

MÉTODOS ESPECTRAIS PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BURGERS

Túlio Alves Rodrigues, MFlab, bonifacio@mec.ufu.br
Aristeu da Silveira Neto, MFlab, aristeu@mecanica.ufu.br

Resumo. A equação de Burgers é uma equação muito importante na fluidodinâmica. Ela é o modelo que mais se aproxima das equações de Navier Stokes, com exceção do gradiente de pressão e é uma das poucas com solução analítica conhecida, favorecendo assim sua solução e estudo. No presente trabalho buscou-se apresentar as diferenças entre os esquemas de discretização temporal para solução desta equação. Por meio deste, pode-se perceber o quão alta é a acurácia dos métodos espectrais, além do quanto se pode ganhar na escolha do método de discretização, ao ponto que para os métodos de quarta ordem quase se alcança erro de máquina.

Palavras chave: Metodo pseudoespectral, Equação de Burgers, Equação advecção difusão.

1. INTRODUÇÃO

A equação advecção difusão é tida como um modelo simplificado da equação de Navier-Stokes, com exceção do gradiente de pressão. Burgers propôs essa equação em 1948, que mais tarde receberia seu nome como homenagem. É uma importante equação para os estudos de acústica, dinâmica dos gases e turbulência (Canuto, 2006). Por ser uma das poucas equações com solução analítica, torna-se um importante modelo para validação de algoritmos.

A viscosidade ν apresenta papel fundamental no comportamento dessa equação. Quanto maior seu valor, menor e mais suave se torna a descontinuidade, facilitando assim sua simulação numérica, Basto *et al.* (2007).

Na literatura, pode encontrar diversas metodologias para se resolver a equação de Burgers, como Ozis e Aksan, por meio da transformação de Hopf Cole em elementos finitos além de várias metodologias de discretização temporal, Darvishi e Javidi (2006).

No presente trabalho, a equação de Burgers será resolvida utilizando a metodologia pseudo-espectral, comparando-se a influência da discretização temporal na acurácia, convergência e custo computacional do método.

2. MODELO MATEMÁTICO

Temos a equação de Burgers, vista na Eq. (1), nosso problema de partida. Por meio da transformação de Hopf Cole e utilizando a solução fundamental da equação do calor, pode-se obter o que foi proposto e exposto por Whitham (1974) e também enunciado por Canuto (2006), que utilizam uma solução para condições de contorno periódicas.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Canuto nos apresenta essa solução periódica, apresentada pela Eq. (2), onde c é a velocidade da onda, t representa o tempo, ν representa a viscosidade cinemática e n o índice do somatório.

$$u(x,t) = \frac{-2\nu \frac{\partial \phi(x-ct,t+1)}{\partial x}}{\phi(x-ct,t+1)} \quad (2)$$

$$\phi(x-ct,t+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[x-(2n+1)\pi]^2}{4\nu t}} \quad (3)$$

Por motivos de simplicidade, o presente trabalho utilizou constante $c=0$, obtendo assim as condições iniciais para $t=0$ como segue na Eq. (3):

$$u(x,0) = \frac{-2\nu \frac{\partial \phi(x,1)}{\partial x}}{\phi(x,1)} \quad (4)$$

$$\varphi(x,1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[x-(2n+1)\pi]^2}{4\nu}} \quad (5)$$

3. MODELO NUMÉRICO

Equações diferenciais podem ser resolvidas por diferentes metodologias, sendo a pseudo-espectral uma delas. Os métodos espectrais têm ganhado destaque recentemente e grande notoriedade quando se busca métodos de resolução de equações diferenciais, isso graças a sua ótima acurácia, Darvishi e Javidi (2006).

