

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DE UM CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS

Douglas Hector Fontes, LEST, douglashfontes@hotmail.com
Elie Luis Martínez Padilla, Mflab, epadilla@mecanica.ufu.br
Enio Pedone Bandarra Filho, LEST, bandarra@mecanica.ufu.br

Resumo. Este trabalho apresenta a verificação e a validação de um código computacional para simulação de escoamentos bidimensionais. Para o processo de verificação utilizou-se a solução manufaturada dos vórtices de Taylor e Green, enquanto que para a validação utilizou-se o caso de escoamento, em cavidade, induzido por convecção natural. Os resultados das simulações utilizando o código computacional mostraram boa acurácia e ordem 2 no processo de verificação; na validação, os resultados mostraram boa concordância com resultados de outros autores. Portanto o código computacional pode ser adequadamente utilizado para simulação de escoamentos bidimensionais.

Palavras chave: código computacional, verificação, validação, escoamento, convecção natural.

1. INTRODUÇÃO

No contexto da abordagem numérica um processo imprescindível para a utilização de um código computacional, com o objetivo de obter soluções numéricas de escoamentos, é a verificação e a validação do mesmo. O processo de verificação consiste em um estudo que visa garantir que as equações escolhidas para representar um problema físico estão sendo resolvidas corretamente, garantindo a ausência de erros na implementação e no algoritmo (Moreira, 2011), sendo um artifício puramente matemático, não assegura que a metodologia esteja correta para a obtenção da solução do problema físico em questão. O processo de validação consiste na comparação dos resultados obtidos, utilizando-se o código computacional, com soluções de referências, sejam elas, analíticas, numéricas ou experimentais. Neste caso, objetiva-se avaliar, as equações usadas no modelo para representar o problema físico (Moreira, 2011). Este trabalho apresenta a verificação e validação de um código computacional para simulação de escoamentos bidimensionais com transferência de calor.

2. MODELAGEM FÍSICA E MATEMÁTICA

As modelagens, física e matemática, aqui apresentadas são para um caso genérico. Assim, não são definidas condições de contorno específicas, pois estas dependem do problema a ser analisado.

2.1. Modelagem física genérica

Seja um fluido newtoniano, incompressível, onde a massa específica é assumida constante, exceto no termo peso-empuxo (aproximação de Boussinesq), em um domínio bidimensional com transferência de calor com condições de contorno de Dirichlet, Newman, ou mista. Onde a transformação da energia cinética em energia interna (termo de dissipação viscosa) é desconsiderada.

2.2. Modelagem matemática genérica

A modelagem matemática para o modelo físico genérico é representada pelas equações de balanço de massa, Eq. (1), balanço de quantidade de movimento linear (com o termo peso e empuxo da aproximação de Boussinesq), Eq.(2) e balanço de energia, Eq. (3), escritas na forma indicial para duas dimensões ($i = 1, 2$), levando-se em consideração as hipóteses realizadas na modelagem física genérica, onde as condições de contorno apropriadas para o problema específico devem ser definidas. Para maiores detalhes ver White (2007) e Çengel (2009).

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = g_i \beta (T - T_o) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \right) \quad (3)$$

3. MODELAGEM NUMÉRICA

A modelagem numérica é composta da discretização, pelo método dos volumes finitos (Ferziger e Peric, 2002), das equações representativas do modelo físico genérico, advindas da modelagem matemática; esquemas de interpolação das variáveis; método de integração temporal; malha numérica; acoplamento pressão e velocidade e do solucionador das equações algébricas.

