

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA COM RESTRIÇÕES USANDO O ALGORITMO DE COLÔNIA DE VAGALUMES

Fernando Ricardo Moreira, Universidade Federal de Goiás, frmoreira@ufg.br

Fran Sérgio Lobato, Universidade Federal de Uberlândia, fslobato@feq.ufu.br

Valder Steffen Jr., Universidade Federal de Uberlândia, vsteffen@mecanica.ufu.br

Resumo. Quando lidamos com otimização, os objetivos considerados podem ser sensíveis a pequenas perturbações do vetor de variáveis de projeto e/ou de seus parâmetros, podendo causar desvios importantes nos objetivos. Neste cenário, a otimização robusta, que consiste na minimização deste efeito sobre os resultados obtidos, configura-se como uma alternativa interessante para essa finalidade. Diante disso, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma metodologia sistemática para o tratamento de problemas de otimização multiobjetivos com restrições usando o conceito de média efetiva aliado ao algoritmo MOFA (Multiobjective Optimization Firefly Algorithm). Os resultados obtidos demonstram que a metodologia proposta configura-se como uma estratégia interessante para o tratamento de problemas de otimização robusta com restrições.

Palavras-chave: Otimização Multiobjetivo Robusta, Colônia de Vagalumes, Média Efetiva.

1. INTRODUÇÃO

Tradicionalmente considera-se que a solução de um problema de otimização não está sujeita à influência de perturbações das variáveis de projeto e/ou dos parâmetros envolvidos (Moreira et al., 2013). Todavia, como ilustrado na Fig. 1, a função objetivo f é sensível a perturbações da variável de projeto x nas vizinhanças da solução ótima global, enquanto que a solução ótima local é mais estável em relação a pequenas perturbações em sua vizinhança.

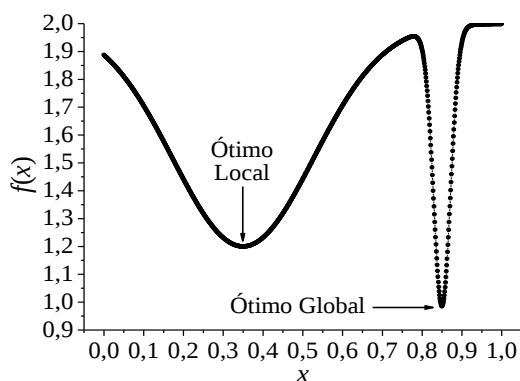


Figura 1: Solução Robusta e Solução Sensível à realização de perturbações para o problema mono-objetivo.

Neste cenário, a determinação de uma metodologia que seja robusta, isto é, o vetor de objetivos é pouco sensível a pequenas perturbações das variáveis de projeto e/ou dos parâmetros dos objetivos, é de grande importância no contexto do projeto de sistemas de engenharia (Taguchi, 1984).

Diante do que foi apresentado, este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta robusta baseada no conceito de Média Efetiva (Deb e Gupta, 2006) associado ao algoritmo *Multiobjective Optimization Firefly Algorithm* - MOFA (Lobato et al, 2011b) para o tratamento de problemas de otimização multiobjetivos com restrições. Este trabalho está estruturado conforme segue. Nas seções 2 e 3 são apresentados a definição de solução multiobjetivo robusta com restrições e a concepção básica do algoritmo MOFA. Na seção 4 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação em uma função matemática. Finalmente, na seção 5, as conclusões são apresentadas.

2. OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTIOBJETIVO

No contexto de otimização multiobjetivo robusto, o estado da arte nos revela que somente alguns poucos trabalhos podem ser encontrados, dentre os quais Deb e Gupta (2006) e, mais recentemente, Moreira et al. (2013). Isto significa que não existe um estudo sistemático para a incorporação de robustez em otimização multiobjetivo. Tradicionalmente, as metodologias que consideram robustez o fazem pela incorporação de incertezas ao problema de otimização, via distribuição estatística dos parâmetros e, por isso razão, são denominadas medidas de expectância e de variância (Deb e Gupta, 2006; Jin e Sendhoff, 2003; Paenk et al., 2006). Segundo Paenk et al. (2006), tais medidas não podem ser calculadas analiticamente, isto é, podem apenas ser estimadas através de algum processo de amostragem, como por

exemplo, o método de Monte Carlo (Metropolis e Ulam, 1949). Alternativamente, pode-se fazer uso do Método do *Hipercubo Latino* como alternativa para a aplicação do Método de Monte Carlo (Viana et al., 2010).

