

CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS MÓVEIS USANDO FUNÇÕES DE GREEN

Sidney Ribeiro, Universidade Federal de Uberlândia, sidney.ribeiros@hotmail.com

Gabriela Costa de Oliveira, Universidade Federal de Uberlândia, gabriela_costadeoliveira@hotmail.com

Ana Paula Fernandes, Universidade Federal de Uberlândia, anapaula@mecanica.ufu.br

Gilmar Guimarães, Universidade Federal de Uberlândia, gguima@mecanica.ufu.br

Resumo. Problemas térmicos que envolvem fontes móveis ocorrem em diversas aplicações de engenharia, tais como processos de soldagem, fornos de tratamento térmico e outros tratamentos. Normalmente, nestes casos, a formulação precisa de solução numérica devido à alta complexidade da equação de difusão de calor incluindo termos convectivos. Este artigo propõe uma análise matemática e solução analítica de um modelo térmico transiente 1D baseado em funções de Green, considerando um sólido se movendo a uma velocidade constante ao longo de uma coordenada cartesiana.

Palavras chave: Funções de Green, Condução de calor, Verificação intrínseca, Fonte móvel.

1. INTRODUÇÃO

Diversas situações físicas ou processos podem ser analisados a partir da obtenção do campo de temperatura em um sólido exposto a várias formas de aquecimento, fixo ou móvel. por exemplo um laser móvel aquecendo a superfície de um sólido [Araya and Gutierrez \(2006\)](#), processo de soldagem por fricção [Mohammad et al. \(2013\)](#) e até uma análise de performance computacional envolvendo obtenção de propriedades termofísicas em problemas inversos em condução de calor [Fernandes et al. \(2010\)](#).

A motivação para a realização deste trabalho é devido às poucas soluções analíticas existentes com fontes em movimento na literatura, dada à complexidade matemática, soluções analíticas são normalmente obtidas com hipóteses simplificadas e restritivas. este trabalho apresentará uma análise matemática e metodologia para obtenção de solução analítica de um problema 1D transiente em um sólido móvel aquecido por uma fonte de calor.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O modelo matemático 1D que descreve a condução de calor em um sólido aquecido por uma fonte móvel é:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

onde V é a velocidade do sólido na direção positiva através de um volume de controle fixo, as condições de contorno de primeiro tipo são dadas por:

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_{x1}, \\ T(L, t) &= T_{x2} \end{aligned} \quad (2)$$

e os contornos de segundo e terceiro tipo são:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h_{x1} [T_{\infty} - T(0, t)] + q_{x1}, \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} &= h_{x2} [T(L, t) - T_{\infty}] + q_{x2}, \end{aligned} \quad (3)$$

e à condição inicial:

$$T(x, 0) = F(x). \quad (4)$$

Para o caso 1D com fluxo de calor em $x = 0$ é necessário uma mudança de variável, devido a dificuldade de interpretação geométrica do problema, consideraremos uma geração interna constante $g_p(t) = \text{constante}$ em uma posição qualquer entre $0 < x < L$ e variação espacial sendo uma função delta de Dirac tomando a forma $g_p(t) = g_p(t)\delta(x - vt)$, neste ponto o termo de geração se movimenta juntamente com o domínio, o que não é interessante, então é necessário uma mudança no sistema de coordenada para que a geração se torne fixa através da movimentação do eixo, então introduzimos uma nova variável definida por $\xi = x - vt$, como sugere Özişik (1993):

deste modo a Eq.(1) tomará a forma:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k} g(\xi, t) = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial \xi} \right), \quad (5)$$

sob as condições de contorno de primeiro tipo:

$$T(0, t) = T_{\xi 1}, \quad (6)$$

$$T(L, t) = T_{\xi 2}, \quad (7)$$

e os contornos de segundo e terceiro tipo são:

$$-k \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = h_{\xi 1} [T_{\infty} - T(0, t)] + q_{\xi 1}, \quad (8)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L} = h_{\xi 2} [T(L, t) - T_{\infty}] + q_{\xi 2}, \quad (9)$$

