

APLICAÇÃO DA METODOLOGIA IMERSPEC EM PROBLEMAS COM TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA INTERNA

Denise Kinoshita, MFlab - UFU, denikino@doutorado.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto, MFlab - UFU, aristeus@mecanica.ufu.br

Renato Aparecido Pimentel da Silva, MFlab – UFU, silva.renato@gmail.com

Felipe Pamplona Mariano, UFG, fpmariano@eeec.ufg

Resumo. Uma nova metodologia de modelagem matemática combinando os métodos de fronteira imersa e pseudoespectral de Fourier - IMERSPEC - foi desenvolvida para problemas de transferência de energia interna, usando as equações de Navier-Stokes, a equação de balanço de massa e a equação de balanço de energia para escoamentos incompressíveis. O algoritmo numérico consiste do método de colocação pseudoespectral de Fourier, onde as condições de contorno térmicas de primeira espécie (Dirichlet) e segunda espécie (Neumann) podem ser modeladas utilizando o método de fronteira imersa. No presente trabalho, será apresentada a validação da metodologia proposta com aplicação em problemas com transferência de energia interna. Os resultados mostram uma boa concordância com a literatura.

Palavras chave: Equação da Energia 1, Condições de Contorno 2, Método da Fronteira Imersa 3, Método pseudoespectral de Fourier 4

1. INTRODUÇÃO

A busca por métodos acurados para resolver as equações de Navier-Stokes, continuidade e a equação da energia é de grande interesse para a mecânica de fluidos computacional, para a solução de fenômenos físicos onde apenas metodologias de alta acurácia possibilitam obter uma solução representativa.

Existem várias formas de resolver numericamente estas equações. Dentre elas podem ser citados os métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos e os métodos espectrais. Em termos de métodos de alta ordem, a família dos métodos espectrais tem se destacado (CANUTO *et al.*, 2007). Os métodos espectrais são caracterizados pela convergência exponencial para a solução exata com o aumento do refinamento espacial. Dentre a família dos métodos espectrais, o clássico método de colocação pseudoespectral de Fourier (MPEF) é um dos mais difundidos (CANUTO *et al.*, 2007).

A maior limitação do MPEF está nas condições de contorno, uma vez que para preservar a taxa de convergência e a acurácia, aliadas ao baixo custo computacional, é necessário o uso de condições de contorno periódicas. Para resolver problemas não periódicos, Mariano *et al.* (2010) propuseram uma metodologia híbrida, denominada IMERSPEC.

Com a metodologia IMERSPEC tornou-se possível resolver problemas de escoamentos não periódicos sobre geometrias complexas utilizando-se o método pseudoespectral de Fourier. Como fruto do presente trabalho, será mostrada uma nova metodologia para escoamentos incompressíveis com transferência de energia interna e um novo modelo para os dois tipos de condições de contorno (Dirichlet e Neumann), a serem utilizadas para solução da equação da energia.

2. METODOLOGIA

O modelo matemático para escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos com transferência de energia interna é estabelecido com a equação de balanço de massa, Eq. (1), equações de Navier-Stokes, Eq. (2) e a equação de balanço de energia, Eq. (3).

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{RHS} + g\beta(T - T_0) + \frac{1}{\rho} f_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = + \underbrace{\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} - u_i \frac{\partial T}{\partial x_j}}_{RHS_T} + \frac{1}{\rho C_p} f_T \quad (3)$$

Para aplicação em problemas físicos os termos, $\bar{f}(\bar{x}, t)$ e $f_T(\bar{x}, t)$ são os termos fonte que modelam as condições de contorno para as equações de Navier-Stokes e da energia, respectivamente.

A seguir serão mostrados os modelos para o termo fonte da equação da energia, $f_T(\bar{x}, t)$, para as condições de contorno de primeira (Dirichlet) e segunda (Neumann) espécie.

