

SOLUÇÃO ANALÍTICA EM PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR COM MULTICAMADA

Gabriela Costa de Oliveira, Universidade Federal de Uberlândia, gabriela_costadeoliveira@hotmail.com

Ana Paula Fernandes, Universidade Federal de Uberlândia¹, anapaula@mecanica.ufu.br

Sidney Ribeiro, Universidade Federal de Uberlândia, sidney.ribeiros@hotmail.com

Gilmar Guimarães, Universidade Federal de Uberlândia, gguima@mecanica.ufu.br

Resumo. Este trabalho apresenta o método de obtenção da solução analítica da temperatura para problema de transferência de calor multicamada, ou seja a geometria analisada é composta por materiais de propriedades termofísicas distintas. A obtenção da solução analítica para problema de condução de calor multicamada requer procedimentos mais elaborados que a solução de problemas de uma única camada, tanto para adequar a equação-solução em termos de funções de Green (FG) quanto para o cálculo dos autovalores. Portanto, objetiva-se, apresentar de uma forma didática todos os cálculos necessários, desde as autofunções até os autovalores para obtenção da solução multicamada.

Palavras chave: Funções de Green, Solução Analítica, Multicamada.

1. INTRODUÇÃO

Especificamente, no ramo da engenharia mecânica dentre os fenômenos estudados estuda-se a transferência de calor por condução que se dá devido ao gradiente de temperatura em meio sólido e que pode ser modelado matematicamente pela equação da difusão.

As soluções analíticas representam uma importante ferramenta para a solução de problemas de engenharia, uma vez que podem ser usadas para a validação de soluções aproximadas, facilitam a análise e o entendimento de problemas físicos [Fernandes \(2009\)](#), possibilitando fornecer informações precisas e rápidas sobre o comportamento das distribuições de temperatura e fluxo de calor que podem ser difíceis de perceber a partir das soluções numéricas.

2. SOLUÇÃO ANALÍTICA

O problema de condução de calor 1D mostrado na Fig. 1, com duas camadas, é referenciado como X2C12 por ([Haji-Sheikh, 2014](#)) e descrito pelas Eqs. (1a)-(1d)

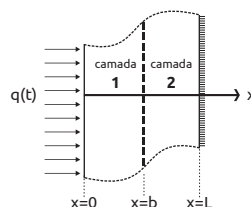


Figure 1. Problema térmico X2C12

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + g(x, t) = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq b \quad e \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad b \leq x \leq L \quad (1a)$$

Sujeita as condições de contorno

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (1b)$$

condições de continuidade

$$T_1|_{x=b} = T_2|_{x=b}; \quad -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (1c)$$

e condição inicial

$$T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (1d)$$

A solução para temperatura em cada região i é dada por

$$T_i(x, t) = \sum_{j=1}^M \left\{ \int_{x_j}^{x_{j+1}} G_{ij}(x, t|x', 0) F_j(x') dx' + \alpha_j \int_0^t \int_{x_j}^{x_{j+1}} G_{ij}(x, t|x', \tau) \frac{g_j(x', \tau)}{k_j} dx' d\tau \right\} \quad (2)$$

onde $x_j \leq x \leq x_{j+1}$, para $j = 1, 2, \dots, M$, são os limites de cada camada, e, $G_{ij}(x, t|x', \tau)$ é a função de Green para problemas multicamadas.