Recentemente, Deb e Gupta (2006) estenderam o conceito de Média Efetiva, proposto inicialmente para o tratamento de problemas mono-objetivos, para o tratamento de problemas multiobjetivos. Neste caso, uma solução x^* é denominada solução multiobjetivo robusta se a solução Ótima de Pareto é viável para o seguinte problema de otimização multiobjetivo definido em relação à vizinhança δ de uma solução x (Deb e Gupta, 2006):

$$\min \left(\frac{1}{|Y_\delta(x)|} \int_{y \in Y_\delta(x)} (f_1 + r_p g(x)) dy, \frac{1}{|Y_\delta(x)|} \int_{y \in Y_\delta(x)} (f_2 + r_p g(x)) dy, \dots, \frac{1}{|Y_\delta(x)|} \int_{y \in Y_\delta(x)} (f_M + r_p g(x)) dy \right) \quad (1)$$

onde $|Y_\delta|$ é o hipervolume da vizinhança, x é o vetor de variáveis de projeto, f é o vetor que contém M objetivos, $g(x)$ é o vetor de restrições de desigualdade e r_p é o parâmetro de penalidade para o tratamento de restrições. Para aplicação desta técnica, um conjunto finito de H soluções vizinhas a uma solução y deve ser gerado “aleatoriamente” para a avaliação da integral dada pela Eq. (1). Neste caso, definindo-se a vizinhança δ em relação ao vetor de variáveis de projeto, N soluções x são geradas empregando-se o Método do Hipercubo Latino, sendo a integral avaliada numericamente. Salienta-se que isto onera em muito o custo computacional do processo, já que para cada objetivo e para cada solução são necessárias, a cada geração, H avaliações adicionais da função objetivo (Deb e Gupta, 2006).

3. MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION FIREFLY ALGORITHM (MOFA)

O *Multiobjective Optimization Firefly Algorithm* (MOFA), proposto por Lobato et al. (2011a), é fundamentado no Algoritmo de Colônia de Vagalumes (ACV), proposto por Yang, (2008) devido ao sucesso encontrado por esta técnica heurística para a resolução de problemas matemáticos e de engenharia (Yang, 2008; Luz et al., 2009; Lobato e Steffen Jr, 2010; Lobato et al., 2011ab; Lobato et al, 2012; Moreira et al., 2013). Basicamente, o algoritmo MOFA consiste na geração de candidatos a solução do problema de otimização via operadores do ACV (ver Eq. 2) associado ao critério de dominância de Pareto (Deb, 2001) e ao operador de truncamento de soluções (Deb, 2001). No caso do ACV, Yang (2008) definiu três regras simplificadoras para o delineamento da execução do algoritmo: (i) qualquer vagalume do enxame poderá ser atraído ou atrair; (ii) a atratividade é diretamente proporcional ao brilho emitido e inversamente proporcional à distância entre os vagalumes; (iii) o brilho emitido é determinado em comparação com seu valor na função objetivo, isto é, quanto melhor avaliado maior será o seu brilho. Neste caso, na k -ésima iteração, a movimentação de um vagalume x_i em direção a um melhor vagalume x_j é definida pela seguinte equação:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \beta_0 \exp(-\gamma r^2) (x_j^k - x_i^k) + \alpha (rand - 0,5) \quad (2)$$

onde β_0 e γ são parâmetros pré-determinados do algoritmo: atratividade máxima e coeficiente de absorção da luz, respectivamente. O segundo termo desta equação insere o fator de atratividade. Já o terceiro termo, ponderado pelo parâmetro α , regula a inserção aleatoriedade no caminho percorrido pelo vagalume e $rand$ é um número aleatório entre 0 e 1.

