

PROJETO ÓTIMO DE CIRCUITOS SHUNT PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS COMPOSTAS

Lorrane Pereira Ribeiro, Universidade Federal de Uberlândia, lorranemecatronica@gmail.com
Antônio Marcos Gonçalves de Lima, Universidade Federal de Uberlândia, amglima@mecanica.ufu.br

Resumo. O trabalho em questão dedica-se a modelagem numérico-computacional de sistemas estruturais do tipo placas planas compostas contendo materiais piezelétricos acoplados a circuitos elétricos shunt monomodais para o controle passivo de vibrações. Técnicas de otimização multiobjetivo determinística são também empregadas com vistas ao projeto ótimo de tais circuitos elétricos. No que diz respeito a modelagem por elementos finitos da estrutura composta contendo elementos piezelétricos, ênfase é dada à combinação das teorias da camada equivalente única, em específico, a teoria cisalhante de primeira ordem (First-Order Shear Deformation Theory-FSDT) com a teoria das camadas equivalentes discretas, também conhecida como Layerwise Theory, para a consideração dos campos elétricos que são assumidos discretos ao longo da espessura da placa composta. Todo o procedimento de modelagem foi desenvolvido em ambiente de programação MATLAB®.

Palavras chave: estruturas compostas, materiais piezelétricos, circuitos shunt, controle passivo de vibrações

1. INTRODUÇÃO

No contexto atual de engenharia, a utilização de materiais compósitos em detrimento aos convencionais é uma realidade, sendo que, tal fato ocorre em virtude das propriedades superiores destes materiais. Em se tratando da modelagem de estruturas compostas o conceito de Camada Equivalente Única é usado para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos e o conceito de Camadas Equivalentes Discretas é usado para aproximar os potenciais elétricos. Dentre as várias teorias da primeira categoria, utilizou-se a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (First-order Shear Deformation Theory – FSDT), a qual requer funções pertencentes ao espaço C^0 , ou seja, funções contínuas e pode ser usada para a modelagem de placas e cascas finas ou moderadamente espessas (Cen et al., 2002). Além disso, a FSDT é considerada a teoria que apresenta a melhor relação entre capacidade de predição e custo computacional para uma larga classe de aplicações (Mendonça, 2005).

A piezeletricidade permite que parte da energia mecânica associada à vibração possa ser convertida em energia elétrica e dissipada convenientemente, em um circuito shunt, formando assim o mecanismo de amortecimento passivo. Dentre os circuitos shunt, o circuito ressonante se destaca. Formado por um indutor e um resistor, este circuito permite a sintonia para qualquer frequência que se queira amortecer, seja uma frequência natural ou não; além disso, algumas melhoras na topologia do circuito possibilitam o amortecimento simultâneo de mais de um modo de vibrar. Do ponto de vista mecânico, o circuito é visto pelo sistema como um absorvedor dinâmico de vibrações (Viana, 2005).

Assim, de acordo com o que foi exposto, o principal objetivo deste trabalho é a modelagem numérico-computacional de estruturas compostas utilizando-se da teoria FSDT, a qual se encontra na categoria das teorias da camada equivalente única e que é posteriormente combinada com a teoria discreta, na introdução do elemento piezelétrico na modelagem e, a partir da modelagem da estrutura, realizar o controle passivo de vibrações com a utilização de circuitos shunt.

2. MODELAGEM MECÂNICA

A Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem, FSDT é adotada para a modelagem do problema mecânico. Os campos de deslocamentos para a teoria FSDT são representados de forma simplificada como $\{U\} = [Au]\{\hat{u}\}$, sendo $[Au]$ a matriz que contém a coordenada z parametrizada e $\hat{u}$ representando o vetor dos graus de liberdade elementares mecânicos, que no caso desta teoria adota cinco graus de liberdade. Assumindo-se pequenos deslocamentos e considerando-se os campos de deslocamentos mecânicos previamente definidos, pode-se obter a expressão entre as deformações e os deslocamentos, $\{\epsilon\} = [D]\{\hat{u}\}$, sendo a matriz $[D]$ dos operadores diferenciais.