2.1. Condição de contorno para a equação da energia

2.1.1. Condição de contorno de Dirichlet (primeira espécie)

Para este tipo de condição de contorno a temperatura, $T_f(\bar{X}, t)$, é dada sobre a fronteira imersa, Eq. (4), a qual fornece a condição de referência para a avaliação do termo forçante, Eq. (5), apresentado com maiores detalhes em Kinoshita (2013).

$$T_{ref}(\bar{X}, t) \equiv T_f(\bar{X}, t). \quad (4)$$

$$f_T(\bar{x}) = \int_{\Gamma} F_T(\bar{X}) \delta(\bar{x} - \bar{X}) d\bar{X} = \int_{\Gamma} \rho C_p \frac{T^{n+1}(\bar{X}) - T^{*n+1}(\bar{X})}{\Delta t} \delta(\bar{x} - \bar{X}) d\bar{X}. \quad (5)$$

Desta maneira, atualiza-se a temperatura, como mostra a Eq. (6):

$$T^{n+1}(\bar{x}) = T^{*n+1}(\bar{x}) + \frac{\Delta t}{\rho C_p} f_T^{n+1}(\bar{x}). \quad (6)$$

2.1.2. Condição de contorno de Neumann (segunda espécie)

Para este tipo de condição de contorno, o fluxo de energia interno é dado, ou equivalentemente, o gradiente de temperatura é conhecido sobre a fronteira Γ ,

$$\bar{q}''(\bar{X}, t) = -\kappa_f \bar{\nabla} T(\bar{X}, t). \quad (7)$$

De modo análogo, fazendo algumas manipulações matemáticas, obtém-se o termo forçante para a condição de contorno de segunda espécie, mais detalhes podem ser vistos em Kinoshita (2013).

$$\nabla^2 f_T^{n+1}(\bar{x}) = -\bar{\nabla} \cdot \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\rho C_p}{\Delta t} \left[\frac{\bar{q}''^{n+1}(\bar{X})}{\kappa_f} + \bar{\nabla} T^{*n+1}(\bar{X}) \right] \delta(\bar{x} - \bar{X}) d\bar{X}}_{\bar{I}^{n+1}(\bar{x})} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{I}^{n+1}(\bar{x}). \quad (8)$$

Para resolver a Eq. (8), utiliza-se o método pseudoespectral de Fourier. Isto é possível mesmo para problemas não periódicos, como mostrado no trabalho de Mariano *et al.* (2010).

3. RESULTADOS

Como objetivo do presente trabalho, serão apresentados alguns resultados para aplicação da convecção natural entre cilindros concêntricos horizontais, tendo em vista resolver problemas com geometrias não cartesianas, utilizando as duas condições de contorno propostas. Outras aplicações podem ser vistas em Kinoshita (2013).

A esquematização do domínio computacional utilizado pode ser vista na Fig. (1). Os dois cilindros concêntricos são colocados na região central do domínio periódico.

A fim de testar as condições de contorno propostas, foram feitos dois testes, o qual chamaremos de Caso 1 e Caso 2:

- **Caso 1:** Condição de contorno de Dirichlet para os dois cilindros concêntricos horizontais.
- **Caso 2:** Condição de contorno de Neumann para o cilindro interno e Dirichlet para o cilindro externo.

Para o Caso 1, é preciso impor as temperaturas em ambos os cilindros: $T_i = T_r + \Delta T$ e $T_o = T_r - \Delta T$, para o cilindro interno e externo, respectivamente, onde $T_r = 300$ [K], sendo que a diferença de temperatura, ΔT , foi obtida a partir do número de Rayleigh (Ra), para este caso dado por: $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}$.

Para o Caso 2, é necessário impor o fluxo de calor no cilindro interno, para isto, obteve-se o fluxo pelo número de Rayleigh, $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^4 q_w''}{\nu\alpha k}$ e para o cilindro externo a temperatura imposta foi mantido igual a T_r .

