Mecânica das Estruturas José Eduardo Tannus Reis (LMest) e Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE) pela oportunidade e apoio concedidos à realização deste projeto de pesquisa e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pelo apoio financeiro.

8. ABSTRACT

The design of engineering systems depends on a number of factors, highlighting the environment where it will work and how it will be loaded. Considering structures subjected to random loadings one of the major problems is the material failure by fatigue that occurs with no previous notice and generally on a sudden and catastrophic way. On this case, the analysis and characterization of the phenomenon require the application of statistical methods. The interest of this contribution is to describe fatigue in thin plates. A model is developed applying classical finite elements method and fatigue estimation by Sines' criterion. This process requires Fourier's domain analysis of the system, using stress power spectral densities (PSD) of the structure submitted to a white Gaussian noise random loading. After the theoretical developments, the numerical results obtained by using a thin plate subjected to random multiaxial Gaussian loads are presented.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.