Para $M = 2$, define-se duas camadas dadas pelos seguintes intervalos $0 \leq x \leq b$ e $b \leq x \leq L$, sendo $x_1 = 0$, $x_2 = b$ e $x_3 = L$. Assim, tem as soluções T_1 e T_2 definidas respectivamente pelas Eqs. (3) e (4).

$$T_1(x, t) = \alpha_1 \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{11}(x, t|x', \tau) \frac{g_1(x', \tau)}{k_1} dx' d\tau + \alpha_2 \int_0^t \int_{x_2}^{x_3} G_{12}(x, t|x', \tau) \frac{g_2(x', \tau)}{k_2} dx' d\tau \quad (3)$$

$$T_2(x, t) = \alpha_1 \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} G_{21}(x, t|x', \tau) \frac{g_1(x', \tau)}{k_1} dx' d\tau + \alpha_2 \int_0^t \int_{x_2}^{x_3} G_{22}(x, t|x', \tau) \frac{g_2(x', \tau)}{k_2} dx' d\tau \quad (4)$$

Como a geração de calor é dada em um volume de espessura infinitesimal, $g(x, t) = q(t)\delta(x - 0)$, isto implica que ela ocorre em $x = 0$, assim, $g_1(x, t) = g(x, t)$ e $g_2(x, t) = 0$, portanto a segunda parte das (3) e (4) são nulas.

A função de Green G_{ij} é dada por [Haji-Sheikh and Beck \(2002\)](#)

$$G_{ij}(x, t|x', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{N_x} X_{in}(x) X_{jn}(x'), \quad (5)$$

onde X_{in} e X_{jn} são as autofunções e λ_n os autovalores.

E a norma N_x é definida por

$$N_x = \sum_{j=1}^M \int_{x_j}^{x_{j+1}} [X_{jn}(x')]^2 dx' \quad (6)$$

Portanto, considerando o problema com geração de calor em um volume de espessura infinitesimal, ou seja, em $x = 0$ e fluxo de calor nulo em $x = 0$, a solução para a temperatura se reduz para o intervalo $[x_1, x_2]$:

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

e para o intervalo $[x_2, x_3]$:

$$\begin{aligned} T_2(x, t) &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}}{N_x} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_{x_1}^{x_2} X_{1n}(x') q(t) \delta(x' - 0) dx' d\tau \\ &= \frac{\alpha_1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{2n}(x) X_{1n}(0)}{N_x} \int_0^t q(t) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

As autofunções $X_1 = X_{1n}(x)$ e $X_2 = X_{2n}(x)$ são obtidas utilizando o método de separação de variáveis. Assim:

$$T_1(x, t) = X_1(x) \Gamma_1(t) \quad e \quad T_2(x, t) = X_2(x) \Gamma_2(t) \quad (9a)$$

Substituindo a Eqs. (9a) em Eqs. (1a) respectivamente tem-se

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \gamma^2 X_1 = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \eta^2 X_2 = 0 \quad onde \quad \gamma^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_1} \quad e \quad \eta^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha_2} \quad (10)$$

As soluções para essas EDO'S são as autofunções que deseja-se obter:

$$X_1 = A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x) \quad e \quad X_2 = C \cos(\eta x) + D \sin(\eta x) \quad (11a)$$

A Eqs. (11a) deve satisfazer a condição de contorno em $x = 0$, isto é

$$-k_1 \frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

Substituindo a autofunções X_1 Eq (11a) na Eq (12) e resolvendo a expressão, obtem-se $B = 0$ e sem perda de generalidade conclui-se que $A = 1$ (Özişik, 1993). Em seguida, deve-se satisfazer as condições de contorno em $x = b$

$$X_1|_{x=b} = X_2|_{x=b}; \quad -k_1 \frac{\partial X_1}{\partial x} \Big|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial X_2}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (13)$$

Substituindo X_1 e X_2 na equação (13) segue-se

$$\cos(\gamma b) - C \cos(\eta b) - D \sin(\eta b) = 0 \quad e \quad -\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \sin(\gamma b) + C \sin(\eta b) - D \cos(\eta b) = 0 \quad (14)$$

A condição de contorno em $x = L$ é definida como

$$-k_2 \frac{\partial X_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (15)$$

