

VERIFICAÇÃO INTRÍNSECA DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS EM CONDUÇÃO DE CALOR

Sidney Ribeiro, Universidade Federal de Uberlândia, sidney.ribeiros@hotmail.com

Gabriela Costa de Oliveira, Universidade Federal de Uberlândia, gabriela_costadeoliveira@hotmail.com

Gilmar Guimarães, Universidade Federal de Uberlândia, gguima@mecanica.ufu.br

Resumo. *Esse trabalho apresenta um método para verificação de soluções analíticas em condução de calor. Como ponto de partida, aborda-se o problema unidimensional (1D) cujas condições de contorno são do tipo 2, isto é, fluxo de calor imposto em uma das extremidades ($x = 0$) e do lado oposto ($x = L$) tem-se condição de isolamento térmico, ou fluxo de calor nulo. Esse problema é referenciado na literatura como X22. Outro problema a ser tratado é um unidimensional (1D) cujas condições de contorno são, fluxo de calor imposto em uma das extremidades ($x = 0$) e do lado oposto ($x = L$) não tem efeito físico de contorno. Esse problema é referenciado na literatura como X20. Conclui-se esse trabalho fazendo a verificação intrínseca a partir desses problemas.*

Palavras chave: *Funções de Green, Condução de calor, Verificação intrínseca.*

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um método para verificação de soluções analíticas em condução de calor, que podem ser realizados em geometrias multi-dimensionais e variados tipos de contorno, a importância em se estudar e utilizar métodos de verificação está no estabelecimento de garantia de exatidão da solução calculada, como afirma ?. Verificar soluções em transferência de calor está se tornando uma importante área de pesquisa atualmente. isto é, tem-se dado atenção a necessidade de garantir a consistência de soluções construídas de forma analítica ou códigos numéricos. A precisão das soluções em elementos finitos, volumes finitos e outros métodos para equações diferenciais parciais precisam ser assegurados, (?).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Podemos conceituar verificação intrínseca como o processo de comparação entre duas soluções, que podem ser tanto analítica quanto numérica com uma solução analítica exata que pode ser encontrada em literatura ou calculada por meio de contornos ou geometrias simplificadas.

Para realizar uma verificação temos diversos métodos como: *time-partitioning intrinsic verification, steady state heat conduction solutions, complementary transient solution, using one-dimensional solution(?)*

Dentre os métodos citados utilizaremos uma solução uni-dimensional para verificarmos a solução obtida, esse método consiste em comparar numericamente duas soluções de geometrias diferentes, finito e semi-infinito, onde procura-se obter os mesmos resultados em um intervalo de tempo. Utiliza-se neste método uma solução de um problema de geometria semi-infinita devido ao fato desta solução não estar representada em forma de série infinita, logo sem problemas de convergência.

2.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO EM CONDUÇÃO DE CALOR

Segundo ?, podemos classificar problemas de condução de calor de acordo com seus tipos de contornos em suas respectivas coordenadas cartesianas, seis tipos possíveis de contornos são listados na tabela abaixo:

Table 1. Tipos de condições de contorno.

Notação	Tipo de contorno	Descrição
0	Tipo zero	Sem efeito físico de contorno
1	Dirichlet	Temperatura prescrita
2	Neumann	Fluxo de calor prescrito
3	Robin	Convecção
4	Quarto tipo	Filme fino, sem convecção
5	Quinto tipo	Filme fino, com convecção

Assim um problema simbolicamente denotado por $X11$ indica: coordenada cartesiana x e temperatura prescrita em ambos contornos $x = 0$ e $x = L$. Para problemas multidimensionais a simbologia é dada pelo produto de problemas uni-dimensionais, por exemplo: $XabYcdZef$ onde $abcdef$ pode assumir qualquer tipo de contorno listado na tabela ??

2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Apresentaremos nesta seção a solução analítica e a verificação intrínseca de um problema uni-dimensional transiente do tipo $X22$ e compará-lo a um problema de geometria semi-infinita do tipo $X20$, para ambos problemas é considerado um fluxo de calor $q(t) = q_0 e^{bt}$.

