

Resolução de Grandes Sistemas Lineares por meio de Otimização

Milena Almeida Leite Brandão

Sezimária de Fátima Pereira Saramago

Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba - MG - Brasil

Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG - Brasil

milena@pontal.ufu.br, saramago@ufu.br

José Laércio Doricio

Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba - MG - Brasil

jldoricio@pontal.ufu.br

Resumo. A descrição e a solução de sistemas lineares são de grande importância nas áreas da engenharia e da ciências aplicadas e geralmente tais sistemas possuem alta dimensão o que dificulta encontrar sua solução algebricamente. Nestes casos é comum o uso de métodos iterativos para resolver o sistema. No entanto, quando a matriz dos coeficientes é não simétrica ou não definida positiva os métodos iterativos costumam perder sua eficiência. O objetivo deste trabalho é avaliar o método de otimização Evolução Diferencial Melhorada implementada em paralelo como mais uma ferramenta para se encontrar a solução de grandes sistemas lineares. Foram feitos testes em quatro matrizes, os resultados encontrados são resumidos em tabelas e é feita uma breve consideração sobre os resultados obtidos.

Palavras chave: Sistemas Lineares, Evolução Diferencial Melhorada, Otimização.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Leon (2011), mais de 75% dos problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de sistemas lineares em algum estágio. Estes sistemas podem ser simples, com poucas variáveis e equações mas também podem ser complexos, grandes e esparsos.

De forma geral os sistemas lineares podem ser resolvidos pelos métodos diretos e indiretos. Os métodos diretos são aqueles que após um número finito e bem determinado de operações obtém-se a solução exata, a menos de erros de arredondamento, de um sistema linear. Estes métodos necessitam modificar a matriz dos coeficientes original, assim caso esta matriz seja esparsa estes métodos podem destruir sua esparsidade, no todo ou em parte.

Os métodos indiretos ou iterativos, são aqueles que a partir de uma aproximação inicial obtém-se a solução aproximada de um sistema linear por meio de um processo iterativo. Assim, a solução aproximada depende de uma tolerância pré-fixada.

Os métodos iterativos são classificados em estacionários e não-estacionários. Os métodos estacionários são aqueles em que cada aproximante é obtido do anterior sempre pelo mesmo processo. Nos métodos não-estacionários a matriz de iteração não é constante e por isso a cada iteração procuram-se obter a melhor aproximação à solução de acordo com certas restrições e utilizando informações das iterações anteriores.

Os métodos iterativos são classificados em estacionários e não-estacionários. Os métodos estacionários são aqueles em que cada solução aproximante é obtida a partir da solução anterior aplicando sempre pelo mesmo processo, ou seja, os operadores matriciais são constantes para todas as iterações. Nos métodos não-estacionários a matriz de iteração não é constante e por isso a cada iteração procura-se obter a melhor aproximação da solução de acordo com certas restrições e utilizando informações das iterações anteriores. Estes métodos se baseiam na teoria de minimização, assim procura-se o mínimo caminhando em uma direção de busca bem definida.

Existem algumas técnicas utilizadas nos métodos iterativos para acelerar a convergência. Por exemplo, pode-se citar o pré-condicionamento, que consiste em determinar uma matriz não singular, de forma que o novo sistema possua uma taxa de convergência maior.

Um sistema de equações lineares é uma coleção finita de variáveis e equações lineares (todas nas mesmas variáveis), consideradas em conjunto e normalmente apresentadas na forma:

$$Ax^* = b, \quad (1)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dos coeficientes, $b \in \mathbb{R}^n$ é o vetor independente e x^* é o vetor das incógnitas ou vetor solução, a ser determinado. Esta equação pode ser reestruturada como

$$r(x) = b - Ax, \quad (2)$$

na qual o vetor solução x^* foi substituído por um vetor genérico x , assim haverá um vetor resíduo $r(x)$. Evidentemente, quando $x = x^*$ o resíduo será nulo, $r(x) = 0$. Aplicando as regras de linearidade, percebe-se que o resíduo $r(x)$ é linear em x e, portanto infinitamente diferenciável, ou seja, $r(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A metodologia utilizada consiste em definir um funcional quadrático da seguinte maneira (Purcina, 2010):

$$F(x) = \frac{1}{2}x^T A x b - x^T b \quad (3)$$

cujo gradiente é

$$g(x) = \frac{dF(x)}{dx} = Ax - b = -r(x) \quad (4)$$

e cuja matriz Hessiana é

$$H(x) = \frac{d^2F(x)}{dx^2} = A \quad (5)$$

Tendo obtido o gradiente e a Hessiana da função $F(x)$, pode-se utilizar os métodos de otimização para obter a posição x^* e o valor de $F(x^*)$ no ponto de mínimo. Note-se que no ponto de mínimo $g(x) = 0$ e, portanto $r(x) = 0$ e $Ax^* - b = 0$. Portanto a computação do ponto de mínimo do funcional $F(x)$, equação (3), corresponde à solução do sistema linear, equação (1).

