

INFLUÊNCIA DE TENSÕES DE ORIGEM TÉRMICA SOBRE O COMPORTAMENTO DINÂMICO DE PLACAS RETANGULARES

Vergílio Torezan Silingardi Del Claro, LMEst - UFU, vergiliotorezan@gmail.com
Domingos Alves Rade, LMEst – UFU / IEM - ITA, domingos@ufu.com.br

Resumo. Em numerosas situações, estruturas funcionando em regime vibratório podem estar sujeitas a variações de temperatura. É sabido que estas variações causam dilatações ou contrações que, uma vez restringidas, causam o aparecimento de tensões internas. Estas, por sua vez, alteram a rigidez da estrutura e, consequentemente, suas características dinâmicas. Existem, entretanto, poucos estudos sobre o comportamento vibratório de estruturas sujeitas a variações de temperatura. Neste contexto, no presente trabalho é desenvolvida a modelagem físico-matemática de estruturas do tipo placa. Por meio de simulações por elementos finitos, é caracterizada a influência da temperatura sobre os valores das frequências naturais de uma placa retangular engastada em seus quatro lados.

Palavras chave: vibrações de placas; tensões térmicas; análise modal; elementos finitos.

1. INTRODUÇÃO

Diversas estruturas e sistemas de engenharia são submetidos a vibrações mecânicas, sendo estas geralmente indesejadas, em virtude de seus efeitos nocivos para o funcionamento adequado, além de poderem causar falhas por fadiga e níveis inadequados de ruído a usuários e operadores. Ao mesmo tempo, estruturas vibratórias podem estar sujeitas a variações apreciáveis de temperatura, podendo estas variações resultar das condições ambientais ou ser resultantes da própria operação da estrutura. Casos notáveis são os das estruturas espaciais, sujeitas a ciclos de aquecimento-resfriamento devidos à radiação solar, estruturas de aeronaves, cuja temperatura varia significativamente com a altitude de operação, e outros equipamentos (turbinas a gás, motores de combustão interna, caldeiras, laminadores, etc.).

É amplamente conhecido que variações não uniformes de temperatura ou a restrição das dilatações ou contrações térmicas podem gerar campos adicionais de tensões, as quais, por sua vez, exercem influência sobre as características vibratórias de estruturas (Flores, 2004). Assim, em numerosas situações de interesse prático torna-se importante considerar o acoplamento termomecânico na modelagem do comportamento vibratório.

Neste contexto, o presente trabalho enfoca procedimentos de modelagem numérico-computacional do acoplamento termomecânico em estruturas planas do tipo placa. Na sequência, após a apresentação dos principais fundamentos teóricos, são descritas simulações numéricas por elementos finitos que permitem evidenciar tal acoplamento e quantificar o grau de influência dos campos de temperatura sobre os valores de frequências naturais de uma placa retangular, escolhida para exemplificação.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Considera-se uma placa retangular plana de dimensões a e b , e espessura h , sujeita a uma distribuição de temperatura que varia sobre a superfície da placa, mas que é admitida constante através da espessura. A distribuição de temperatura ocasiona uma distribuição de tensões no plano governada por uma função de tensão de Airy, $\phi(x, y)$, de tal sorte que as componentes de tensão sejam obtidas segundo (Johns, 1965):

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

sendo $\phi(x, y)$ a solução da equação:

$$\nabla^4 \phi(x, y) = -E\alpha \nabla^2 T(x, y), \quad (2)$$

onde $\nabla^2(.) = \frac{\partial^2(.)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(.)}{\partial y^2}$ e $\nabla^4(.) = \left[\frac{\partial^2(.)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(.)}{\partial y^2} \right]^2$, E é o módulo de elasticidade e α é o coeficiente de dilatação térmica do material.

De acordo com (Timoshenko, 1936) e (Mead, 2003), a função $\phi(x, y)$ deve satisfazer às condições de contorno em termos de tensões e deslocamentos nas bordas da placa.