O método dos volumes finitos é um método de discretização, ou seja, é um método que representa um domínio contínuo, com informações contínuas, em um domínio discreto, com informações discretas. Tal método é de fácil compreensão e se presta a uma interpretação física direta (Patankar, 1980). As variáveis são consideradas constantes dentro de um volume de controle e os balanços das equações representativas são realizadas dentro deste volume finito. As interpolações das variáveis nas fronteiras dos volumes finitos foram obtidas através de um esquema de segunda ordem de acurácia, conhecido como esquema das diferenças centrais (do inglês *Central Difference Scheme*, CDS). A integração temporal, das equações de balanço, foi implementada de forma explícita (Maliska, 2004), utilizando o método de Runge-Kutta de 2ª ordem. A malha numérica é do tipo malha deslocada, onde as variáveis de velocidade se localizam nas fronteiras dos volumes finitos, enquanto que as outras variáveis (temperatura, pressão, propriedades físicas) se localizam no centroide dos volumes finitos. O acoplamento pressão velocidade foi realizado pelo método dos passos fracionados e o solucionador utilizado para o sistema de equações, advindos da equação de Poisson do acoplamento pressão e velocidade, foi o de Gauss-Seidel com sobre relaxação (do inglês, *Successive Over Relaxation*, SOR). O detalhamento de cada elemento da modelagem numérica aqui mencionada pode ser obtido em Ferziger e Peric (2002).

4. RESULTADOS

Os resultados das simulações, efetuadas utilizando o código computacional para escoamentos bidimensionais, são para dois casos, um para a verificação do código e outro para a validação do mesmo.

4.1. Verificação

A verificação do código foi realizada utilizando-se a solução manufaturada dos vórtices de Taylor e Green (1937), que apresenta a seguinte solução analítica para escoamento bidimensional, Eq. (4) e Eq. (5), em um domínio bidimensional com $x \in [0, 2\pi]$ e $y \in [0, 2\pi]$.

$$u(x, y) = \sin(x)\cos(y)F(t) \quad (4)$$

$$v(x, y) = -\cos(x)\sin(y)F(t) \quad (5)$$

Onde: $F(t) = e^{-2\alpha t}$

Utilizou-se o código computacional com as condições de contorno dos vórtices de Taylor e Green (1937) e o termo fonte (que neste tipo de solução manufaturada é nula), para obter a solução numérica deste tipo de solução manufaturada, que foi comparado com a solução analítica, por meio da norma L_2 , dada pela Eq. (6), que mede o erro entre a variável calculada numericamente, φ^n , e a variável calculada analiticamente, φ^a , para o caso bidimensional.

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} [\varphi^n(x_i, y_j, t) - \varphi^a(x_i, y_j, t)]^2} \quad (6)$$

Nas Fig. (1a) e Fig. (1b) são apresentados os campos de velocidade na direção x e y respectivamente obtidas numericamente. Já na Fig. (2) é apresentada a norma L_2 , em função do refinamento da malha, onde é possível verificar a ordem de acurácia do código computacional, ordem 2.

Na Fig. (2) pode-se observar que o desvio da solução numérica e da solução analítica, calculado pela norma L_2 , ficou em torno 10^{-4} para a malha mais refinada utilizada. Assim pode-se dizer que a implementação do código computacional está correta, ou seja, o código está resolvendo apropriadamente as equações, discretizadas, representativas do sistema físico.

