

APLICAÇÃO DE B-SPLINE COM PESO NA RECONSTRUÇÃO DE SEÇÕES TRANSVERSAIS

Larissa Rocha Pereira, larissa.mecatronica@hotmail.com

João Carlos Mendes Carvalho, jcmendes@mecanica.ufu.br

Resumo. As técnicas de digitalização e reconstrução de formas complexas de objetos tridimensionais têm apresentado um grande desenvolvimento. Dependendo do objeto, milhares ou até milhões de amostragens devem ser adquiridas. O resultado consiste em uma “massa” de dados que requerem algoritmos eficientes e confiáveis que possam gerar modelos computacionais a partir destas amostragens. A partir da nuvem de pontos, deve-se reconstruir a superfície escolhendo o tipo de curva que melhor se adapta ao conjunto de pontos lidos. O método subdivide a nuvem de pontos para a construção de seções do objeto e, a partir dessas seções, construir a superfície tridimensional. As B-spline são muito úteis na modelagem dessas superfícies, uma vez que elas podem ser aplicadas tanto para uma seção aberta, quanto para uma seção fechada. Além disso, as curvas B-spline permitem o ajuste em pontos específicos sem modificar o restante da curva, o que permite aproximar a curva o máximo possível do objeto real. Essa aproximação é conseguida pela inserção de pesos nos pontos oriundos da digitalização. O aumento desses pesos faz com que a curva se aproxime dos pontos e a diminuição provoca o afastamento. O objetivo, portanto, desse trabalho é apresentar de forma eficiente a aplicação do método de aproximação dos mínimos quadrados usando B-spline fechada com peso.

Palavras chave: B-spline fechada, B-spline com peso, aproximação, método dos mínimos quadrados

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, as técnicas de digitalização e reconstrução de formas complexas de objetos tridimensionais têm apresentado um grande desenvolvimento. Dependendo do objeto, milhares ou até milhões de amostragens devem ser adquiridas. O resultado consiste em uma “massa” de dados que requerem algoritmos eficientes e confiáveis que possam gerar modelos computacionais a partir destas amostragens. Estes dados formam, na realidade, uma nuvem de pontos, nem sempre organizados (CURLESS, 1997).

A reconstrução de superfícies precisa a partir desta nuvem de pontos desorganizados é um problema difícil, não completamente solucionado e muito problemático nos casos em que os dados estão incompletos, com ruídos e/ou esparsos. O objetivo da reconstrução consiste sempre em obter um modelo computacional de um objeto que se assemelhe o mais fielmente possível ao objeto real. (DÍAZ et al, 2007).

A representação de uma curva como uma sucessão de trechos retos pode ser suficiente para várias aplicações. No entanto, curvas e superfícies complexas normalmente demandam uma maneira mais eficiente de representação. A aplicação de B-splines tem sido muito útil na modelagem dessas superfícies. Curvas B-spline são versões da spline que implementam o controle local da curva, de forma que a alteração de um ponto de controle modifica a curva somente na região dos pontos vizinhos mais próximos em função da ordem de continuidade. A B-Spline é um ajustador de aproximação, pois a curva gerada não passa pelos pontos de controle. No entanto, os pontos de controle podem ser calculados para que a interpolação ou aproximação seja realizada nos pontos desejados.

Utilizando B-splines é possível obter uma superfície aproximada ou interpolada utilizando os pontos oriundos da digitalização de uma imagem. As superfícies aproximadas são construídas, geralmente, através de polígonos ou utilizando funções como as B-splines. E as superfícies interpoladas são construídas através da utilização das splines e/ou combinando métodos especiais de interpolação com triangulações (JUNIOR, 2007).

Existem vários métodos para a reconstrução da superfície, dentre eles tem-se a reconstrução através de fatias (seções transversais) do objeto, onde cada seção é definida por curvas B-splines.

Embora as curvas B-spline tenham que atender a pré-requisitos matemáticos bem definidos, a curva final, ou seja, o ajuste final da curva depende de aspectos estéticos e requerimentos funcionais que, em geral, não podem ser totalmente definidos em termos de critérios quantitativos, ficando na dependência do “gosto visual” do operador.