e a condição inicial:

$$T(\xi, 0) = F(\xi). \quad (10)$$

Para aplicarmos o método de funções de Green e obtermos a solução analítica deste tipo de problema realizamos uma mudança de variável em T , e então buscaremos solução para um problema auxiliar W e por fim retornarmos ao problema original, para isso utilizamos a relação $\exp\left(\frac{V\xi}{2\alpha} - \frac{V^2 t}{4\alpha}\right)$, então T será calculado fazendo $T(\xi, t) = W(\xi, t) \exp\left(\frac{V\xi}{2\alpha} - \frac{V^2 t}{4\alpha}\right)$.

Na variável W , temos o seguinte problema:

$$k \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k} g_p \delta(\xi - 0) \exp\left(\frac{V\xi}{2\alpha} - \frac{V^2 t}{4\alpha}\right) = \rho c_p \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (11)$$

note a ausência do termo de velocidade em Eq.(11), que foi transferido para os contornos devido a mudança de variável. De maneira similar, realiza-se a mudança de variável para as condições de contorno, observe que contornos de segundo tipo se tornam de terceiro tipo, os demais permanecem os mesmos.

3. RESULTADOS

Nessa seção será apresentada a solução analítica unidimensional para o modelo particular $\xi 11$, onde as temperaturas inicial e de contornos são conhecidas e nulas, se movendo na direção positiva do eixo ξ a uma velocidade constante $V = 0.0005 \text{ m/s}$, onde $k = 80.2 \text{ W/mK}$, $\alpha = 23.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ e $L = 0.1 \text{ m}$ sob uma geração interna de $g_p = 1 \times 10^5 \text{ W/m}^3$ fixa no ponto $\xi = P = 0.02 \text{ m}$.

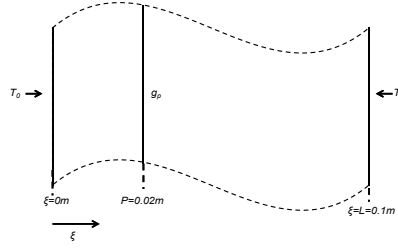


Figura 1. Problema $\xi 11$.

A equação na variável W que modela este caso é dado por:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k} g_p \delta(\xi - P) \exp\left(\frac{V\xi}{2\alpha} - \frac{V^2 t}{4\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (12)$$

sob as condições de contorno:

$$W(0, t) = 0, \quad (13)$$

$$W(L, t) = 0, \quad (14)$$

e à condição inicial

$$W(\xi, 0) = 0. \quad (15)$$

Deste modo a solução por funções de Green para o problema é dada por:

$$W(\xi, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{\xi'=0}^L G(\xi, t|\xi', \tau) g_p \delta(\xi' - P) \exp\left(\frac{V\xi'}{2\alpha} - \frac{V^2 \tau}{4\alpha}\right) d\xi' d\tau. \quad (16)$$

A função de Green característica do problema pode ser facilmente encontrada em (Beck *et al.*, 1992, p.584) e tem a forma:

$$G(\xi, t|\xi', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi\xi'}{L}\right), \quad (17)$$

Substituindo a Eq.(17) na Eq.(16) e utilizando a propriedade:

$$\int F(x) \delta(x - a) dx = F(a), \quad (18)$$

nos resta calcular:

$$W(\xi, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t G(\xi, t|\xi', \tau) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t - \tau)}{L^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \times \quad (19)$$

$$\sin\left(\frac{m\pi P}{L}\right) g_p \exp\left(\frac{VP}{2\alpha} - \frac{V^2 \tau}{4\alpha}\right) d\tau. \quad (20)$$