Foi adotado um sistema de coordenadas global, tendo como coordenadas $(x, y$ e $z)$ comum a toda estrutura e um sistema local (ξ, η, z) devido ao fato dum primeiro momento desejar-se encontrar as matrizes de massa e rigidez elementares. A integração para obtenção destas matrizes é realizada no sistema local, utilizando-se do jacobiano J para a transformação linear de coordenadas, além de se levar em consideração a natureza ortotrópica dos materiais compostos, rotacionando-se as matrizes de propriedades de um de um ângulo θ em torno do eixo z com o auxílio de uma matriz de

transformação T (para as propriedades mecânicas) e Q (para propriedades elétricas), as quais estão definidas no trabalho de Faria (2006). Um exemplo: a rotação para o caso das propriedades mecânicas é $[c_g] = [T][c][T]^T$.

Para modelagem mecânica por elementos finitos é adotado um elemento de placa plana retangular contendo oito nós da família Serendipity (Reddy, 1997), o qual não possui nó central. A correspondência dos deslocamentos totais do elemento com os deslocamentos de cada nó se dá por meio das Funções de Forma (Faria, 2006), da seguinte maneira: $\{\hat{u}(\xi, \eta, t)\} = [N_u(\xi, \eta)]\{u_e(t)\}$, onde $\{u_e(t)\}$ representa os deslocamentos nodais.

O vetor dos deslocamentos mecânicos e as deformações mecânicas podem ser expressos em termos das Funções de Forma e das variáveis mecânicas nodais, respectivamente, $\{U(\xi, \eta, z, t)\} = [Au(z)][N_u(\xi, \eta)]\{u_e(t)\}$ e $\{\varepsilon(\xi, \eta, z, t)\} = [D(z)][N_u(\xi, \eta)]\{u_e(t)\}$.

Agora, para que seja possível encontrar a matriz de massa elementar do sistema, parte-se da equação da energia cinética a nível elementar, $E_c = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV_e$, sendo ρ é a densidade do material, V_e definido como o volume do elemento finito e $\{\dot{U}\}$ como sendo a derivada do vetor dos campos de deslocamentos $\{U\}$. Desta forma, encontra-se a matriz de massa elementar $[M_e]$, que representa a integração, $[M_e] = \int_{V_e} \rho [N_u]^T [A_u]^T [A_u] [N_u] dV_e$. Já a matriz de rigidez elementar é obtida a partir da energia potencial de deformação mecânica, $P_e = \iiint_{\xi, \eta} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\eta d\xi dz$, sendo $\{\sigma\}$ os campos de tensão, dados pela relação entre as propriedades mecânicas do material, já rotacionadas, e a deformação, $\{\sigma\} = [c_g]\{\varepsilon\}$. Nomeando-se $[B_u] = [D(z)][N_u(\xi, \eta)]$, obtêm-se, $[K_e] = \frac{1}{2} \int_{V_e} [B_u]^T [c_g] [B_u] dV_e$.

De posse das matrizes de massa e rigidez elementares, utiliza-se de técnicas clássicas de montagem por elementos finitos, conhecendo-se a conectividade dos nós do sistema, com vistas à obtenção das matrizes globais. Assim, com as matrizes de massa e rigidez globais, encontra-se a equação do movimento do sistema na forma matricial, $[M_g]\{\ddot{u}_g\} + [K_g]\{u_g\} = \{F_g\}$, onde $[M_g]$ e $[K_g]$ são as matrizes globais de massa e rigidez, $\{u_g\}$ é o vetor dos graus de liberdade globais e F_g representa o vetor dos esforços generalizados.

3. MODELAGEM ELETROMECHANICA

Os campos de deslocamentos mecânicos são modelados via utilização da camada equivalente única, e os potenciais elétricos distribuídos de forma discreta ao longo das camadas piezelétricas. Neste contexto, os campos de deslocamentos mecânicos são aproximados via FSDT e o potencial elétrico aproximado por $\phi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{ncamadas+1} L_j(z) \phi_j(x, y, t)$, onde, ϕ_j é o potencial elétrico de cada interface das camadas ao longo da espessura do composto, sendo o subscrito j ligado às interfaces e L_j são as funções de interpolação Lagrangeanas.

A subdivisão do laminado em camadas discretas é que garante a discretização das variáveis elétricas por camadas, sendo o potencial elétrico assumido contínuo em cada camada discreta, e assim tendo uma variação do tipo C^0 ao longo da espessura. Os campos de deslocamentos elétricos são obtidos pelo negativo do gradiente do potencial elétrico, ou seja, $E_i = -\nabla \phi_j$.