A matriz Hessiana (H) que no caso é a própria matriz dos coeficientes (A) deverá ser positiva definida, para atender a segunda condição necessária para a ocorrência de um mínimo forte em dada posição; deverá também ser simétrica, ou seja,

$$H_{ij}(x) = \frac{d^2F(x)}{dx_i dx_j} = \frac{d^2F(x)}{dx_j dx_i} = H_{ji}(x) \quad (6)$$

Desta forma, a maioria dos métodos de solução de sistemas lineares, utilizando metodologia de minimização, trata apenas de sistemas lineares onde a matriz dos coeficientes é simétrica e positiva definida.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método prático para encontrar a solução de sistemas lineares sem se preocupar com as características da matriz de coeficientes. Assim, este método possibilita a sua utilização mesmo quando a matriz dos coeficientes não é simétrica e nem positiva definida. Além disso, não será necessária a utilização de pré-condicionadores para adequar o sistema aos métodos tradicionais. A proposta é utilizar o método da Evolução Diferencial Melhorada implementada em computação paralela para obter a solução de sistemas lineares de ordem elevada.

2. EVOLUÇÃO DIFERENCIAL MELHORADA IMPLEMENTADA EM COMPUTAÇÃO PARALELA

O algoritmo da Evolução Diferencial Melhorada (EDM) proposto é uma combinação dos métodos Evolução com Conjuntos Embaralhados (ECE) e Evolução Diferencial (ED).

A EDM inicia-se como o algoritmo usual da ED por criar uma população de indivíduos amostrados aleatoriamente a partir da região viável usando distribuição de probabilidade uniforme. A população é então classificada em ordem crescente de valores da função objetivo e particionada em diversos conjuntos. Cada conjunto independentemente executa a ED. Na etapa da evolução, os conjuntos são obrigados a se misturar e os pontos são realocados para garantir a troca de informações.

O algoritmo EDM é então implementado em paralelo em C++ seguindo o princípio de que grandes problemas geralmente podem ser divididos em problemas menores. O fluxograma do Método de Otimização Evolução Diferencial Melhorada implementada em paralelo pode ser visto na Figura (1).

3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Afim de testar a eficiência do método de otimização EDM implementado em paralelo para resolver grandes sistemas lineares será utilizados matrizes testes A , tri-diagonais, com dimensão $n \times n$, definidas a seguir:

$$\begin{aligned} A1 = A(i, j) &= \begin{cases} \pi/n & \text{se } i = j + 1 \\ 4/n & \text{se } i = j \\ (\pi - 1)/n & \text{se } j = i + 1 \end{cases} & A2 = A(i, j) &= \begin{cases} 2/n & \text{se } i = j + 1 \\ 4/n & \text{se } i = j \\ 1/n & \text{se } j = i + 1 \end{cases} \\ A3 = A(i, j) &= \begin{cases} (1 + \pi)/n & \text{se } i = j + 1 \\ 4/n & \text{se } i = j \\ (1 + \pi)/n & \text{se } j = i + 1 \end{cases} & A4 = A(i, j) &= \begin{cases} 1/n & \text{se } i = j + 1 \\ 4/n & \text{se } i = j \\ 1/n & \text{se } j = i + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

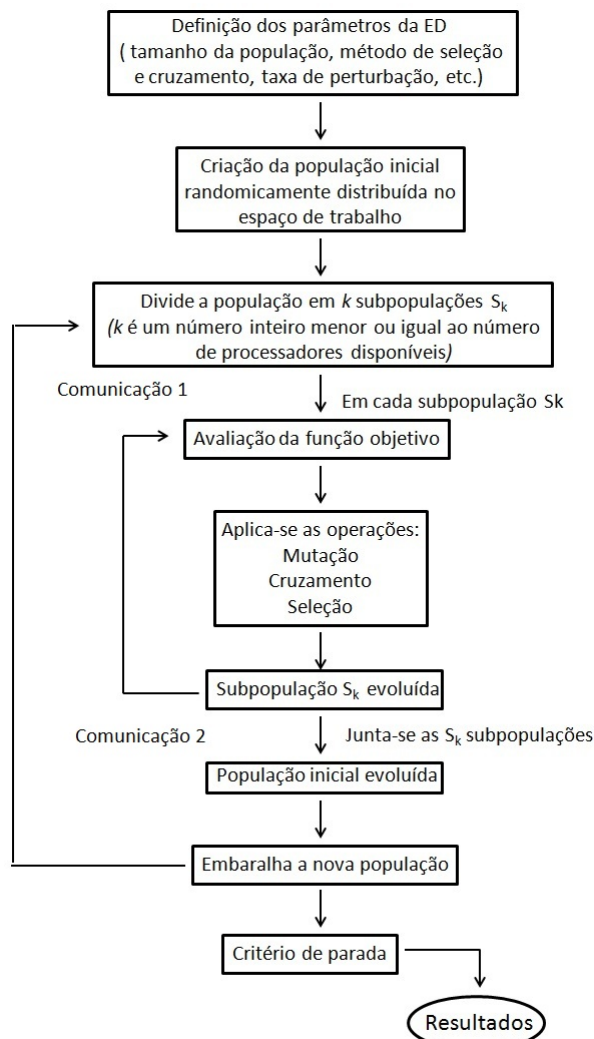


Figura 1: Algoritmo Evolução Diferencial Melhorada Implementada em Paralelo.