As soluções foram obtidas utilizando o método funções de Green, cujas funções utilizadas para ambos casos segundo ? são:

- Caso $X20$

A equação governante para o caso $X20$ é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

sob as condições de contorno:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 e^{bt} \quad em \ x = 0 \quad (2)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = 25^\circ C \quad para \ t \geq 0 \quad (3)$$

Aplicando então a equação do método de funções de Green para o problema $X20$ a solução é dada por:

$$T(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t G_{X20}(x, t|x', \tau) q_0 e^{b\tau} |_{x'=0} d\tau \quad (4)$$

onde a função $G_{X20}(x, t|x', \tau)$ pode ser facilmente encontrada em (Apêndice X, ?) e descrita como:

$$G_{X20}(x, t) = [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha(t-\tau)}} \right\} \quad (5)$$

Aplicando então a equação Eq.(?) na Eq.(?) e avaliando a integral ao longo do tempo em $x' = 0$ obtem -se:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k\sqrt{\pi\alpha}} q_0 e^{bt} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} \left[-\exp\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{\alpha}}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{bt} + \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \exp\left(-\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{\alpha}}\right) \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{bt} + \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right] \quad (6)$$

- Caso $X22$

A equação governante para o caso $X22$ é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

sob as condições de contorno:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 e^{bt} \quad em \ x = 0 \quad e \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad em \ x = L \quad (8)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = 25^\circ C \quad para \ t \geq 0 \quad (9)$$

Este problema será resolvido de forma análoga ao problema $X20$ então a função de Green para o caso é dada por:

$$G_{X22}(x, t) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha (t-\tau)}{L^2}} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (10)$$

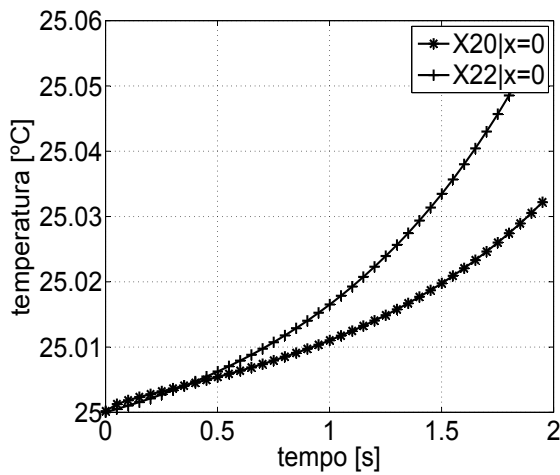
segundo (Apêndice X, ?).

Aplicando a equação Eq.(??) na Eq.(??) e realizando a análise da integral temporal em $x' = 0$ obtém-se a solução analítica para o problema, que é dada por:

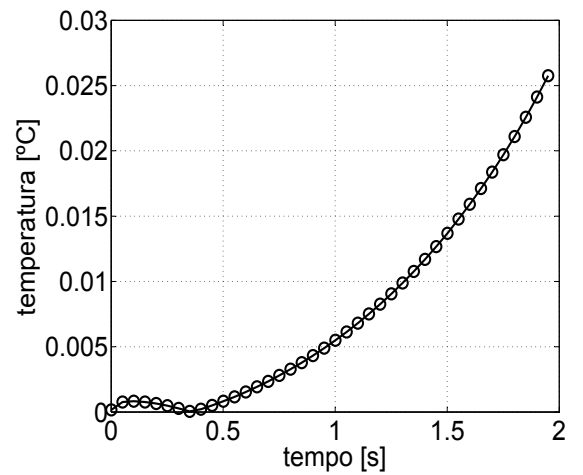
$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0 \alpha}{kL} \frac{(1 - e^{bt})}{-b} + \frac{2\alpha}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{L^2}} \frac{-L^2 (e^{\frac{m^2 \pi^2 \alpha t}{L^2} - bt} - 1)}{-b^2 L^2 - m^2 \pi^2 \alpha} \quad (11)$$

