

APLICAÇÃO DE CURVA B-SPLINE EM RECONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES TRIDIMENSIONAIS ATRAVÉS DE SEÇÕES TRANSVERSAIS

Larissa Rocha Pereira, LAR, larissa.mecatronica@hotmail.com

João Carlos Mendes Carvalho, LAR, jcmendes@mecanica.ufu.br

Resumo. As técnicas de digitalização e reconstrução de formas complexas de objetos tridimensionais têm apresentado um grande desenvolvimento. Dependendo do objeto, milhares ou até milhões de amostragens devem ser adquiridas. O resultado consiste em uma “massa” de dados que requerem algoritmos eficientes e confiáveis que possam gerar modelos computacionais a partir destas amostragens. A partir da nuvem de pontos, deve-se reconstruir a superfície escolhendo o tipo de curva que melhor se adapta ao conjunto de pontos lidos. O método subdivide a nuvem de pontos para a construção de seções do objeto e, a partir dessas seções, construir a superfície tridimensional. As B-spline são muito úteis na modelagem dessas superfícies, uma vez que elas podem ser aplicadas tanto para uma seção aberta, quanto para uma seção fechada. Além disso, as curvas B-spline permitem o ajuste em pontos específicos sem modificar o restante da curva, o que permite aproximar a curva o máximo possível do objeto real.

Palavras chave: Reconstrução de superfície, B-spline, ajuste de curva

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, as técnicas de digitalização e reconstrução de formas complexas de objetos tridimensionais têm apresentado um grande desenvolvimento. Dependendo do objeto, milhares ou até milhões de amostragens devem ser adquiridas. O resultado consiste em uma “massa” de dados que requerem algoritmos eficientes e confiáveis que possam gerar modelos computacionais a partir destas amostragens. Estes dados formam, na realidade, uma nuvem de pontos, nem sempre organizados (CURLESS, 1997).

A reconstrução de superfícies precisas a partir desta nuvem de pontos desorganizados é um problema difícil, não completamente solucionado e muito problemático nos casos em que os dados estão incompletos, com ruídos e/ou esparsos. O objetivo da reconstrução consiste sempre em obter um modelo computacional de um objeto que se assemelhe o mais fielmente possível ao objeto real. (DÍAZ et al, 2007).

A representação de uma curva como uma sucessão de trechos retos pode ser suficiente para várias aplicações. No entanto, curvas e superfícies complexas normalmente demandam uma maneira mais eficiente de representação. A aplicação de B-splines têm sido muito úteis na modelagem dessas superfícies. Curvas B-spline são versões da spline que implementam o controle local da curva, de forma que a alteração de um ponto de controle modifica a curva somente na região dos pontos vizinhos mais próximos em função da ordem de continuidade. A B-Spline é um ajustador de aproximação pois a curva gerada não passa pelos pontos de controle. No entanto, os pontos de controle podem ser calculados para que a interpolação ou aproximação seja realizada nos pontos desejados.

Utilizando B-splines é possível obter uma superfície aproximada ou interpolada utilizando os pontos oriundos da digitalização de uma imagem. As superfícies aproximadas são construídas, geralmente, através de polígonos ou utilizando funções como as B-splines. E as superfícies interpoladas são construídas através da utilização das splines e/ou combinando métodos especiais de interpolação com triangulações (JUNIOR, 2007).

Existem vários métodos para a reconstrução da superfície, dentre eles tem-se a reconstrução através de fatias (seções transversais) do objeto, onde cada seção é definida por curvas B-splines. A partir dos pontos obtidos pela digitalização do objeto, pode-se calcular os pontos de controle e os demais parâmetros para definir a curva da seção transversal. Com base nas seções transversais, realiza-se a ligação entre os pontos que estão em diferentes planos produzindo uma malha bidirecional que define o objeto. A quantidade de planos influencia de forma determinante a exatidão e a definição dos detalhes da superfície. Portanto, o aumento do número de seções transversais acarreta a diminuição da distância entre os planos e o aumento da qualidade de reprodução dos detalhes da superfície.

2. B-SPLINE

B-splines são curvas polinomiais por partes que implementam o controle local da curva, ou seja, quando um ponto é modificado somente os pontos vizinhos a ele sofrerão alteração, em função da ordem de continuidade da curva. Para obter uma curva B-spline, precisa-se de um vetor de nós, das funções de base e um conjunto de pontos de controles.

De acordo com PIEGL e TILLER (1997), uma função de base é denotada por $N_{i,p}(u)$, que significa que é a i -ésima função de base B-spline de grau p (ordem $p+1$). Para defini-la é necessário um vetor de números reais não decrescente definido por $U = \{u_0, \dots, u_m\}$, chamado de vetor nó, onde os u_i são denominados nós (knots). $N_{i,p}(u)$ é definida como:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Um vão de nó não nulo define um segmento polinomial e os pontos de controle definem o “polígono de controle” onde a curva está contida. Uma curva B-spline de grau p é definida por:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad (2)$$

Onde P_i são os pontos de controle e $N_{i,p}(u)$ são as funções de base de grau p definidas no vetor de nós.

