

ANÁLISE DE ROBUSTEZ DA SEMI-IMPLICITIZAÇÃO DA MÚLTIPLA FORÇAGEM DIRETA ACOPLADA COM O MÉTODO PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER

Eduardo Peixoto de Oliveira, UFU - MFLab, eduardopeixoto@outlook.com

Aristeu da Silveira Neto, UFU - MFLab, aristeus@mecanica.ufu.br

Felipe Pamplona Mariano, UFG, fpmariano@emc.ufg.br

Resumo. A metodologia da fronteira imersa usualmente traduz a presença do corpo imerso no escoamento por meio do Método da Múltipla Forçagem Direta de maneira explícita. A proposta do presente trabalho é avaliar a robustez e a acurácia de uma nova proposta baseada na semi-implicitização da correção da velocidade calculada, uma vez que, em Mecânica dos Fluidos Computacional, pretende-se chegar a um nível aceitável de acurácia com o menor gasto computacional possível. Para tanto, analisamos o escoamento sobre um cilindro circular rígido a diferentes condições de escoamentos caracterizadas pelo número de Reynolds.

Palavras chave: Fronteira Imersa, Metodologia Pseudoespectral de Fourier, Métodos implícitos

1. INTRODUÇÃO

A partir dos trabalhos de Peskin (1977), Lima e Silva, *et. al* (2003) e Mariano (2011) que discutem escoamentos sobre corpos imersos usando a metodologia da fronteira imersa e estimar as forças de interação entre o fluido e o corpo imerso, vários trabalhos vem sendo desenvolvidos ao longo das últimas décadas na direção de simular e estimar o comportamento do escoamento sobre corpos por meio da metodologia da fronteira imersa (Wang, *et. al* (2008)) que consiste em representar a superfície do corpo imerso no escoamento por meio de uma força que desvia o fluido e contorna a fronteira usando, principalmente, as metodologias do Modelo Físico Virtual (MFV) e da Múltipla Forçagem Direta (MFD) (ver Mariano (2011)).

A metodologia da fronteira imersa consiste em subdividir o domínio de cálculo em dois: uma parte que representa as partículas de fluido (domínio Euleriano) e outra que descreve a superfície do corpo imerso (domínio Lagrangeano). No presente trabalho, o domínio Lagrangeano não se move em relação ao domínio Euleriano, e é representado por um cilindro rígido. Atualmente, a representação do domínio Lagrangeano se dá pelo Método da Forçagem Direta de maneira explícita, isto é, todos os valores estimados e corrigidos são calculados com os valores obtidos no passo de tempo anterior. A proposta no presente trabalho é implicitar o cálculo desta força de maneira a garantir mais robustez ao método e obter um maior ganho computacional em termos de tempo de cálculo e erro nas estimativas, este representado pela norma L2. Para tanto, analisamos o escoamento em um canal plano sobre um cilindro rígido condicionado a condições de contorno periódicas e posicionado após uma zona de amortecimento.

2. FORMULAÇÃO

2.1. Metodologia da fronteira imersa

Consideremos o escoamento incompressível sobre um cilindro rígido (Fig.(1)). Modelamos a interação entre os domínios Lagrangeano (Γ) e Euleriano (Ω) nas equações de Navier-Stokes (Eq. (1)) por meio de um termo forçante, f_i , descrito pela Eq. (2). O modelo matemático é então composto pela Eq. (1) e pela continuidade (Eq. (3)):

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (1)$$

onde,

$$f_i = \begin{cases} F_i, & \text{se } x_i = X_i \\ 0, & \text{se } x_i \neq X_i \end{cases} \quad (2)$$

sendo f_i a força Lagrangeano por unidade de volume e F_i a força Euleriana que só é diferente de zero sobre Ω .

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

O termo forçante descrito na Eq. (3) modela a injeção do campo de força no escoamento. O cálculo da força dá-se por meio de interpolações e distribuições como descrito em Peixoto, *et. al* (2014) e no trabalho de Mariano (2011).