Assim, o objetivo desse trabalho é utilizar curvas B-spline para reconstruir seções transversais de um objeto a partir de um conjunto de pontos que, em princípio, representam essa seção transversal. A partir das seções transversais é possível, posteriormente, reconstruir a superfície do objeto pelo método conhecido como reconstrução através de fatias. O procedimento utiliza o método de pesos associados aos pontos previamente definidos (pontos que melhor representam as coordenadas do objeto) e aproximação pelo método dos mínimos quadrados.

Os pesos são usados para aproximar a curva dos pontos digitalizados a fim de diminuir o erro entre eles, e assim permitir obter a melhor curva que represente a seção transversal do objeto.

2. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

O método desenvolvido utiliza a curva B-spline fechada através da aproximação pelo método dos mínimos quadrados com peso. A curva é aproximada aos pontos oriundos da digitalização da seção transversal de um objeto. A fim de reconstruir essa seção de forma mais fiel é utilizada a B-spline associada à pesos, sendo estes relacionados aos pontos que representam as coordenadas do objeto. Esses pesos proporcionam um outro tipo de flexibilidade à curva, que permite a aproximação ou o afastamento da mesma em relação aos pontos, melhorando o perfil final do objeto que se deseja reconstruir.

2.1. B-spline

B-splines são curvas polinomiais por partes que implementam o controle local da curva, ou seja, quando um ponto é modificado somente os pontos vizinhos a ele sofrerão alteração, em função da ordem de continuidade da curva. Para obter uma curva B-spline, precisa-se de um vetor de nós, das funções de base e um conjunto de pontos de controles.

De acordo com PIEGL e TILLER (1997), uma função de base é denotada por $N_{i,p}(u)$, que significa que é a i -ésima função de base B-spline de grau p (ordem $p+1$). Para defini-la é necessário um vetor de números reais não decrescente definido por $U = \{u_0, \dots, u_m\}$, chamado de vetor nó, onde os u_i são denominados nós (knots). $N_{i,p}(u)$ é definida como:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Um vão de nó não nulo define um segmento polinomial e os pontos de controle definem o “polígono de controle” onde a curva está contida. Uma curva B-spline de grau p é definida por:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad (2)$$

Onde P_i são os pontos de controle e $N_{i,p}(u)$ são as funções de base de grau p definidas no vetor de nós.

2.2. Aproximação por mínimos quadrados

Quando se define uma B-spline ela não passa pelos pontos de controle. Porém, se for necessário que a curva passe por pontos ou próximo de pontos pré-determinados (Q_k), é preciso calcular um conjunto de pontos de controle e um novo vetor nó a partir dos pontos dados, para poder traçar a curva de grau p definida pela Eq. (2), onde Q_k são aproximados pelo método dos mínimos quadrados, isto é:

$$e = \sum_{k=0}^j \{w_k |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2\} \quad (3)$$

Os pontos de controle são calculados através da Eq. (4):

$$(N^T W N) P = R \quad (4)$$

onde N é uma matriz $(j+1) \times (n+1)$ de escalares das funções de base

$$N = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(\bar{u}_m) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_m) \end{bmatrix} \quad (5)$$

W é uma matriz diagonal $(j+1) \times (j+1)$ com os pesos w_k ($k=0, \dots, j$)

$$W = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

R é um vetor de $n+1$ pontos

$$R = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0)WQ_0 + \dots + N_{0,p}(\bar{u}_m)WQ_m \\ \vdots \\ N_{n,p}(\bar{u}_0)WQ_0 + \dots + N_{n,p}(\bar{u}_m)WQ_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

Para resolver as Eqs. (5) e (7), um vetor nó $U = \{u_0, \dots, u_r\}$ e parâmetros $\{\bar{u}_k\}$ são requeridos. Os parâmetros $\{\bar{u}_k\}$ podem ser calculados usando o método do comprimento de corda. E o vetor nó pode ser adquirido pelo método a seguir: Se d é um número real positivo, denota por $i = \text{int}(d)$ o maior inteiro tal que $i \leq d$. Seja:

$$d = \frac{j+1}{n-p-1} \quad (8)$$

e a definição dos nós internos:

$$i = \text{int}(kd); \quad \alpha = kd - i$$

$$u_k = (1 - \alpha)\bar{u}_{i-1} + \alpha\bar{u}_i \quad k = 1, \dots, n + p - 3 \quad (9)$$

Para $k=0$, tem-se $u_0 = 0$.