O método pseudo-espectral foi primeiramente proposto por Kreiss e Oliger (1972), onde podemos encontrar incrementos para essa teoria com Orszag (1972) e Fornberg(1975), (Fornberg , 1987). Mesmo com a grande vantagem de acurácia, o método pseudo-espectral apresenta uma relevante limitação, que é a necessidade de periodicidade do problema proposto e uma “malha” uniforme. Caso o problema não seja periódico, deve-se buscar formas de torna-lo para que esta metodologia possa ser utilizada.

Podemos observar na Eq.(4) o método espectral de Fourier aplicado a equação de Burgers, onde $\hat{\cdot}$ representa a transformada de Fourier aplicada a dada variável ou função.

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \quad (6)$$

Na Eq.(5) e Eq.(6) temos os termos tratados separadamente, onde podemos ver o termo k que representa o número de onda, que aparece quando se aplica a transformada de Fourier a uma derivada e $i = \sqrt{-1}$.

$$\widehat{u \frac{\partial u}{\partial x}} = [\hat{u}]^{-1} \left[\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}} \right]^{-1} = u[\widehat{ik\hat{u}}]^{-1} \quad (7)$$

$$\widehat{\nu \frac{\partial u}{\partial x}} = (ik)^2 \hat{u} = -\nu k^2 \hat{u} \quad (8)$$

Pode-se ver na Eq.(7) como o número de onda k utilizado nas equações (5) e (6) foi calculado no presente trabalho:

$$k(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_x}(n-1) & , \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_x}(n-1-N) & , \quad \frac{N}{2} + 2 \leq n \leq N \end{cases} \quad (9)$$

onde N representa o nó de colocação em dada direção, L_x representa o comprimento do domínio e n a posição em que se encontra ao longo do domínio.

3.1. Método de Euler

O Método de Euler é um método de discretização temporal de primeira ordem, o que significa que o erro é proporcional a raiz do passo espacial e também a derivada de primeira ordem da equação diferencial, Canale e Chapra (2010).

Da Eq.(4), podemos ver abaixo como o método de Euler é aplicado ao termo temporal:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\Delta t} = -\nu k^2 \hat{u}^n - u[\widehat{ik\hat{u}}] \quad (10)$$

3.2. Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta abrangem uma importante família de métodos de resoluções numéricas de equações diferenciais. Esses métodos tiveram origem com dois matemáticos alemães, Carl David Runge e Wilhelm Kutta, no princípio do século XX, (Valle, 2012).

Os métodos de Runge-Kutta são muito populares, e basicamente consistem em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, (Valle, 2012).

Pelo polinômio de Taylor com resto, se uma função $y(x)$ tiver $k+1$ derivadas contínuas em um intervalo aberto contendo a e x , podemos escrever:

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{(k+1)}}{(k+1)!} \quad (11)$$

sendo c algum número entre a e x .

No presente trabalho, foram utilizados os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem, quarta ordem e quarta ordem 6 passos.

- Runge-Kutta de segunda ordem (RK2)

O método RK2, também conhecido por Euler melhorado, pode ser escrito de acordo com Canuto(2006):

$$u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t [f(u^n, t^n) + f(u^n + \Delta t f(u^n, t^n), t^n + \Delta t)] \quad (12)$$

- Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)

O método RK4 é conhecido como clássico, sendo amplamente utilizado e com ótima acurácia. Segundo Canuto(2006) temos que o método é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(u^n, t_n) \\ k_2 &= f\left(u^n + \frac{1}{2} \Delta t k_1, t_n + \frac{1}{2} \Delta t\right) \\ k_3 &= f\left(u^n + \frac{1}{2} \Delta t k_2, t_n + \frac{1}{2} \Delta t\right) \\ k_4 &= f(u^n + \Delta t k_3, t_n + \Delta t) \\ u^{n+1} &= u^n + \frac{1}{6} \Delta t [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{aligned} \quad (13)$$

- Runge-Kutta de quarta ordem com 6 passos (RK46)