Sustituindo X_2 na equação Eq. (15) as Eqs., (14), (15) em forma matricial é definida por:

$$\begin{bmatrix} \cos(\gamma b) & \cos(\eta b) & \sin(\eta b) \\ -K \sin(\gamma b) & \sin(\eta b) & -\cos(\eta b) \\ 0 & -\eta \sin(\eta L) & \eta \cos(\eta L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad onde K = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \quad (16)$$

Resolvendo o sistema linear dado pela equação (16) os coeficientes C e D são determinados e as autofunções é dada pela Eq.(18)

$$C = \cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \sin(\gamma b) \sin(\eta b) \quad e \quad D = \cos(\gamma b) \sin(\eta b) - \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \left(\frac{\gamma}{\eta}\right) \sin(\gamma b) \cos(\eta b) \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \cos(\gamma x) \\
 X_2 &= \left[\cos(\eta b) \cos(\gamma b) + \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \operatorname{sen}(\gamma b) \operatorname{sen}(\eta b) \right] \cos(\eta x) \\
 &\quad + \left[\cos(\gamma b) \operatorname{sen}(\eta b) - \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) \operatorname{sen}(\gamma b) \cos(\eta b) \right] \operatorname{sen}(\eta x)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Portanto, para obtenção da solução de temperatura basta substituir as autofunções nas equações Eq. (7) e Eq. (4)

Para obtenção dos autovalores utiliza-se a equação Eq. (16). Nesse caso, os autovalores são obtidos numericamente, pois trata-se de uma equação transcendental.

$$\begin{vmatrix} \cos(\gamma b) & \cos(\eta b) & \operatorname{sen}(\eta b) \\ -K \operatorname{sen}(\gamma b) & \operatorname{sen}(\eta b) & -\cos(\eta b) \\ 0 & -\eta \operatorname{sen}(\eta L) & \eta \cos(\eta L) \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \tan(\gamma b) = -K \tan[\eta(b - L)] \tag{19}$$

A solução da equação Eq. (19) é obtida por aproximações assintóticas.

A solução das Eqs. (7)-(4) pode ser representada graficamente como mostra a Fig. 2 considerando fluxo de calor prescrito igual $4 \times 10^5 \text{ [W/m}^2\text{]}$, $T_0 = 0 \text{ [}^\circ\text{C]}$, $L = 5 \times 10^{-2} \text{ [m]}$, $b = L/2 \text{ [m]}$, $\alpha_1 = 18,8 \times 10^{-6}$, $\alpha_2 = 117 \times 10^{-6}$, $k_1 = 64 \text{ [W/mk]}$ e $k_2 = 401 \text{ [W/mk]}$.

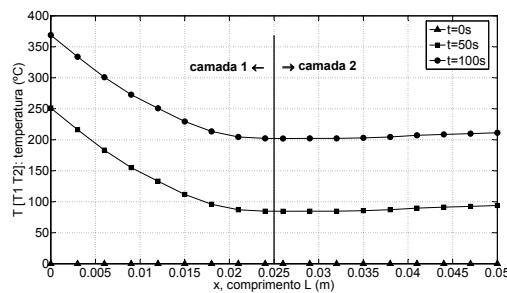


Figure 2. Comprimento versus Temperatura considerando três tempos constantes.

3. CONCLUSÃO

Todos os procedimentos necessários para obtenção dos autovalores e das autofunções foram apresentados e assim obteve a solução de temperatura com duas camadas.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Fernandes, A.P., 2009. *Funções de Green: soluções analíticas aplicadas a problemas inversos em condução de calor*. Master's thesis.
- Haji-Sheikh, A., 2014. "Two-layer slab with perfect contact between layers; with zero in heat flux at one boundary, zero heat flux at other boundary". URL <http://exact.unl.edu/>.
- Haji-Sheikh, A. and Beck, J., 2002. "Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 9, pp. 1865 – 1877. ISSN 0017-9310. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310\(01\)00279-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0017-9310(01)00279-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931001002794>.
- Özişik, M.N., 1993. *Heat Conduction*. Wiley interscience, New York.

5. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.