A modelagem do comportamento vibratório em flexão da placa a partir de princípios variacionais requer a formulação das energias cinética e potencial, as quais, admitindo as hipóteses da teoria de placas finas de Kirchhoff, são expressas segundo (Gérardin e Rixen, 1997):

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (3)$$

$$U_e = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad \text{onde: } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4)$$

$$U_\sigma = \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\sigma_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (5)$$

Nas equações acima, T é a energia cinética, U_e é a energia potencial elástica associada à deformação de flexão da placa, U_σ é a energia potencial associada às tensões de origem térmica. Além disso, $w(x, y)$ é o campo de deslocamentos transversais, ρ é a densidade volumétrica e ν é o coeficiente de Poisson do material da placa.

As equações acima mostram que a presença de tensões de origem térmica influencia a energia potencial e, em consequência, a rigidez em flexão da placa. Esta última, por sua vez, altera o comportamento em flexão estático e dinâmico da placa.

2.1. Formulação pelo método dos elementos finitos de placas sujeitas a tensões de origem térmica

O Método dos Elementos Finitos permite modelar estruturas de geometrias complexas e considerar campo de temperaturas variáveis espacialmente. Por esta razão, esta técnica de modelagem é adotada neste trabalho para a caracterização do comportamento dinâmico de placas cinematicamente restringidas sujeitas a variações de temperatura. É considerada uma placa retangular com dimensões $100 \times 150 \times 1$ (mm), composta de aço ABNT 1020, engastada em todas as bordas. Considera-se ainda que a placa esteja submetida uniformemente a uma série de valores de temperatura uniformes sobre a placa, variando de 200 a 600 K, com intervalos de 1 K. Para efeito de comparação, o valor de temperatura de referência de 293 K é adotado.

Conforme mostrado na Fig. 1, a modelagem é realizada com o programa comercial ANSYS Mechanical APDL[®], utilizando o elemento do tipo casca *SHELL281*, com 8 nós (ANSYS, 2013). Admitindo comportamento linear, primeiramente são computadas as matrizes de inércia e de rigidez levando-se em conta os carregamentos mecânicos equivalentes ao carregamento térmico. Isso dá origem a duas matrizes de rigidez: a matriz de rigidez elástica e a matriz de rigidez geométrica. Em seguida, é formulado o problema de análise modal, representado por um problema de autovalores, envolvendo as duas matrizes de rigidez, o qual é resolvido numericamente para determinação das frequências e modos naturais de vibração da placa. Esta análise é realizada para os dez primeiros modos de vibrar, sendo apresentados neste trabalho apenas os cinco primeiros modos. O procedimento é repetido para cada valor de temperatura considerado.