O método RK46 busca aliar a acurácia do RK4, aumentando sua estabilidade viabilizando a simulação de casos com passos de tempo maiores além da baixa dispersão e baixa dissipação numérica, Allampalli et al. (2009). Temos que esse método possui o seguinte algoritmo:

$$\widehat{AUX}_{l-1} = \alpha_1 \widehat{AUX}_{l-1} + \Delta t \widehat{RHS}_l^t \quad (14)$$

$$\widehat{u}_{l+1} = \widehat{u}_{l+1} + \beta_l \widehat{AUX}_{l-1} \quad (15)$$

onde $l=1,2,\dots,6$ é o passo do Runge-Kutta, AUX é uma variável auxiliar e α_1 e β_1 são constantes dadas pela tabela abaixo:

Tabela 1: Coeficientes do RK46.

it	α	β
1	0,0	0,122
2	-0,691750960670	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381841220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

4. RESULTADOS

Para o presente trabalho, foram analisados diferentes métodos de discretização temporal na solução da equação de Burgers. Por meio da Fig.(1) podemos ver a interferência do parâmetro ν representando a viscosidade cinemática, para solução analítica em $t=0[s]$. Por meio dele, podemos ver que quanto menor seu valor, maior será a descontinuidade e maior será a dificuldade para se simular tais casos, tanto devido à dispersão numérica quando alguns fenômenos conhecidos, como fenômeno de Gibbs, Bastos et al. (2007).

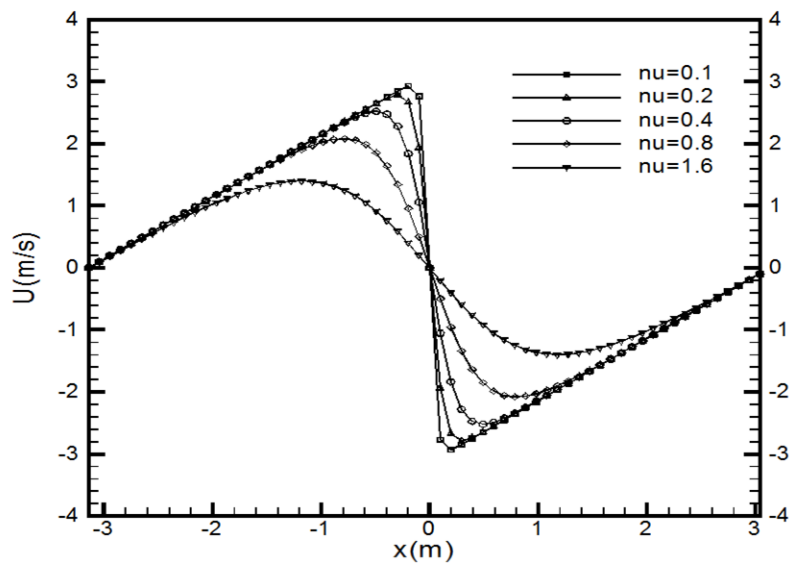


Figura 1. Solução exata da Equação de Burgers para $t=0[s]$.

Por meio da Tab.(2) podemos perceber que Euler apresenta os maiores valores, como esperado, por ser um esquema de primeira ordem. Analisando RK2 podemos perceber o ganho de acurácia ao utilizar um esquema de segunda ordem, ficando relativamente igual ao de quarta ordem para uma discretização de 16 e 32 pontos de colocação. Ao analisarmos os esquemas de quarta ordem, RK4 e RK46 percebemos o enorme ganho de acurácia quando comparados aos outros esquemas, se aproximando do erro de máquina tanto para 64 quanto 128 pontos de colocação.

Tabela 2: Erros máximos para resolver a Equação de Burgers para $v=1,0$.