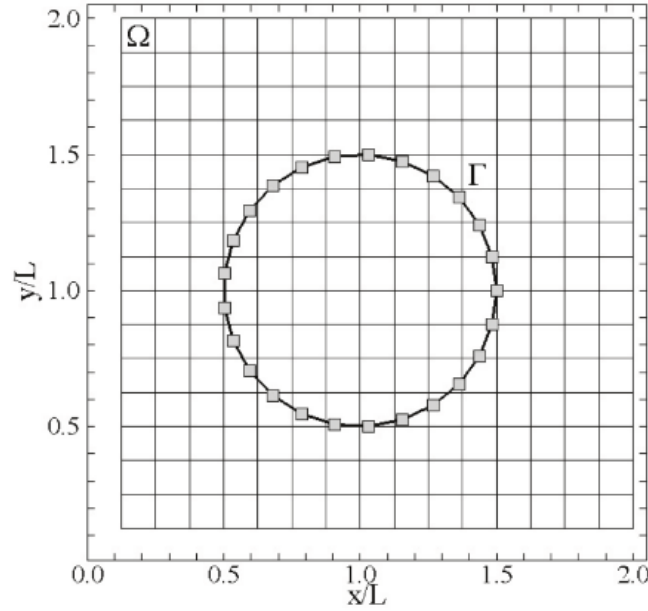


Figura 1. Domínios Euleriano e Lagrangeano.

A partir do cálculo da força, de maneira explícita, corrige-se a velocidade e avançamos para próxima iteração. Como descrito nas Eqs. (4) a (7):

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^t}{\Delta t} = RHS_i + f_i \quad (4)$$

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^* - u_i^t + u_i^*}{\Delta t} = RHS_i + f_i \quad (5)$$

$$\frac{u_i^* - u_i^t}{\Delta t} = RHS_i^t \quad (6)$$

e após operações de interpolação e distribuição, atualiza-se o campo de velocidade.

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^* + \Delta t f_i \quad (7)$$

A proposta atual é implicitar o cálculo da velocidade estimada, u^* , a fim de garantir maior robustez à metodologia da múltipla forçagem e manter o mesmo nível de acurácia antes obtido. Para tanto, definimos a semi-implicitação da maneira descrita pelas Eqs. (8) a (10), de tal forma que parte da força já é incorporada no cálculo da velocidade estimada e a velocidade corrigida será influenciada pela variação da força entre duas iterações consecutivas:

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^t}{\Delta t} = RHS_i^t + f_i^t + \Delta f_i^{t+\Delta t} \quad (8)$$

$$u_i^* = \Delta t (RHS_i^t + f_i^t) \quad (9)$$

$$u_i^{t+\Delta t} = \Delta t \Delta f_i^{t+\Delta t} + u_i^* \quad (10)$$

2.2. Metodologia Pseudoespectral de Fourier

Todas as derivadas espaciais são calculadas de maneira espectral por meio da Transformada Rápida de Fourier, como definida em Briggs e Henson (1995) e representada na Eq. (11) para um dado campo ϕ_n .

$$\hat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} \quad (11)$$

sendo k o número de onda na Transformada Rápida de Fourier, e pelo algoritmo de Takahashi (2006) é dado por:

$$k_i(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_i}(n-1) & , 1 \leq n < \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_i}(n-1-N) & , \frac{N}{2} + 2 \leq n \leq N \end{cases} \quad (12)$$

sendo k_i a i -ésima componente do vetor número de onda, N o número de nós na i -ésima direção, L_i o comprimento do domínio na direção i .