Sabe-se que estruturas cristalinas da classe mm2 cobrem os materiais piezelétricos mais frequentemente associados às estruturas inteligentes. A matriz elasto-piezo-dielétrica acoplada do material que corresponde à classe mm2 é expressa na forma matricial de forma completa no trabalho de Faria (2006), assim como as matrizes de propriedades mecânicas, elétricas e dielétricas. Após a rotação das matrizes de propriedades, levando-se em consideração a direção das fibras, encontra-se a partir da matriz elasto-piezo-dielétrica, duas expressões, $\sigma_g = c_g \varepsilon_g - e_g^T E_g$ e $D_g = e_g \varepsilon_g + \chi_g E_g$, sendo que, subscrito g indica a rotação, e_g são as propriedades dielétricas, χ_g a permissividade dielétrica e D_g os deslocamentos elétricos.

Pode-se obter a relação entre potenciais elétricos de cada camada com os potenciais elétricos nodais, sendo que, esta relação se dá por meio das Funções de Forma elétricas, as quais encontram-se definidas no trabalho de Faria (2006). Tal relação se dá por, $\phi(\xi, \eta, t)_i = [N_\phi(\xi, \eta, z)]_{1 \times 8(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{8(n+1) \times 1}$.

Como o vetor Campo Elétrico é dado pelo negativo do potencial elétrico, o mesmo também pode ser escrito em termo das Funções de Forma elétricas, $\{E(x, y, z, t)\}_{3 \times 1} = -\vec{\nabla} [N_\phi(\xi, \eta, z)]_{1 \times 8(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{8(n+1) \times 1}$, sendo que, a essa altura é conveniente introduzir o termo B_ϕ , o qual vem apenas para simplificar e é dado por $B_\phi = \vec{\nabla} [N_\phi(\xi, \eta, z)]$.

Agora é então possível encontrar as matrizes de massa e rigidez elementares do sistema acoplado. A matriz de massa elementar é obtida da mesma maneira que foi demonstrada na seção anterior. Já a obtenção das matrizes de rigidez elementares do elemento finito contendo elemento piezelétrico se dá de uma maneira mais abrangente, visto que, neste caso, os potenciais elétricos são relevantes, podendo os mesmos interferir na rigidez do sistema, sendo modelados pela teoria discreta. Partindo-se da expressão da energia de deformação, $U = \int_{V_e} (\varepsilon^T \sigma - E^T D) dV_e$ e combinando-se com as expressões de σ_g e D_g previamente definidas, encontra-se $U = \int_{V_e} (\varepsilon_g^T c_g \varepsilon_g - \varepsilon_g^T e_g^T E_g - E_g^T e_g \varepsilon_g - E_g^T \chi_g E_g) dV_e$. A partir das relações $\varepsilon_g(x, y, z, t) = B_u(x, y, z) u_e(t)$, $E_g(x, y, z, t) = B_\phi(x, y, z) \varphi_e(t)$, pode-se chegar às seguintes matrizes de rigidez do elemento contendo material piezelétrico, utilizando-se da correlação entre coordenadas e do jacobiano, os quais encontram-se definidos em Faria (2006).

$$K_{uu}^e = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} (B_u^T c_g B_u) dz J d\eta d\xi \quad (1.a)$$

$$K_{u\phi}^e = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} (B_u^T e_g B_\phi) dz J d\eta d\xi \quad (1.b)$$

$$K_{\phi u}^e = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} (B_\phi^T e_g B_u) dz J d\eta d\xi \quad (1.c)$$

$$K_{\phi\phi}^e = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} (B_\phi^T \chi_g B_\phi) dz J d\eta d\xi \quad (1.d)$$

Onde K_{uu}^e é a matriz de rigidez elementar puramente mecânica, $K_{u\phi}^e$ e $K_{\phi u}^e$ são as matrizes eletromecânicas e $K_{\phi\phi}^e$ é a matriz elementar puramente elétrica. Desta forma, a partir das matrizes elementares, encontra-se as matrizes de massa e rigidez globais e, na sequência, as seguinte equação do movimento, $[M_g]\{\ddot{u}(t)\} + [K_{uu}]\{u(t)\} + [K_{u\phi}]\{\phi(t)\} = \{F_g\}$ e $[K_{\phi u}]\{u(t)\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi(t)\} = \{Q_g\}$, onde Q_g é o vetor de cargas generalizadas.