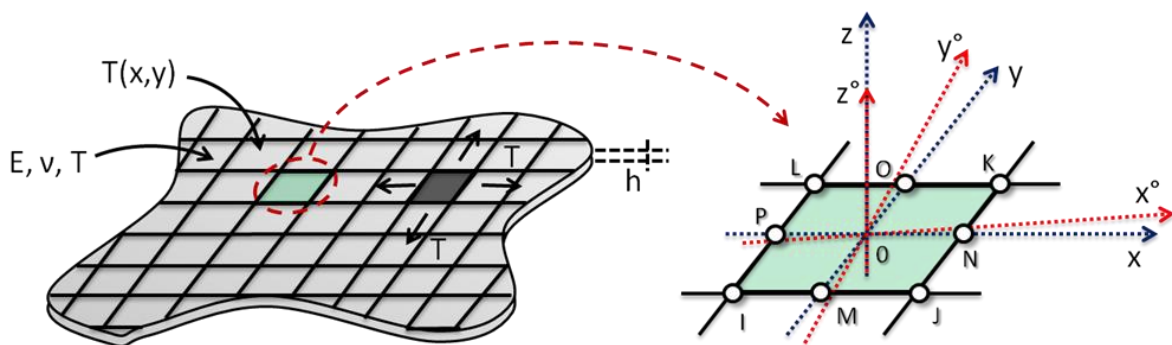


Figura 1. Elemento tipo SHELL281, com 8 nós

3. RESULTADOS

A Fig. 2 apresenta os valores das cinco primeiras frequências naturais da placa em função da temperatura, ao passo que a Fig. 3 apresenta as correspondentes variações percentuais, adotando-se os valores das frequências para temperatura de 293 K como referência. Nota-se a redução contínua e monotônica dos valores das frequências naturais com o aumento do valor da temperatura, o que pode ser explicado pelo fato que a restrição à dilatação da placa pelos apoios leva ao surgimento de tensões normais de compressão. Nota-se, também, a tendência de anulação dos valores das frequências naturais para valores mais elevados da temperatura. Esta anulação caracteriza a condição de flambagem da placa. Para esta configuração do problema foram realizadas simulações variando também a razão de aspecto da placa, ou seja, a relação das dimensões dos lados "a" e "b" da placa, definida por: $A_r = a/b$. Foram consideradas dez variações igualmente espaçadas, compreendidas no intervalo $A_r \in [0,4 ; 1,0]$, como visto nas Figura 4.

Observam-se variações aproximadamente lineares dos valores das frequências em função da temperatura, na faixa que antecede a aproximação da condição de flambagem.

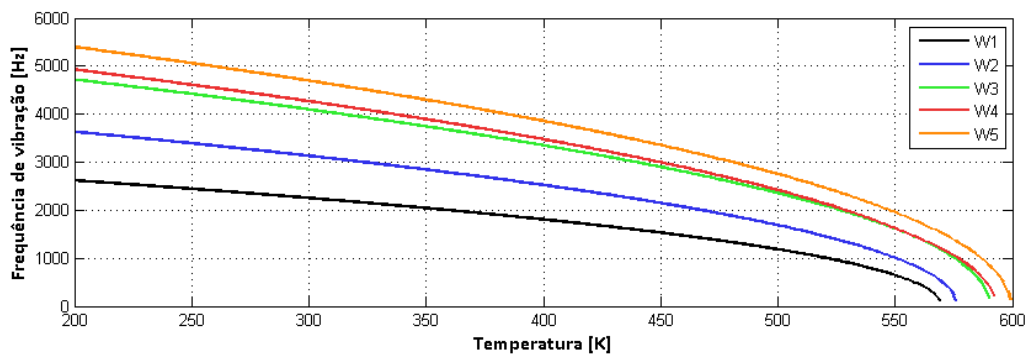


Figura 2. Variações absolutas das cinco primeiras frequências naturais em função da temperatura para $A_r = 0.6667$

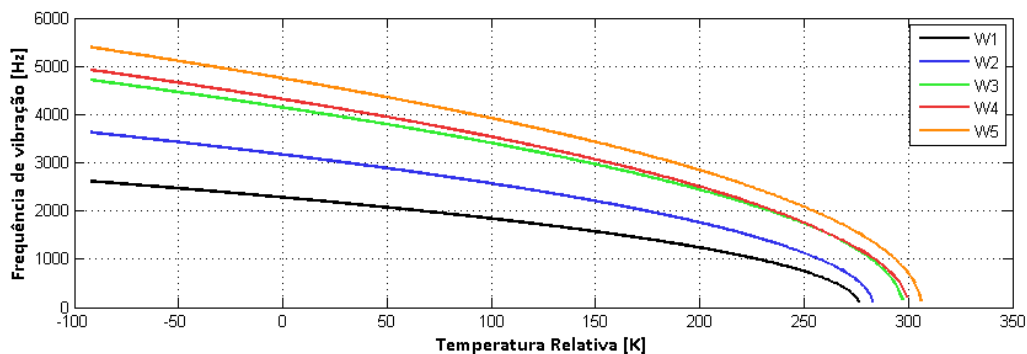


Figura 3. Variações relativas das cinco primeiras frequências naturais em função da temperatura para $A_r = 0.6667$