2.3. Evolução temporal

Todos os esquemas temporais apresentados nas equações da seção 2.1 foram esquemas de Euler, porém, nos cálculos utilizados, um método de Runge-Kutta de 4ª ordem (ver Souza (2005)) foi utilizado por apresentar uma menor ordem de erros, uma vez que um método de alta ordem deve ser utilizado quando se trata de métodos espectrais. Para tanto, um critério de relaxação temporal, aqui denominado CFL , baseado no critério de Courant *et. al* (1967) foi utilizado.

$$\Delta t = (CFL) \min \left\{ \min \left[\frac{\Delta x}{\max \|u\|}; \frac{\Delta y}{\max \|v\|} \right]; \frac{2}{v} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right]^{-1} \right\} \quad (13)$$

CFL é usualmente um número entre 0 e 1, mas quando interpretado como um critério de sobre relaxação temporal pode assumir valores maiores que 1. Para os testes de robustez realizados, testamos $CFL = 1$, onde a metodologia explícita não convergiu, demonstrado pela não conservação de massa, e a metodologia semi-implícita proposta convergiu.

3. RESULTADOS

Para demonstrar a estabilidade da nova metodologia, testes a diferentes números de Reynolds foram realizados e estão mostrados na Fig. (2). Nos resultados obtidos, observou-se um comportamento qualitativo representativo da física, com valores de velocidade próximos do obtido pela maneira usual de cálculo, além de uma norma L2 da ordem de 10^{-3} , ou seja, mantendo-se um nível aceitável de acurácia para aplicações de engenharia.

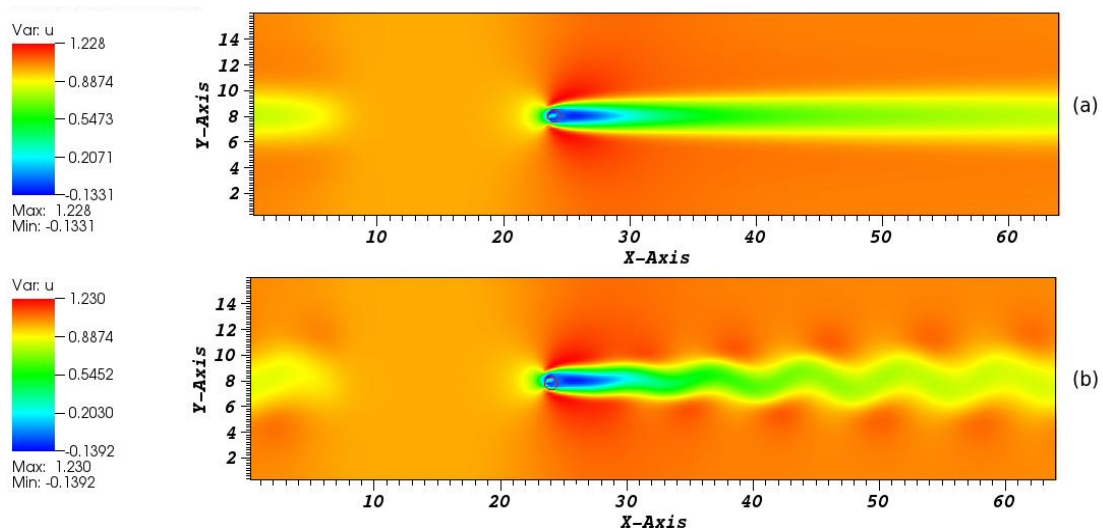


Figura 2. Componente u da velocidade. Escoamento sobre cilindro a diferentes Reynolds (a) $Re = 40$, (b) $Re = 47$.