Segundo Yang (2008) a atratividade de um vagalume é determinada pela intensidade do brilho emitido por ele, e esta intensidade é função de sua avaliação. Como a atratividade entre dois vagalumes é inversamente proporcional à distância entre eles, deve-se escolher uma função decrescente, em relação à distância $r=d(x_i, x_j)$ entre os vagalumes.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste trabalho, a metodologia proposta é aplicada na resolução de um problema de otimização multiobjetivo com restrição que possui solução analítica conhecida. Na Tabela (1) são apresentados o problema de otimização multiobjetivo e sua solução analítica, em termos de Média Efetiva, função do parâmetro de perturbação δ . Conforme destacado por Deb e Gupta, (2006), a solução ótima para este problema, isto é, a Curva de Pareto, consiste de $0 \leq x_1 \leq 1$, x_2 calculado via ativação da restrição de desigualdade e $x_i=0$ ($i=3, \dots, 5$).

Para avaliar a qualidade da solução encontrada pelo algoritmo MOFA na resolução do problema nominal (sem robustez) e para o problema robusto, as métricas de convergência (CM) e de diversidade (DM) serão utilizadas (Deb, 2001).

$$CM = \frac{\sum d_i}{N} \quad (3)$$

$$DM = \frac{d_f + d_l + \sum |d_i - d_m|}{d_f + d_l + (N-1)d_m} \quad (4)$$

onde d_i é a distância euclidiana (no espaço de objetivos) entre a solução calculada e a analítica mais próxima, d_f e d_l representam a distância euclidiana entre as soluções extremas da Curva de Pareto e do conjunto de soluções não

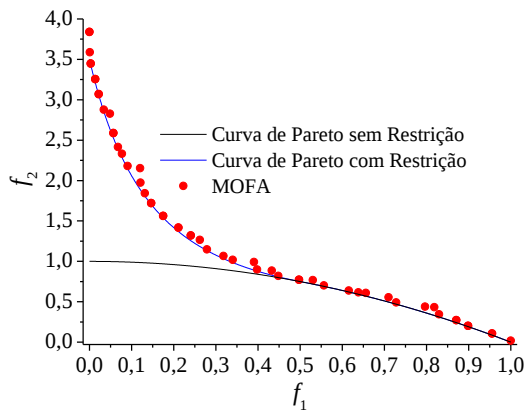
dominadas e d_m é a média destas distâncias. A primeira métrica calcula a média aritmética das distâncias entre o conjunto de soluções não dominadas obtidas e o conjunto ótimo (analítico). Já a segunda métrica é utilizada para medir o espalhamento das soluções no conjunto de soluções calculadas pelo algoritmo.

Tabela 1: Descrição dos estudos de caso considerados neste trabalho (Deb e Gupta, 2006).