O comportamento do escoamento deste problema é caracterizado pelo número de Prandtl, $Pr = 0,7$ e Rayleigh, para comprimento $L = R_o - R_i$. Neste trabalho, a relação de raio utilizada foi $\eta \equiv \frac{R_o}{R_i} = 2,0$, onde R_i é definido como sendo o raio do cilindro interno e R_o o raio do cilindro externo.

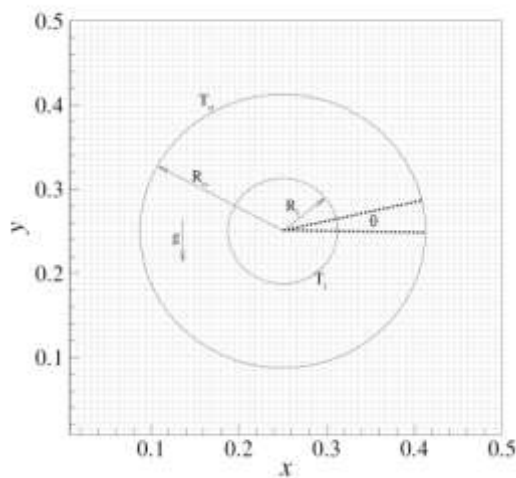


Figura 1. Esquema do domínio computacional para a convecção natural entre cilindros concêntricos.

Para o Caso 1, pode ser observado na Fig. (2a), a formação de uma pluma térmica na parte superior. Resultados parecidos foram obtidos por Padilla (2004), o qual citou que ocorre uma similaridade com a dinâmica do escoamento e o processo de transferência de energia interna quando se aumenta o espaçamento entre as superfícies dos cilindros, ou seja, quando a relação de raios é aumentada de $\eta = 2,0$ para $\eta = 2,6$.

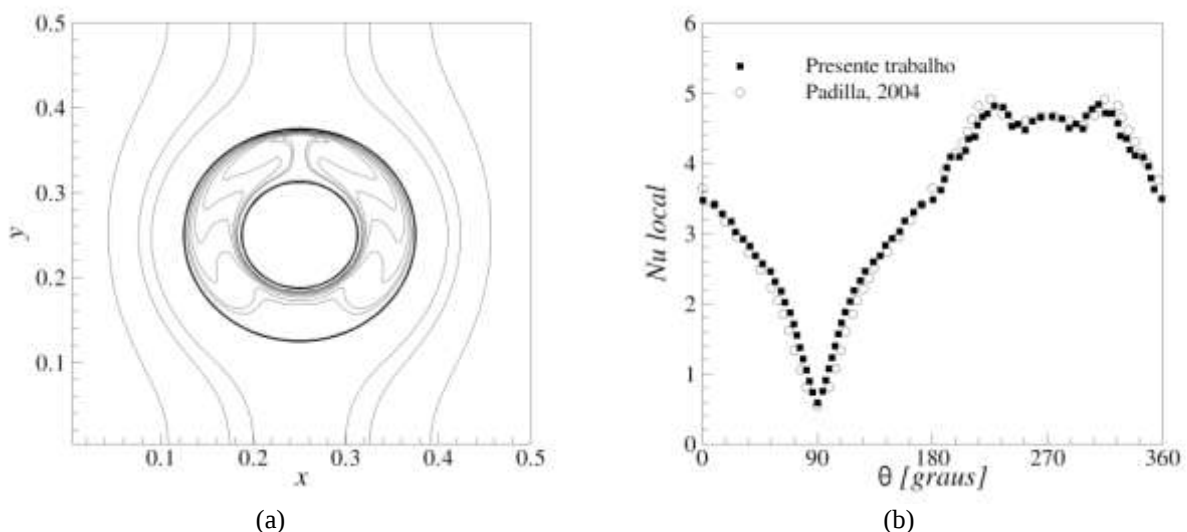


Figura 2. Caso 1 para $Ra=10^5$ e $\eta = 2,0$, (a) linhas isotérmicas e (b) distribuição do número de Nusselt local no cilindro interno.