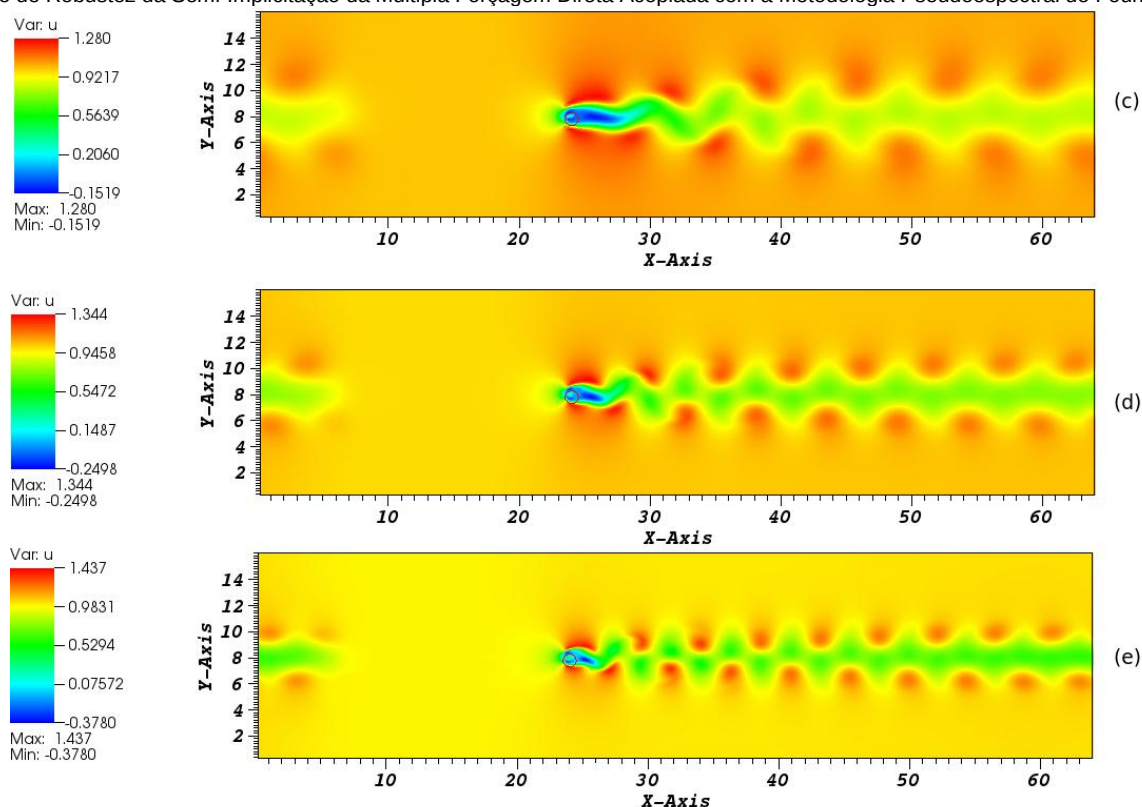


Figura 2. (cont.) Componente u da velocidade. Escoamento sobre cilindro a diferentes Reynolds: (c) $Re = 60$, (d) $Re = 100$, (e) $Re = 200$.

4. REFERÊNCIAS

- Courant, R., Friedrichs, K.; Lewy, H., 1967. "On the partial difference equations of mathematical physics". IBM journal, v.1, pp. 215-234.
- Briggs, W. & Henson, V., 1995. "The DFT". Philadelphia: SIAM.
- Lai, M-C. & Peskin, C.S., 2000. "An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity", *Journal of Computational Physics*, vol. 160, pp.705-719.
- Lima E Silva, A.L.F., Silveira-Neto, A., & Damasceno, J.J.R, 2003. "Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method", *Journal of Computational Physics*, vol. 189, pp. 351-370.
- Mariano, F. P., 2011. "Numerical solution of Navier-Stokes equations using a hybrid methodology of immersed boundary and Fourier pseudo-spectral". PhD thesis, Federal University of Uberlândia/Brasil.
- Oliveira, E .P., Silveira-Neto, A. & Mariano, F. P., 2014. "New Methodology Using Immersed Boundary Method and Multi-Direct Forcing", *Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, 2014, Fortaleza/Brasil*.
- Peskin, C.S., 1977. "Numerical analysis of blood flow in heart, *Journal of Computational Physics*", vol. 25, p. 220.
- Souza, A. M., 2005. "Numerical Analysis of free circular jets in transition to turbulence"; PhD thesis, Federal University of Uberlândia/Brasil.
- Takahashi, 2006. *Fast Fourier Transform.*, open code.
- XU, S.; WANG, Z., 2006. "An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries". *Journal of Computational Physics*, v. 216, pp.454-493.

4. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.