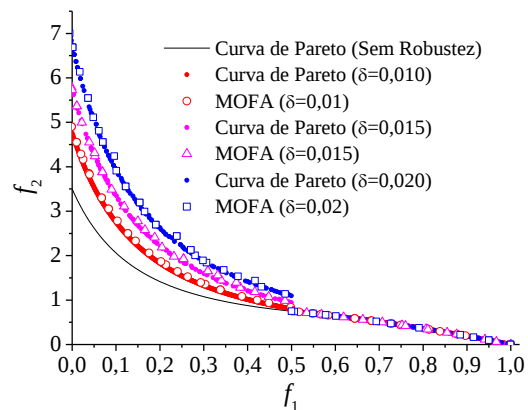
F_1	$\min(f_1(x), f_2(x)) = (x_1, h(x_1) + G(x)S(x_1))$ $\text{onde } h(x_1) = 1 - x_1^2, G(x) = \sum_{i=2}^5 50x_i^2, S(x_1) = \frac{1}{0,2 + x_1} + x_1^2$ $\text{sujeito a } g(x) = 0,2x_1 + x_2 - 0,1 \geq 0, 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ e } -1 \leq x_i \leq 1, i = 2, \dots, 5$
Média Efetiva Analítica (f^{eff})	$\min(f_1^{eff}(x, \delta), f_2^{eff}(x, \delta)) = (x_1, H(x, \delta))$ $f_2^{eff} = \begin{cases} 1 - x_1^2 & \text{se } x_1 \geq 0,5 \\ H_1 H_2 & \text{se } x_1 < 0,5 \end{cases}$ $\text{onde } H_1 = 1 - x_1^2 - \frac{\delta_1^2}{3} + \left(\frac{1}{2\delta_1} \log \left(\frac{0,2 + x_1 + \delta_1}{0,2 + x_1 - \delta_1} \right) + \left(x_1^2 + \frac{1}{3} \delta_1^2 \right) \right) \sum_{i=3}^5 \frac{100}{3} \delta_i^2$ $\text{e } H_2 = \frac{50}{2\delta_1} \int_{x_1 - \delta_1}^{x_1 + \delta_1} \left(\frac{1}{0,2 + x_1} + x_1^2 \right) (0,1 - 0,2x_1 + 0,2\delta_1 + \delta_2)^2 dx_1$

Em cada execução, foram utilizados os seguintes parâmetros do algoritmo MOFA: população com 50 vagalumes, número de gerações igual a 250, coeficiente de absorção e coeficiente de atratividade iguais a 1, e número de amostras utilizadas para estimar a integral, igual a 100. A presente aplicação foi simulada dez vezes considerando como sementes iniciais para o gerador de números aleatórios *rand* do software Matlab®, o vetor [0 1 ... 9]. Os desvios para as n ($n=5$) variáveis de projeto foram definidos como $[\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \delta_5] = [\delta \ 2\delta \ 2\delta \ 2\delta \ 2\delta]$ (Deb e Gupta, 2006) e r_p igual a 10^8 .

As Figuras 2(a) e 2(b) apresentam a Curva de Pareto sem ($\delta=0$) e com robustez ($\delta=[0,01 \ 0,015 \ 0,020]$) obtidas pelo algoritmo MOFA. Conforme destacado por Deb e Gupta (2006), a Curva de Pareto analítica pode ser descrita por duas regiões, dentre as quais, o efeito da restrição, em relação ao problema sem restrição, é evidenciado para x_1 menor que 0,5. Por outro lado, para x_1 maior que 0,5, a restrição é sempre atendida, independente do valor do δ empregado. Este efeito fica claro com o aumento do parâmetro de perturbação δ na Fig. 2(b), fazendo com que exista descontinuidade na Curva de Pareto.



(a) Curva de Pareto Nominal (sem robustez) para a semente inicial igual a zero.



(b) Curva de Pareto robusta considerando diferentes valores de δ para semente inicial igual a zero.

Figura 2: Soluções Analíticas e obtidas pelo Algoritmo MOFA.

A Tabela (2) apresenta as métricas de convergência e de diversidade obtidas para o estudo de caso robusto para diferentes valores de δ . Nesta tabela observa-se que os valores obtidos para as métricas são considerados satisfatórios, já que as distâncias tendem a valores pequenos.

5. CONCLUSÕES

A metodologia proposta, testada previamente em Moreira et al. (2013) para problemas multiobjetivos sem restrições, foi estendida para problemas com restrições. Os resultados obtidos com essa metodologia foram considerados satisfatórios quando comparados com as métricas de comparação. De maneira geral, o algoritmo MOFA

foi capaz de obter, em todas as execuções, boas aproximações para a Curva de Pareto analítica, observada pelo uso de uma função matemática que possui solução analítica conhecida. Para futuros trabalhos pretende-se avaliar a sensibilidade dos parâmetros do algoritmo MOFA e sua aplicação no projeto de sistemas de engenharia.

Tabela 2 – Convergência métrica e diversidade métrica para o estudo de caso F_1 .