2.3. Definição dos pesos

Os pesos adotados são relacionados aos pontos Q_k ($k = 0, \dots, j$) e implementados para a aproximação ou afastamento da curva em determinados pontos, de acordo com a necessidade do ajuste da curva. Os pesos são definidos pela relação entre os raios das circunferências formadas a cada três pontos consecutivos de Q_k ($k = 0, \dots, j$).

Tem-se Q_k , Q_{k+1} e Q_{k+2} definindo um triângulo. O encontro das mediatrizes dos lados $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ e $\overline{Q_{k+1} Q_{k+2}}$ define o centro da circunferência que passa por esses três pontos, o raio é então definido pela distância do centro a um dos pontos. Isso é feito para todos os pontos de Q_k ($k = 0, \dots, j$), portanto, para $j+1$ pontos, tem-se $j+1$ valores de raios, $r = \{r_0, \dots, r_j\}$, Fig. 1.

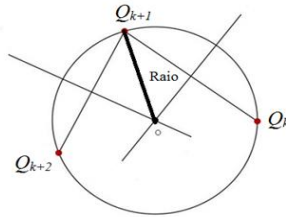


Figura 1 – Cálculo do raio para definição dos pesos

Em situações em que os pontos se encontram alinhados os valores dos raios tendem a infinito, que devem ser descartados para realizar as operações a seguir.

Tendo os valores dos raios, são obtidos a média, $\bar{r}$, e o desvio padrão, σ , e assim, define-se o raio máximo, r_{max} , pela Eq. (10):

$$r_{max} = \bar{r} + \sigma \quad (10)$$

O peso, w_k , é então definido pela razão entre o raio máximo e cada raio encontrado, $r = \{r_0, \dots, r_j\}$, Eq. (11):

$$w_k = \frac{r_{max}}{r_k} \quad k = 0, \dots, j \quad (11)$$

Assim, tem-se um peso relacionado a cada raio. Como o peso e o raio são inversamente proporcionais, evidente pela Eq. (11), quanto menor o raio, maior o peso relacionado a ele. Ou seja, nos pontos em que o raio é muito pequeno, é automaticamente atribuído a eles um peso maior para que force a curva a aproximar ao máximo à esses pontos.

Então, para que a curva se aproxime do ponto é necessário que se aumente o valor do peso nele. Em locais em que os pontos estão alinhados faz-se necessário que a curva também se aproxime ao máximo, portanto, o valor do peso nesses pontos também deve ser o maior possível. Para isso é definido o peso máximo como o maior valor dos pesos obtidos na Eq. (11), que é o valor do peso definido para o menor raio. Esse valor, então, é também atribuído aos pontos

em que estão mais alinhados, sendo eles considerados os pontos em que o raio seja maior que o raio máximo e quando o raio é infinito.

As Figuras 2a e 2b mostram uma curva B-spline aproximada a pontos que representam a seção transversal de um objeto. Na Figura 2a a curva é traçada sem utilizar o método dos pesos, ou seja, todos os pesos associados a cada ponto são iguais a 1, e na Fig. 2b a curva é traçada utilizando os pesos definidos pelo método desenvolvido.