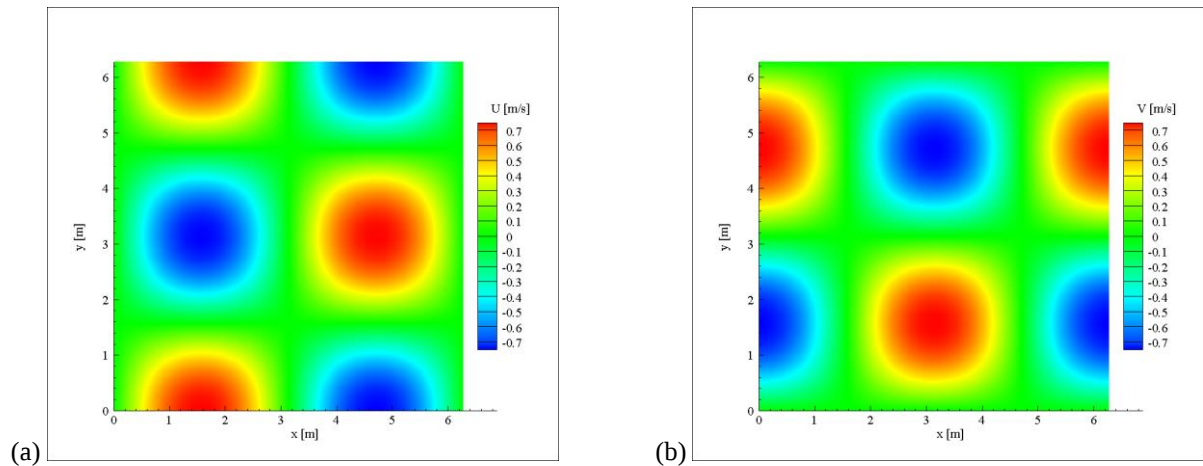


Figura 1 – Campos de velocidade dos vórtices de Taylor-Green; a) campo de velocidade u, b) campo de velocidade v.

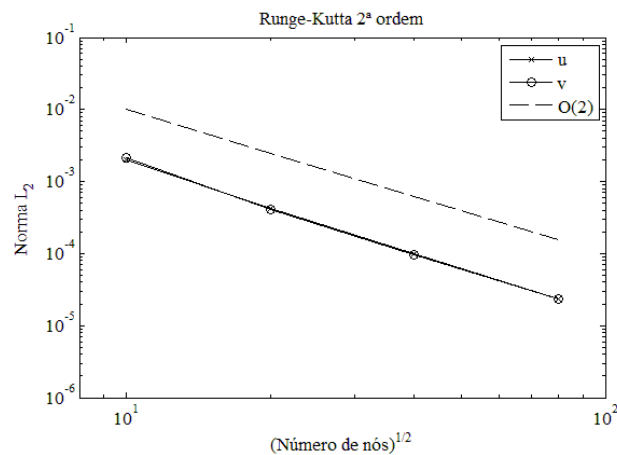


Figura 2 – Ordem do código computacional comparado com um decaimento de ordem 2

4.2. Validação

Para validação do código computacional, simulou-se o caso de escoamento induzido por convecção natural em uma cavidade quadrada, com temperatura alta e temperatura baixa em cada uma das paredes laterais da cavidade e as outras superfícies adiabáticas, conforme Fig. (3a). A massa específica é tomada como constante, exceto para o termo peso e empuxo, onde é utilizada a hipótese de Boussinesq. Foram simulados casos para número de Rayleigh variando de 10^3 a 10^5 .

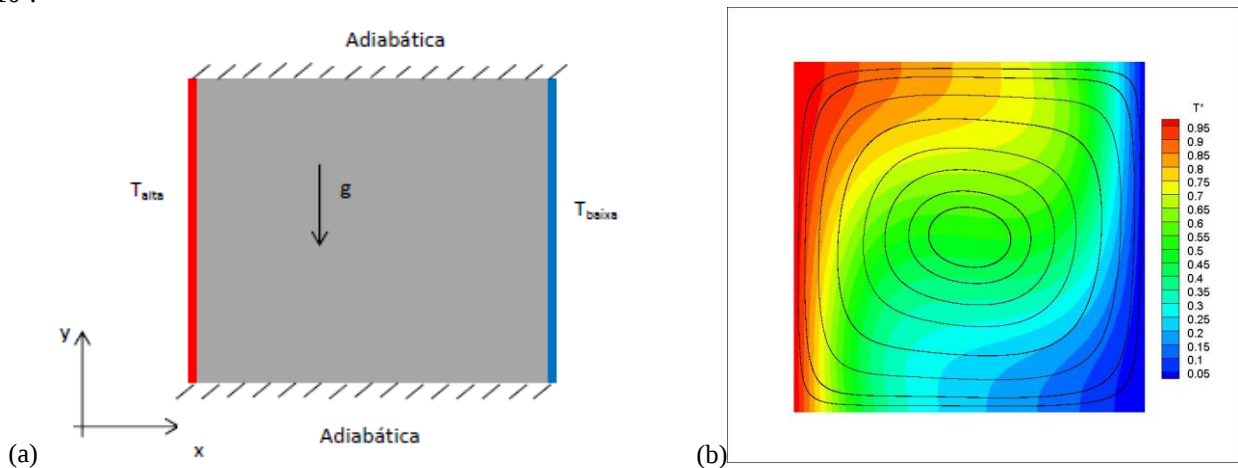


Figura 3 – a) Esquema representativo de cavidade, b) Campo de temperatura com linhas de corrente para $Ra=10^4$.