onde $i, j = 1, \dots, n$, A_1   uma matriz não simétrica e não positiva definida, A_2   uma matriz positiva definida não simétrica, A_3   uma matriz simétrica e não positiva definida e A_4   uma matriz simétrica positiva definida.

O vetor b será obtido pela seguinte equação:

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (7)$$

sendo $i = 1, \dots, n$.

O objetivo será minimizar o resíduo $r(x) = b - Ax$. O critério de parada adotado será $r(x) \leq 10^{-6}$ ou número máximo de iteração. As tabelas resumem os resultados encontrados para diferentes dimensões n das matrizes. Em todas as tabelas são apresentados o valor do erro no ponto  timo. Nestas simulações foi utilizado um computador Intel  CoreTM i5-430M e os seguintes parâmetros: população de 200 indivíduos divididos em 4 processadores, 150 gerações, taxa de perturbação $F = 0,7$ e probabilidade de cruzamento $C = 0,8$.

4. CONCLUSÃO

O algoritmo da EDM implementado em paralelo tem sido avaliado em vários problemas testes de otimização afim de validá-lo. Pode-se citar, por exemplo, o problema de projeto ótimo de manipuladores 3R, no qual obteve-se excelentes resultados que podem ser consultados em Brandão et al. (2013).

Os exemplos apresentados aqui representam o início do estudo da viabilidade da utilização do algoritmo de otimização EDM implementado em paralelo para resolver grandes sistemas lineares. Analisando os resultados apresentados   possível concluir que o método Evolução Diferencial Melhorada implementado em paralelo é eficaz em obter a solução de grandes sistemas lineares. Acredita-se que com a utilização de um cluster com vários processadores é possível acelerar ainda mais o tempo computacional de processamento e garantir uma rápida obtenção da solução.

Tabela 1: Resultados obtidos para A1 utilizando Evolução Diferencial Melhorada Implementada em Paralelo

n	Erro= $\ r(x)^T r(x)\ $	Tempo (minutos)	N.A.F.O*
10	5,09e-09	0,0094	24000
50	9,45e-09	0,3426	258500
100	9,94e-09	3,926	2836000
500	4,93e-05	18,361	3000000
1000	4,93e-05	18,361	3000000

* Número de avaliações da função objetivo.

Tabela 2: Resultados obtidos para A2 utilizando Evolução Diferencial Melhorada Implementada em Paralelo

n	Erro= $\ r(x)^T r(x)\ $	Tempo (minutos)	N.A.F.O*
10	8,14e-09	0,0063	7600
50	9,60e-09	0,0444	32100
100	9,71e-09	0,1801	88500
500	9,93e-09	5,1386	767350
1000	9,97e-09	22,0126	1518600

* Número de avaliações da função objetivo.

Tabela 3: Resultados obtidos para A3 utilizando Evolução Diferencial Melhorada Implementada em Paralelo

n	Erro= $\ r(x)^T r(x)\ $	Tempo (minutos)	N.A.F.O*
10	7,05e-09	0,0067	12050
50	9,96e-09	1,2802	1757350
100	1,43e-05	4,0286	3000000
500	1,19e-04	19,5338	3000000
1000	2,44e-04	41,835	3000000

* Número de avaliações da função objetivo.

Tabela 4: Resultados obtidos para A4 utilizando Evolução Diferencial Melhorada Implementada em Paralelo

n	Erro= $\ r(x)^T r(x)\ $	Tempo (minutos)	N.A.F.O*
10	6,65e-09	0,0067	12800
50	9,98e-09	0,9484	1325600
100	8,34e-07	3,8616	3000000
500	6,92e-06	18,9848	3000000
1000	1,43e-05	41,5947	3000000

* Número de avaliações da função objetivo.

5. REFERÊNCIAS

- Referências**
 ALMEIDA L. A., Álgebra Linear: com aplicações. 8ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
 PURCINA L. A., Técnicas de Otimização Evolutivas aplicadas à Solução de Grandes Sistemas Lineares, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, 2010.
 BRANDÃO M. A. L., DORICIO J. L. e SARAMAGO S. F. P., Optimum Design of 3R Robot Manipulator by Using Improved Differential Evolution Implemented in Parallel Computation, Proceedings COBEM, International Congress of Mechanical Engineering, Ribeirão Preto, Brazil, 2013.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

O(s) autor(es) é (são) os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.