2.1. Aproximação por mínimos quadrados

Quando se define uma B-spline ela não passa pelos pontos de controle. Porém, se for necessário que a curva passe por pontos ou próximo de pontos pré-determinados (Q_k), é preciso calcular um conjunto de pontos de controle e um novo vetor nó a partir dos pontos dados, para poder traçar a curva de grau p definida pela Eq. (2), onde Q_k são aproximados pelo método dos mínimos quadrados, isto é:

$$\sum_{k=1}^{m-1} |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2 \quad (3)$$

Os pontos de controle são calculados através da Eq. (4):

$$(N^T W N) P = R \quad (4)$$

onde N , W e R são:

$$N = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(\bar{u}_m) & \cdots & N_{n,p}(\bar{u}_m) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$R = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0) W Q_0 + \cdots + N_{n,p}(\bar{u}_m) W Q_m \\ \vdots \\ N_{n,p}(\bar{u}_0) W Q_0 + \cdots + N_{n,p}(\bar{u}_m) W Q_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

Para resolver as Eqs. (5) e (7), um vetor nó $U = \{u_0, \dots, u_r\}$ e parâmetros $\{\bar{u}_k\}$ são requeridos. Os parâmetros $\{\bar{u}_k\}$ podem ser calculados usando o método do comprimento de corda. E o vetor nó pode ser adquirido pelo método a seguir:

Se d é um número real positivo, denota por $i = \text{int}(d)$ o maior inteiro tal que $i \leq d$. Seja:

$$d = \frac{m+1}{n-p+1} \quad (8)$$

Então se define os nós internos por:

$$i = \text{int}(jd) \quad \alpha = jd - i$$

$$u_{p+j} = (1 - \alpha)\bar{u}_{i-1} + \alpha\bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n - p \quad (9)$$

3. APLICAÇÃO DE B-SPLINE EM SEÇÕES TRANSVERSAIS

A partir dos pontos lidos de uma seção transversal, e utilizando o método dos mínimos quadrado, a curva B-spline é construída de forma que se aproxime ao máximo da seção real do objeto. A B-spline pode reproduzir uma seção aberta ou fechada de um objeto qualquer. A Figura (1) ilustra uma aproximação de uma B-spline aberta.

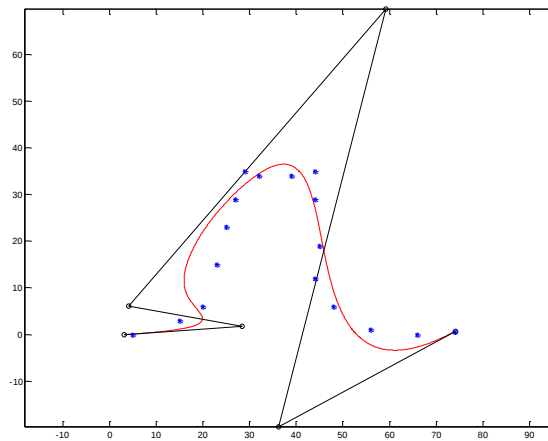
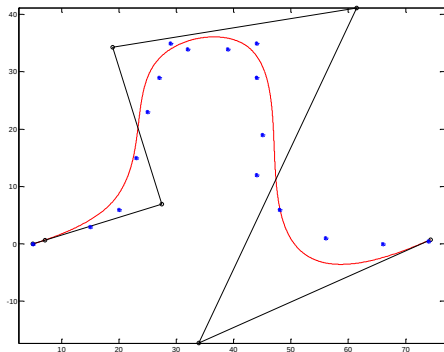
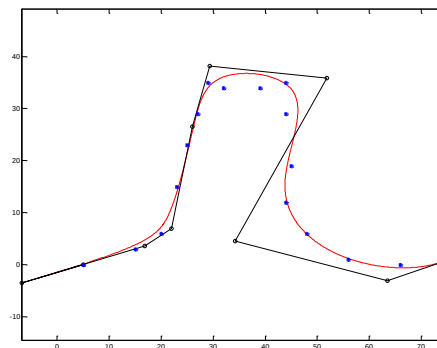


Figura 1: Aproximação por B-spline aberta

Usando apenas o método em si, a curva B-spline pode não representar a seção de forma desejável, assim é necessário que se façam alguns ajustes baseados em características específicas da curva, tais como raio ou diâmetro da curva, derivada em pontos específicos, pesos e erros entre a curva obtida e o perfil real do objeto. Utilizando esses ajustes, tais como a direção da derivada do primeiro ponto e pesos, relacionados aos raios da curva, é possível desenvolver a B-spline novamente afim de verificar o comportamento da mesma, diminuindo o erro entre a curva gerada e os pontos lidos. Uma outra opção é aumentar a quantidade de pontos de controle definidos. A Figura (2a) ilustra essa curva B-spline com os ajustes e a Fig.(2b) utiliza os mesmos ajustes mas com um maior número de pontos de controle.