N	<i>Euler</i>	<i>RK2</i>	<i>RK4</i>	<i>RK46</i>
16	5,04E-5	3,41E-5	3,41E-5	3,41E-5
32	5,04E-5	6,23E-9	6,18E-9	6,18E-9
64	5,04E-5	3,97E-9	9,99E-13	4,43E-12
128	5,04E-5	3,97E-9	9,99E-13	4,43E-12

Por meio da Tab.(3) podemos analisar os tempos de simulação para cada caso, analisando assim o custo computacional de cada caso. O custo computacional não deve ser analisado separadamente, pois podemos obter resultados isolados, ou seja, um esquema que é barato, porém apresenta acuraria ruim. Para tornarmos a análise mais fiel, utilizaremos a Tab.(2) em conjunto.

Como podemos observar, todos os esquemas apresentam custo computacional semelhante, com exceção do RK2, que para malhas grosseiras, ou seja, baixo número de nós de colocação, apresenta custo computacional maior que os demais. De maneira geral, podemos perceber que para se alcançar boa acurácia, para esse caso não estaremos gastando mais recursos ao utilizar esquemas de ordem mais elevada. Ao compararmos RK4 e RK46 percebemos comportamento basicamente igual, porém com o segundo podemos alcançar maior estabilidade, favorecendo assim a utilização do mesmo.

Tabela 3: Tempo computacional para simular Equação de Burgers para $v=1,0$.

N	<i>Euler</i>	<i>RK2</i>	<i>RK4</i>	<i>RK46</i>
16	9,397	16,542	9,656	9,728
32	18,999	18,954	19,229	19,401
64	36,887	37,280	38,155	38,992
128	73,399	75,363	76,142	77,726

5. CONCLUSÕES

Por meio deste trabalho, podemos concluir o quão importante a discretização temporal é ao se resolver problemas por meio da metodologia espectral. Pudemos perceber conforme esperado que os métodos espectrais apresentam ótima acurácia. Dentre os métodos apresentados, percebemos que os de quarta ordem apresentam ótimos resultados sem aumentar o custo computacional.

Levando em conta todos os métodos apresentados nesse trabalho, podemos perceber que para esse caso simulado é indicado a utilização dos métodos de quarta ordem, tendo em vista seu custo computacional e acurácia obtida.

6. REFERÊNCIAS

- Allampalli, V., Hixó, R., Nallasamy, M., Sawyer, S.D., 2009, “High-accuracy large-step explicit Runge-Kutta(HALE-RK) schemes for computational aeroacoustics.”, *Journal of Computational Physics*, Elsevier Inc., Vol. 228.
- Basto, M., Semião, V., Calheiros, F., 2007, “Dynamics in spectral solutions of Burgers equation.” *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- Canuto et al., 2006, “Spectral Methods Fundamentals in Single Domains.”, Springer, Berlin, Germany.
- Canale, R.P., Chapra, S.C., 2010, “Numerical methods for engineers” Sixth Edition,
- Darvishi, M.T., Javidi, M., 2006, “A numerical solution of Burger’s equation by pseudospectral methods and Darvishi’s preconditioning.” *Applied Mathematics and Computation*.
- Henningsson, B., Dagerman, M., 2005, “Simulations chromatographic processes finite volume method”, *Numerical methods for engineers*, Vol. 33.
- Mariano, F.P., 2007, “Simulação de Escoamentos Não-Periódicos Utilizando as Metodologias Pseudo-Spectral de Fourier e da Fronteira Imersa Acopladas.”, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Uberlândia.
- Whitiam, G.B., 1974, “Linear and Nonlinear Waves”, John Wiley and Sons, New York.

7. AGRADECIMENTOS

Agradeço ao apoio da CAPES, do MFLAB e PETROBRAS que direta e indiretamente propiciaram o desenvolvimento desse trabalho.

8. ABSTRACT

The advection-diffusion equation is very important mathematical model applied on fluid dynamic problems. For low values of viscosity, it can develop several discontinuities and more difficult will be the computational simulation. In the present work, this equation was tested with several numerical methods and analyzed the accuracy and computational cost, where we can see that RK4 and RK46 presented the best accuracy and convergence when we compare with all the other methods.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.