Na Fig. (3b) é apresentado o campo de temperatura adimensional no interior da cavidade, com linhas de corrente, obtidos numericamente com o código computacional, para um número de Rayleigh 10^4 .

Na Tab. (1) são apresentadas comparações dos resultados numéricos, para o mesmo problema, do número de Nusselt médio da parede quente e valores de velocidade máxima nos perfis, em pontos médios de x e y, para valores de Rayleigh 10^3 , 10^4 e 10^5 , onde é possível observar uma boa concordância dos resultados de diversos autores com os obtidos através do código computacional desenvolvido.

Tabela 1 – Comparação dos resultados numéricos obtidos e resultados numéricos de outros autores.

Autores	Ra= 10^3			Ra= 10^4			Ra= 10^5		
	Nu médio	V máx. (em x/H)	U máx. (em y/H)	Nu médio	V máx. (em x/H)	U máx. (em y/H)	Nu médio	V máx. (em x/H)	U máx. (em y/H)
Presente Trabalho	1,118	0,140 (0,1774)	0,138 (0,8104)	2,248	0,234 (0,1139)	0,193 (0,8227)	4,545	0,258 (0,0633)	0,131 (0,8607)
De Vahl Davis (1983)	1,118	0,138 (0,178)	0,136 (0,813)	2,243	0,234 (0,119)	0,192 (0,823)	4,520	0,261 (0,066)	0,153 (0,855)
Barakos e Mitsoulis (1994)	1,114	0,155 (0,181)	0,153 (0,806)	2,245	0,234 (0,119)	0,193 (0,818)	4,510	0,258 (0,066)	0,132 (0,859)
Fusegi et al. (1991)	1,105	0,131 (0,200)	0,132 (0,833)	2,230	0,225 (0,117)	0,201 (0,817)	4,646	0,247 (0,065)	0,147 (0,855)
Khanafer et al. (2003)	1,118	0,139 (0,173)	0,137 (0,812)	2,245	0,233 (0,123)	0,192 (0,827)	4,522	0,258 (0,065)	0,131 (0,854)

5. CONCLUSÕES

O código computacional foi verificado, utilizando a solução manufaturada dos vórtices de Taylor e Green (1937) e validado para o caso de escoamento em cavidade induzido por convecção natural, com resultados numéricos de vários autores. Assim, diversos escoamentos bidimensionais, contemplados no modelo físico genérico, podem ser resolvidos utilizando-se o código computacional desenvolvido.

6. REFERÊNCIAS

- Barakos, G., Mitsoulis, E. “Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions”. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, vol. 18, 1994, 695–719.
- Çengel, Y. A., “Transferência de calor e massa: uma abordagem prática”, 2009, McGraw-Hill, São Paulo, Brasil.
- Davis, G. de V. “Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution”. International Journal for Numerical Methods, vol. 3, 1983, 227-248.
- Ferziger, J. H., Peric, M., “Computational Methods for Fluid Dynamics”, 2002, 3ª edição, Springer.
- Fusegi, T., Hyun, J.M., Kuwahara, K., Farouk, B., “A numerical study of three- dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure”. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 34, 1991, 1543–1557.
- Khanafer, K., Vafai, K., Lightstone, M., “Buoyancy-driven heat transfer enhance- ment in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids”. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 46, 2003, 3639–3653.
- Maliska, C. R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, 2004, 2ª edição revista e ampliada, editora LTC, Rio de Janeiro, Brasil.
- Moreira, L. Q., “Modelagem Matemática de Jatos em Desenvolvimento Espacial Usando a Metodologia Pseudo Espectral de Fourier”, Tese, 2011, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.
- Patankar, S. V., “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, 1980, McGraw-Hill Book Company.
- Taylor, G.; Green, A. Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones. Proceedings of the Royal Society of London. Series A Mathematical and Physical Sciences, 1937.
- White, F. M., “Mecânica dos Fluidos”, 2007, 6ª edição, McGraw-Hill, Porto Alegre, Brasil.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.