No Caso 2, o fluxo de energia interna é imposto, desta maneira a temperatura no cilindro interno será menor do que a obtida no Caso 1, com temperatura imposta. Vale observar na Fig. (4b), que próximo ao cilindro interno o fluxo de energia está atuando, já que há uma variação da temperatura em torno deste.

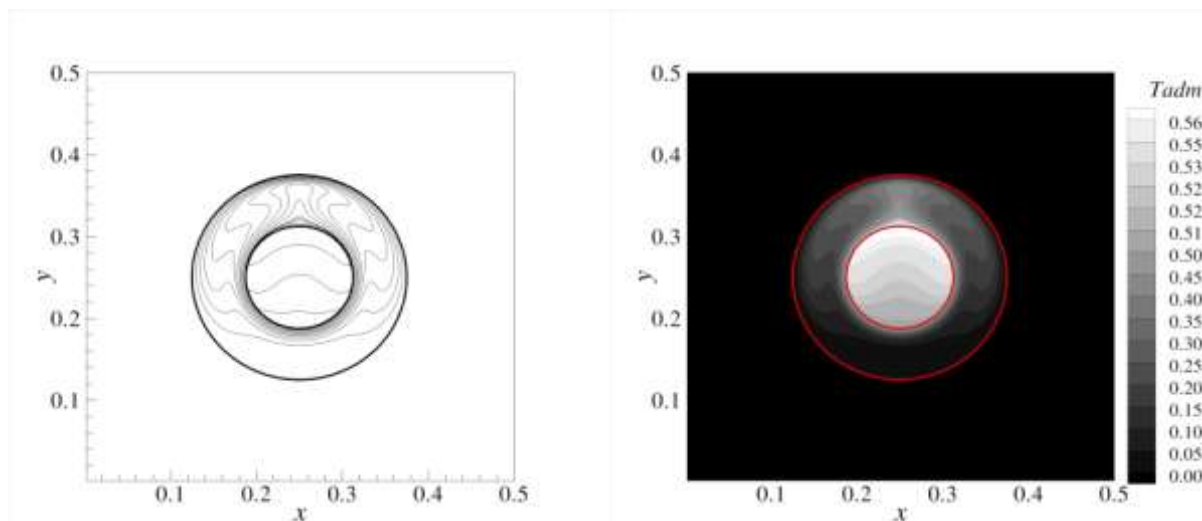


Figura 4. Caso 2 para $Ra=5 \times 10^4$ e $\eta = 2,0$, (a) linhas isotérmicas e (b) distribuição de temperatura em todo o domínio.

4. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma nova metodologia para os dois tipos de condições de contorno, utilizando a metodologia IMERSPEC. A modelagem matemática para os dois tipos de condições de contorno foram apresentadas. O principal objetivo deste trabalho foi comparar os resultados da metodologia proposta aplicada à solução de problemas físicos. O problema utilizado foi de convecção natural em cilindros concêntricos horizontais, a fim de validar a metodologia com pontos não coincidentes, os resultados mostram ótima concordância com a literatura para o caso com a condição de contorno de primeira espécie nos dois cilindros, entretanto para o caso com a condição de contorno de segunda espécie no cilindro interno é necessário um estudo mais aprofundado.

5. REFERÊNCIAS

- Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. e Zang, T.A., 2007, “Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics”, Springer Verlag.
- Kinoshita, D., 2013, “Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada fronteira-imersa pseudospectral de Fourier para escoamentos com transferência de energia interna”, Qualificação (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, pp.106.
- Mariano, F.P., Moreira, L.Q., Silveira-Neto, A., Silva, C.B., Pereira, J.C.F., 2010, “A new incompressible navier-stokes solver combining Fourier pseudo-spectral and immersed boundary method”, Computer Modeling in Engineering Science, Vol. 59, pp. 181–216.
- Padilla, E.L.M., 2004, “Simulação de grandes escalas da transição à turbulência em sistemas rotativos com transferência de calor”, Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, pp. 179.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.