(a)



(b)

Figura 2: Curvas B-spline abertas: (a) ajustes na curva; (b) número maior de pontos de controle.

A curva B-spline pode também reproduzir uma seção fechada, para isso são necessários mudanças, através de repetições, nos vetores nós e nos pontos de controle. A Fig. (3a) ilustra a B-spline sem os ajustes e a Figura (3b) a B-spline com os ajustes feitos de forma semelhante à B-spline aberta.

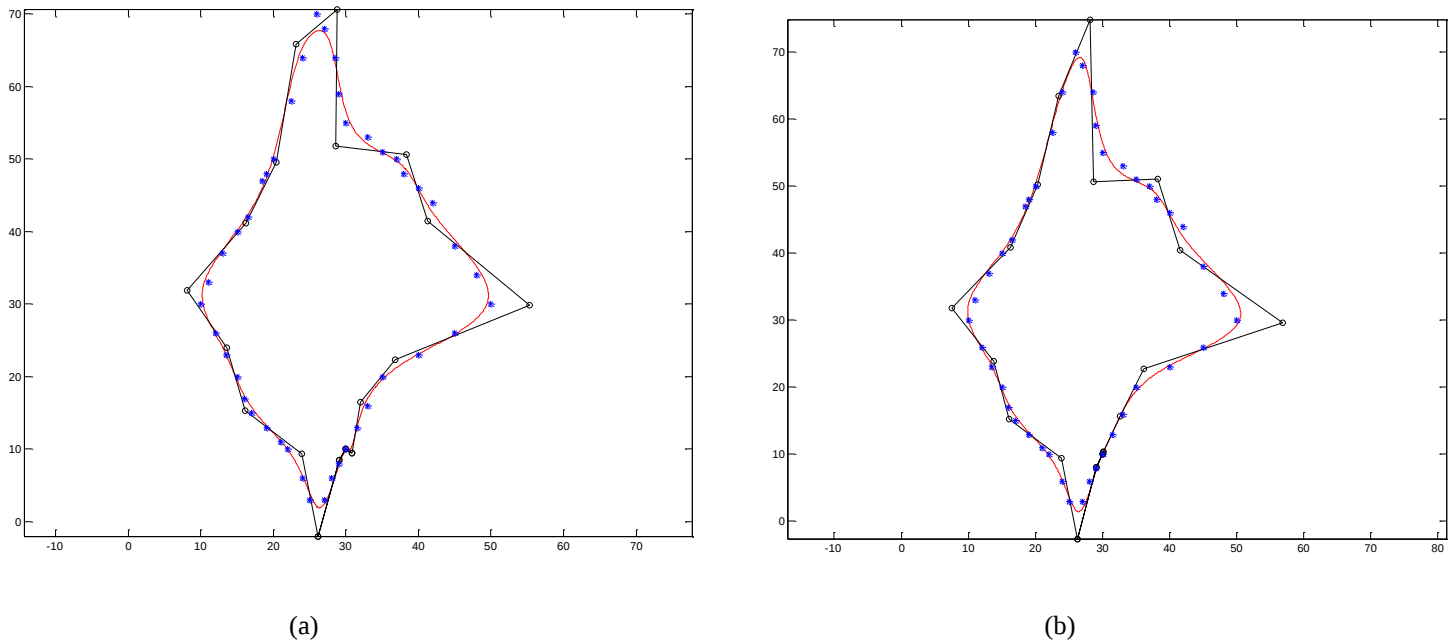


Figura 3: (a) Aproximação por B-spline fechada; (b) Aproximação por B-spline fechada com ajustes.

A B-spline por possuir controle local da curva, permite que ao alterar qualquer ponto, a curva antes construída não é alterada, mas apenas no local próximo a esse ponto. Assim é possível realizar todos os ajustes necessários, em um determinado local da curva, para que essa curva se aproxime ao máximo do objeto real.

Portanto, a utilização da curva B-spline na reconstrução de seções transversais de uma superfície é eficiente e consegue reproduzir de forma fiel a superfície. Devido a isso e a possibilidade de controle da curva, B-spline é um método indicado e confiável para a reconstrução tridimensional de objetos, visto que é uma área muito pesquisada e com amplas aplicações em áreas como arquitetura, medicina, odontologia, robótica, dentre outros.

4. REFERÊNCIAS

- Curless, B. L, 1997, “New Methods for Surface Reconstruction from Range Images”, 189f. PhD Thesis - University of Stanford, Califórnia.
Díaz, J. E. R.,2011, “Kinematic and Dynamic Modeling of a structure RRP + PR”, PhD Thesis, Federal University of Uberlandia .
Junior, J. N. F.; Carvalho, J.C.M, 2007, “Modelagem Computacional para Reconstrução Gráfica de Objetos”.
Piegl, L.; Tiller, W.,1997, “The NURBS Book”. 2. ed. N.Y: Springer.

5. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.