4. INCLUSÃO DOS CIRCUITOS SHUNT

A partir das equações do movimento no domínio de Fourier e do vetor de correntes elétricas que fluem através dos circuitos *shunt*, $\bar{Q}(\omega) = (1/j\omega)Z^{-1}(\omega)L\bar{\phi}(\omega)$, onde $Z(\omega)$ forma a matriz de impedâncias e L permite selecionar, dentre os potenciais elétricos independentes, aqueles que correspondem aos eletrodos dos circuitos *shunt* conectados, encontra-se a matriz de Funções de Resposta em Frequência (FRF):

$$H(\omega) = \left[\bar{K}_{uu} - \bar{K}_{u\phi} \left(\bar{K}_{\phi\phi} - (1/j\omega)Z^{-1}(\omega) \right)^{-1} \bar{K}_{\phi u} - \omega^2 M_g \right]^{-1} \quad (2)$$

5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Foram realizadas simulações numéricas utilizando-se uma placa composta em balanço, formada por cinco camadas, das quais, quatro delas são de material composto ($\rho = 1578 \text{ Kg/m}^3$) e, a última, de um elemento piezelétrico, PZT G1195 ($\rho = 7600 \text{ Kg/m}^3$). A placa foi discretizada em 6 elementos finitos, como ilustrado na Fig. 1. Além disso, foi investigada a seguinte configuração para o composto: $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$.

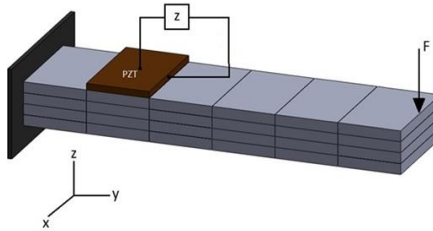


Figura 1. Placa composta em balanço com elemento piezelétrico

Neste elemento piezelétrico serão acoplados circuitos elétricos *shunt* do tipo resistivo e ressonante. Em seguida os resultados serão comparados para avaliar o desempenho dos mesmos. Na mesma figura, está apresentada a discretização por elementos finitos do sistema a ser estudado, sendo que, a espessura de cada camada do composto é de $1,048 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, a largura, tanto da viga quanto do PZT, dada por $0,0254 \text{ m}$, e o comprimento total da viga de $0,3048 \text{ m}$. A espessura do PZT utilizado é de $0,762 \text{ mm}$, comprimento de $0,0508 \text{ m}$ e a distância entre o mesmo e o engaste sendo de $0,0020 \text{ m}$. As propriedades mecânicas e elétricas dos materiais envolvidos para a geração do modelo de elementos finitos do sistema eletromecânico encontram-se no trabalho de (Faria, 2006).

Os valores nominais de resistência, indutância e espessura do piezelétrico foram calculados de acordo com a literatura como sendo ótimos (Hagood e von Flotow, 1991), obtendo-se. para ambos os circuitos, espessura de $7,62 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Para o circuito resistivo, resistência de $3,23 \cdot 10^5 [\Omega]$ e para o ressonante, resistência de $1,61 \cdot 10^4 [\Omega]$ e indutância de $6,29 \cdot 10^2 [H]$.

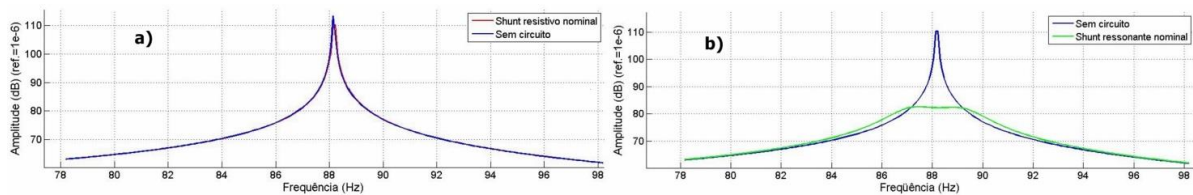


Figura 2. Comparação das FRFs para o sistema sem e com circuito *shunt*: a) resistivo; b) ressonante