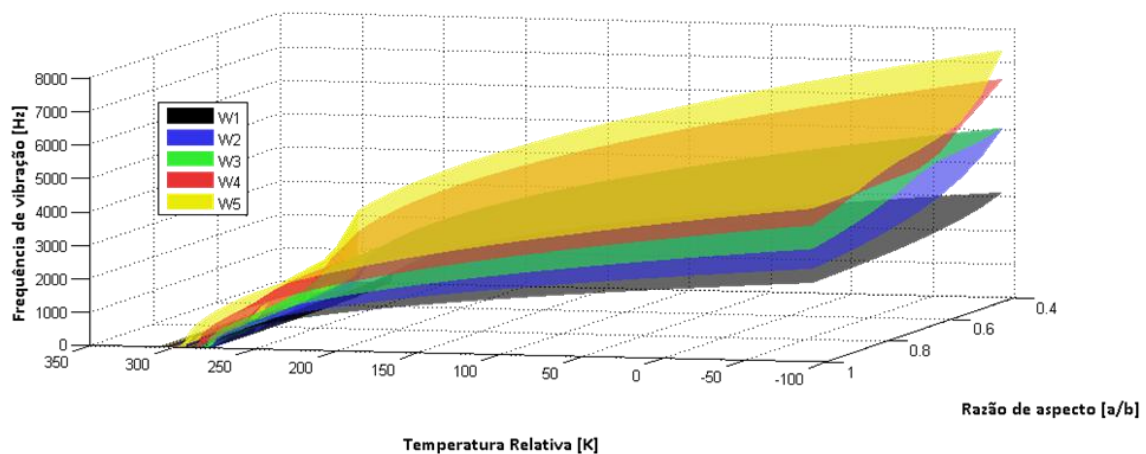


Figura 4. Variações relativas de frequências e temperatura, para diferentes valores de razão de aspecto.

A Figura 5 ilustra os cinco primeiros modos de vibrar da estrutura, para uma temperatura absoluta da placa de 293K e razão de aspecto de 0,15.

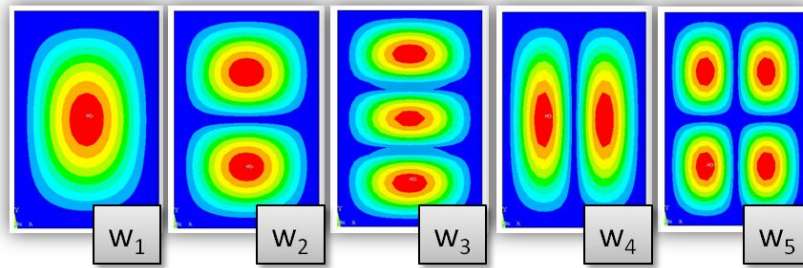


Figura 5. Ilustração dos cinco primeiros modos de vibrar da placa engastada

4. CONCLUSÕES

As simulações realizadas permitiram caracterizar a influência de campos de temperatura sobre o comportamento dinâmico de placas retangulares. A modelagem por elementos finitos mostrou-se muito conveniente em virtude de sua flexibilidade para a modelagem de estruturas com geometria complexa, com diferentes tipos de condições de contorno e sujeitas a distribuições arbitrárias de temperatura. Os resultados obtidos mostram que as variações das frequências naturais de placas engastadas, devido à variação de temperatura, podem ser muito significativas, sendo possível prever a condição de flambagem da placa pela anulação dos valores das frequências naturais.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq, à FAPEMIG e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE) pelo apoio às suas atividades de pesquisa.

6. REFERÊNCIAS

- ANSYS, A. R. (2013). *Mechanical APDL - Coupled Field Analysis Guide*. ANSYS Inc.
- Flores, J. E. (2004). *Caracterização do efeito de enrijecimento por tensões e identificação de cargas em estruturas baseada em respostas dinâmicas*. Uberlândia: FEMEC - UFU.
- Gérardin, M., & Rixen, D. (1997). *Mechanical Vibrations - Theory and Application to Structural Dynamics*. U.K.: John Wiley & Sons.
- Johns, D. J. (1965). *Thermal Stress Analysis*. Elsevier Science and Technology Books.
- Mead, D. J. (2003, March 11). Vibration and buckling of flat free-free plates under non-uniform in-plane thermal stresses. *Journal of Sound and Vibration*, pp. 141-165.
- Timoshenko, S. (1936). *Theory of Elastic Stability*. New York: McGraw-Hill.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.