2.3 VERIFICAÇÃO INTRÍNSECA

Para verificarmos a solução dada pela Eq.(??), vamos compará-la numericamente com a Eq.(??), para isso utilizaremos o *software* MATLAB e implementaremos as duas soluções utilizando: $q_0 = 10.000 W/m^3$, $k = 80, 2 W/mK$, $\alpha = 23, 1 \times 10^{-6} m^2/s$, $T_0 = 25^\circ C$, e para o caso $X22$ $L = 0, 1 m$, para ambos os casos as soluções serão observadas no ponto $x' = 0$ durante $2 s$ com passo de tempo $0, 05 s$:

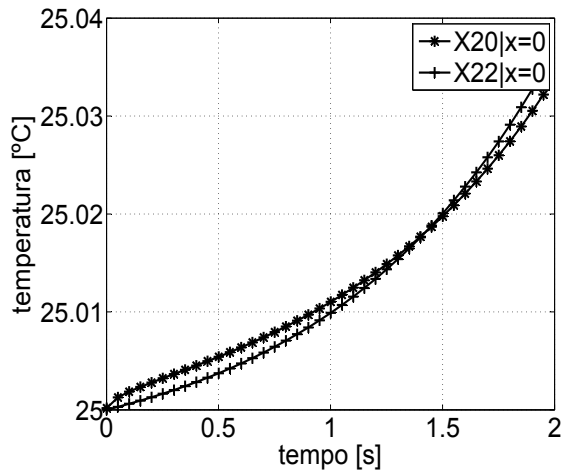


(a) Comparação entre as soluções $X20$ e $X22$

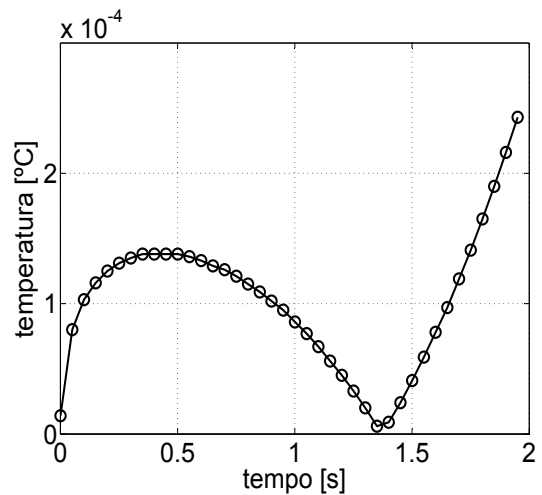


(b) Erro entre as soluções

Podemos observar na Fig.(?) o comportamento das duas soluções calculadas pelas condições e propriedades impostas, o erro entre as soluções aparece na casa de centésimo de grau, como pode ser visto na Fig.(?). Algo interessante que podemos notar é que se fizermos L grande para o problema $X22$ obteremos uma grande aproximação a solução de $X20$, como podemos ver nas figuras abaixo



(c) Comparação entre as soluções $X20$ e $X22$



(d) Erro entre as soluções

Isso ocorre devido ao fato de que quando fazemos L grande no problema $X22$ começamos a perder a influência do contorno em $x = L$ o que faz o problema se aproximar de uma situação de geometria semi-infinita.

3. CONCLUSÃO

Concluimos pela Fig.(? - ?) que a solução obtida pela Eq.(?) é verificada para tempos pequenos, quando comparada a Eq.(?), isto é, a diferença entre as soluções estão na casa de milésimo de grau. Outra vantagem, observando este resultado, é a possibilidade de utilizar a solução apresentada pela Eq.(?) como solução alternativa em situações práticas que ocorrem em tempos pequenos, devido sua simplicidade e a não dependência de convergência de série.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Beck, J.V., McMaster, R., Dowding, K.J. and Amos, D.E., 2006. "Intrinsic verification in linear heat conduction". *Heat and Mass Transfer*.
- Beck, J., Cole, K. and B.Litkouhi, A.S., 1992. *Heat Conduction Using Green's Function*. hpc, United States.