5.1. Otimização Multiobjetivo Determinística

Para que fosse possível encontrar os valores ótimos de resistência, indutância e espessura do elemento piezelétrico utilizou-se o algoritmo genético NSGA (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*), baseado na construção de frentes de Pareto formadas por conjuntos de soluções ótimas no espaço multiobjetivo de projeto. Os parâmetros utilizados no algoritmo NSGA: probabilidade de seleção, reprodução e mutação iguais a 0,25; número de gerações e indivíduos igual a 50 e coeficiente de niche, $\sigma = 0,2$. As funções objetivo foram f_1 que corresponde à amplitude do 1º modo de vibração da estrutura e, f_2 que corresponde à massa total acrescida à estrutura composta pelo elemento piezelétrico. Foram escolhidos os pontos que melhor satisfazem o compromisso dessas duas funções objetivo. Como valores ótimos encontrou-se após a otimização: Para o *shunt* resistivo, espessura de $3,05 \times 10^{-4} m$, e resistência de $28,99 \times 10^3 [\Omega]$. Já para o ressonante, espessura de $3,05 \times 10^{-4} m$, resistência de $18,86 \times 10^3 [\Omega]$ e indutância de $3,05 \times 10^2 [H]$. De posse dos parâmetros ótimos para cada tipo de circuito, foram calculadas as respectivas funções de resposta em frequência como mostrado na Fig. 3. Observa-se o elevado valor de indutância calculado para o caso do circuito *shunt* ressonante, levando-se assim, a necessidade de utilização de indutâncias sintéticas no caso de um aparato experimental.

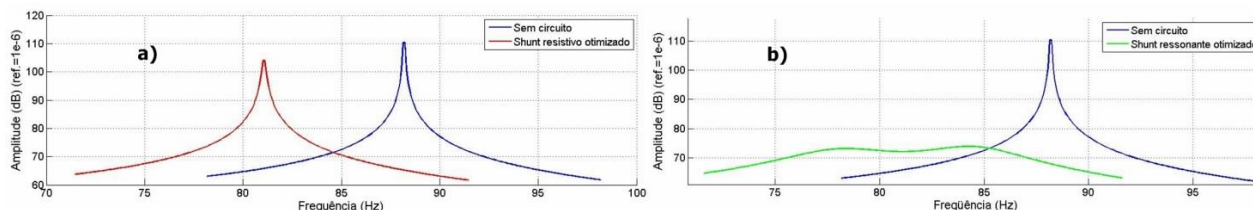


Figura 3. Comparação das FRFs para o sistema sem e com *shunt* otimizado: a) resistivo; b) ressonante

6. CONCLUSÕES GERAIS

Diante dos resultados obtidos, pode-se concluir que:

- Comparando as amplitudes das FRFs da estrutura composta com *shunt* resistivo e ressonante otimizados, pode-se notar que para ambos os casos, houve alterações significativas na frequência de ressonância do sistema. Isto pode ser explicado em função da alteração nos valores geométricos da estrutura como a espessura do elemento piezelétrico. Além disso, é possível observar que o efeito do circuito *shunt* resistivo é análogo ao de se atribuir características viscoelásticas ao sistema, enquanto que o comportamento induzido pelo circuito *shunt* resistivo-indutivo é similar ao observado com a inclusão de um absorvedor dinâmico de vibrações;
- O circuito ressonante, em ambas simulações, mostra ser mais vantajoso em termos da redução dos níveis de vibrações do sistema quando comparado com o circuito elétrico resistivo;
- Como as frequências envolvidas em problemas de controle passivo de vibrações são baixas, como demonstrado nas simulações numéricas, as indutâncias requeridas no caso do uso de circuito *shunt* ressonante para o controle passivo de vibrações são muito elevadas. Tal fato leva a necessidade de utilização de indutâncias sintéticas;
- Em termos do uso de técnicas de otimização determinística, os resultados obtidos permitem concluir sobre a importância de se considerar não somente os parâmetros do circuito elétrico, mas também da estrutura, mesmo tendo sido considerado aqui somente a espessura do elemento piezelétrico.

7. AGRADECIMENTOS

À CAPES pela bolsa de estudos e aos órgãos de fomento CNPq e FAPEMIG.

8. REFERÊNCIAS

- Cen, S., Soh, A., Long, Y.; Yao, Z. A., 2002. New 4-node Quadrilateral FE Model with Variable Electrical Degrees of Freedom for the Analysis of Piezoelectric Laminated Composite Plates. *Composite Structures*. v. 58, n.4, p. 583-599.
- Faria, A. W., 2006. *Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica*. 152f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.
- Hagood, N. W. e von Flotow, A., 1991, "Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, Nº2, pp 243-268.
- Mendonça, P. T. R., 2005. *Materiais Compostos & Estruturas - Sanduiche: Projeto e Análise* 1.ed. Manole.
- Reddy, J. N., 1997. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. 2.ed. Florida: CRC Press.
- Viana, F.A.C., 2005. *Amortecimento de vibrações usando pastilhas piezoelétricas e circuitos shunt ressonantes*.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.