Deste modo é solução na variável W a solução é dada por:

$$W(\xi, t) = \frac{2\alpha g_p}{Lk} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi P}{L}\right) \exp\left(\frac{VP}{2\alpha}\right) \left(\frac{\exp\left(\frac{-Vt^2}{4\alpha}\right) - \exp\left(\frac{-m^2 \pi^2 \alpha t}{L^2}\right)}{\frac{m^2 \pi^2 \alpha}{L^2} + \frac{V^2}{4\alpha}}\right), \quad (21)$$

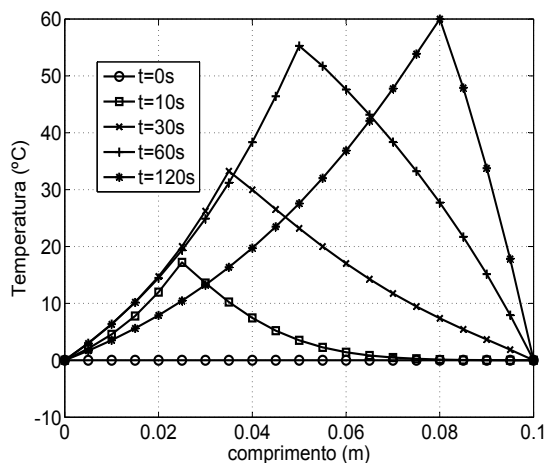
Assim:

$$T(\xi, t) = W(\xi, t) \exp\left(\frac{V\xi}{2\alpha} - \frac{V^2 t}{4\alpha}\right), \quad (22)$$

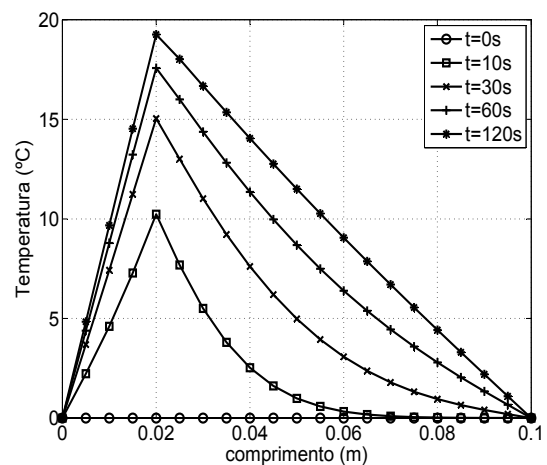
é solução para o problema.

4. CONCLUSÃO

A Fig(a) ilustra graficamente a solução analítica para o problema dada na Eq.(22), podemos observar a resposta de temperatura devido a geração de calor fixa imposta, como foi proposto, à uma velocidade constante. note o efeito na temperatura causada pela velocidade de movimentação do sólido ao longo de do eixo ξ positivo, observe o comportamento térmico utilizando a mesma solução mas com velocidade zero, Fig(b), neste caso o problema ξ 11 móvel se reduz a um problema fixo, contudo neste problema o cálculo é feito na variável T .



(a) Fonte móvel de calor a uma velocidade $v = 0.0005 \text{ m/s}$



(b) Fonte de calor fixa no ponto $P = 0.02 \text{ m}$

5. REFERÊNCIAS

- Araya, G. and Gutierrez, G., 2006. "Analytical solution for a transient, three-dimensional temperature distribution due to a moving laser beam". *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- Beck, J., Cole, K. and B.Litkouhi, A.S., 1992. *Heat Conduction Using Green's Function*. hpc, United States.
- Beck, J. and McMasters, R., 2004. "Solutions for mult-dimensional transient heat conduction with solid body motion". *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- Fernandes, A., Priscila, F., Borges, V.L. and Guimaraes, G., 2010. "Use of 3-d analytical solution based on green's function to reduce computational time in inverse heat conduction problems". *Applied Mathematical Modeling*.
- Mohammad, H., Solaleh, S., B.Pouya and Sadaf, S., 2013. "3-d transient analytical solution based on green's function to temperature field in friction stir welding". *Applied Mathematical Modeling*.
- Özişik, M.N., 1993. *Heat Conduction*. Wiley interscience, New York.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.