	Métrica	Simulações									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta = 0,010$	CM	0,1611	0,1205	0,1623	0,0673	0,0395	0,0807	0,0924	0,0433	0,0567	0,1670
	DM	1,3729	1,3669	1,4519	1,0982	0,7061	1,0574	1,1956	0,7791	1,0347	1,4293
$\delta = 0,015$	CM	0,1451	0,1154	0,1435	0,0445	0,0454	0,0798	0,0788	0,0409	0,0457	0,1799
	DM	1,3095	1,2789	1,4098	1,0244	0,6787	1,0877	1,0126	0,7567	1,0336	1,4098
$\delta = 0,020$	CM	0,1141	0,1055	0,1243	0,0563	0,0309	0,0909	0,0894	0,0435	0,0709	0,1454
	DM	1,9555	1,2329	1,5339	1,0878	0,7121	1,0677	1,3426	0,7666	1,0333	1,3898

6. REFERÊNCIAS

- Deb, K., 2001, “Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms”. First edition. New York, John Wiley and Sons.
- Deb, K., Gupta, H., 2006, “Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization”. Massachusetts Institute of Technology, Evolutionary Computation 14(4), pp. 463-494.
- Jin, Y., Sendhoff, B., 2003, “Trade-Off Between Performance and Robustness: An Evolutionary Multiobjective Approach. Evolutionary Multi-Criterion Optimization”. Lecture Notes in Computer Science. Volume 2632/2003.
- Lobato, F. S., Steffen Jr, V., 2010, “Desenvolvimento de uma Estratégia de Otimização Auto-Adaptativa usando Modelos Caóticos de Busca e o Algoritmo Vagalume”. XIII Encontro de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico (IPRJ), Campus Regional da UERJ, Nova Friburgo/RJ, Brasil.
- Lobato, F. S., Vieira, L. G. M., Barrozo, M. A. S., 2011a, “Estudo do Desempenho de Hidrociclones usando a Metodologia de Superfície de Respostas e Otimização Multiobjetivo”. XIV Encontro de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico (IPRJ), Campus Regional da UERJ, Nova Friburgo/RJ, Brasil.
- Lobato, F. S., Arruda, E. B., Cavalini Jr, A. Ap., Steffen Jr, V., 2011b, Engineering System Design using Firefly Algorithm and Multi-objective Optimization, Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011, Washington, DC, USA, August 28-31.
- Lobato, F. S., Santos, K. G., Malagoni, R. A., 2012, “Resolução de Problemas de Controle Ótimo usando Técnicas de Otimização Bio-Inspiradas na Natureza”. XIX Congresso Brasileiro de Engenharia Química, Búzios-RJ.
- Luz, E. F. P., Becceneri, J. C., Campos Velho, H. F., 2009, “Conceitualização do Algoritmo Vagalume e sua Aplicação na Estimativa de Condição Inicial da Equação de Calor”. IX Workshop do Curso de Computação Aplicada do INPE (WORCAP 2009), São José dos Campos.
- Metropolis, N., Ulam, S., 1949, “The Monte Carlo Method”. Journal of the American Statistical Association. Vol. 44, n° 247, pp. 335-341.
- Moreira, F. R., Lobato, F. S., Steffen, V. Jr., 2013, “Otimização Multiobjetivo Robusta usando o Conceito de Média Efetiva e o Algoritmo de Colônia de Vagalumes”. XVI Encontro de Modelagem Computacional, UESC.
- Paenk, I., Branke, J., Jin, Y., 2006, “Efficient Search for Robust Solutions by Means of Evolutionary Algorithms and Fitness Approximation”. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 10, no 4.
- Taguchi, G., 1984, “Quality Engineering through Design Optimization”. Kraus International Publications. New York.
- Yang, X.S., 2008, “Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms”. Luniver Press.
- Viana, F.A.C., Venter, G., Balabanov, V., 2010, “An Algorithm for Fast Optimal Latin Hypercube Design of Experiments”. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 82, Issue 2, pp. 135-156.