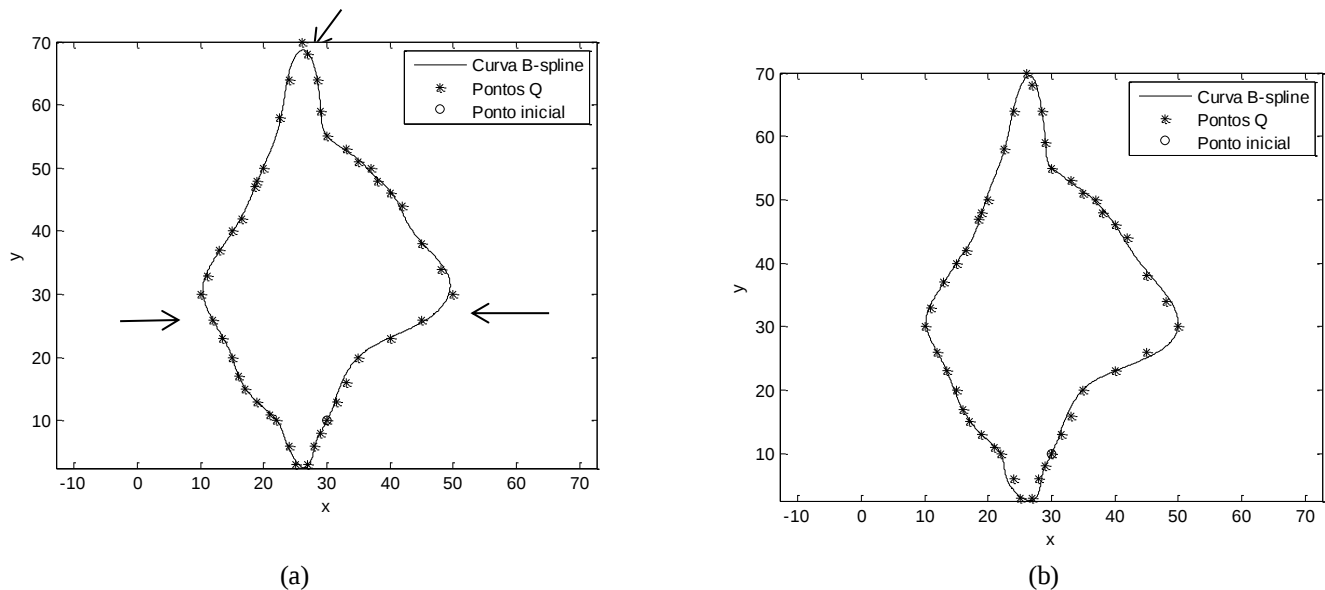


Figura 2 – (a) B-spline cúbica aproximada com os pontos sem considerar os pesos; (b) B-spline cúbica aproximada considerando os pontos com peso

As setas da Fig. 2a mostram regiões em que a curva B-spline traçada não teve bons resultados, ficando longe dos pontos que não possuíam pesos relacionados a eles. Na Figura 2b pode-se ver que a curva B-spline aproximou-se ao máximo desses mesmos pontos, pois a eles estavam associados pesos que “puxaram” a curva para próximo deles.

O método de aproximação por mínimos quadrados usando B-spline com peso também pode ser aplicado a seções abertas, apresentando da mesma forma, resultados satisfatórios.

3. CONCLUSÕES

O método dos mínimos quadrados com peso possibilita a curva B-spline aproximar o máximo possível dos pontos oriundos da digitalização, pois tal método implica que o erro entre a curva obtida e a curva original deva ser o menor possível. Além disso, o peso relacionado a cada ponto que representa a coordenada do objeto oferece à curva uma flexibilidade a mais, pois com esses pesos é possível aproximar ou afastar a curva dos pontos, possibilitando ao construtor definir de qual maneira ele pretende fazer isso.

A aplicação de pesos na B-spline fechada, pelo método dos mínimos quadrados, mostrou ser um método eficiente, uma vez que o aumento desses pesos fez com que a curva aproximasse dos pontos, representando melhor a seção transversal digitalizada.

4. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos ao Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica, CAPES, FAPEMIG e CNPQ.

5. REFERÊNCIAS

- Curless, B. L., 1997, “New Methods for Surface Reconstruction from Range Images”, 189f. PhD Thesis - University of Stanford, Califórnia.
- Díaz, J. E. R., 2011, “Kinematic and Dynamic Modeling of a structure RRP + PR”, PhD Thesis, Federal University of Uberlândia .
- Júnior, J. N. F.; Carvalho, J.C.M, 2007, “Modelagem Computacional para Reconstrução Gráfica de Objetos”.
- Piegl, L.; Tiller, W., 1997, “The NURBS Book”. 2. ed. N.Y: Springer.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.