

COMPORTAMENTO DINÂMICO DO OSCILADOR DE DUFFING

Guênia Mara Vieira Ladeira, guenia@mecanica.ufu.br

O estudo de oscilações não-lineares é essencial, devido as equações diferenciais que descrevem os sistemas físicos reais serem lineares apenas em uma primeira aproximação. Observa-se que um sistema linearizado perde informações essenciais a sua análise (Hagedorn, 1984). Um sistema não-linear por suas características pode apresentar um conjunto de soluções possíveis; extrema sensibilidade às condições iniciais; descontinuidades e variedade de comportamento. O objetivo deste trabalho é mostrar algumas características da análise de sistemas não-lineares e caóticos, utilizando um de seus sistemas mais explorados, o oscilador de Duffing. O oscilador harmônico tem sido utilizado para modelar diversos sistemas dinâmicos mais complexos, visando esta necessidade, neste trabalho foram exploradas duas possíveis configurações do sistema, e realizada a simulação no Matlab®. Os resultados das simulações são analisados com embasamento na teoria de dinâmica não-linear, sendo apresentadas algumas características importantes de serem observadas. O resultado do trabalho demonstra a variedade de comportamento de sistemas não-lineares; a sensibilidade a condições iniciais; algumas técnicas de análise de sistemas não-lineares e caóticos, sendo o caos um comportamento com características específicas, e não uma simples ausência de organização, como sugere o nome (Viana, 2011).

Palavras chave: Não-linearidades, osciladores, caos.

1. Introdução

Um oscilador harmônico, Fig. (1), é representado basicamente pela Eq. (1). Duffing introduziu neste sistema uma rigidez cúbica, Eq. (2), para descrever o efeito de endurecimento da mola observado em muitos problemas mecânicos (Ogata, 2010).

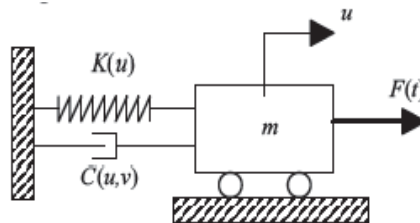


Figura 1. Oscilador harmônico

$$m\ddot{u} + C(u, v) + K(u) = F(t) \quad (1)$$

$$K(u) = k_0 u + k_1 u^3 \quad (2)$$

Muitos problemas de dinâmica não-linear podem ser modelados pela equação de Duffing, mostrada na Eq. (3) (Monteiro, 2006). Esta equação é um dos modelos mais populares, nos estudos clássicos de não linearidades, oscilações e caos.

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \omega_n^2 u \pm \alpha u^3 = F \sin(\omega t) \quad (3)$$

2. Sistemas não-lineares

Um caso especial do sistema de Duffing, que não apresenta amortecimento, Eq. (4), pode apresentar diferentes comportamentos sobre sua estabilidade dentro do espaço de estados. Nas proximidades dos pontos de equilíbrio $(\bar{u}, \bar{v})$ o sistema apresenta regiões de estabilidade e instabilidade (5), de acordo com os autovalores da matriz Jacobiana do sistema calculada nos pontos de equilíbrio. O ponto de equilíbrio $(0,0)$ é do tipo centro, com autovalores imaginários puros, o que caracteriza uma região de estabilidade. Os pontos de equilíbrio $(-1,0)$ e $(1,0)$ são do tipo sela, com autovalores reais puros, sendo um positivo e o outro negativo. Esta é uma região de instabilidade.

$$\ddot{u} + u - u^3 = 0 \quad (4)$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (0,0) \Rightarrow \lambda = \pm i \quad (5)$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (-1,0) \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (1,0) \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

A diversidade de comportamento no tempo do sistema da Eq. (4) é apresentada no gráfico da Fig. (2). Esta diversidade depende das condições iniciais. A legenda do gráfico indica cada um dos conjuntos de valores iniciais (u,v) . O sistema iniciado dentro da região de estabilidade, se mantém estável. No entanto, quando o sistema é iniciado fora da região de estabilidade, os valores (u,v) são ilimitadamente crescentes no tempo. Os dois primeiros conjuntos de valores iniciais estão no limite entre a região de estabilidade e a região de instabilidade, como se pode observar no comportamento das órbitas em azul (estável) e verde (instável).

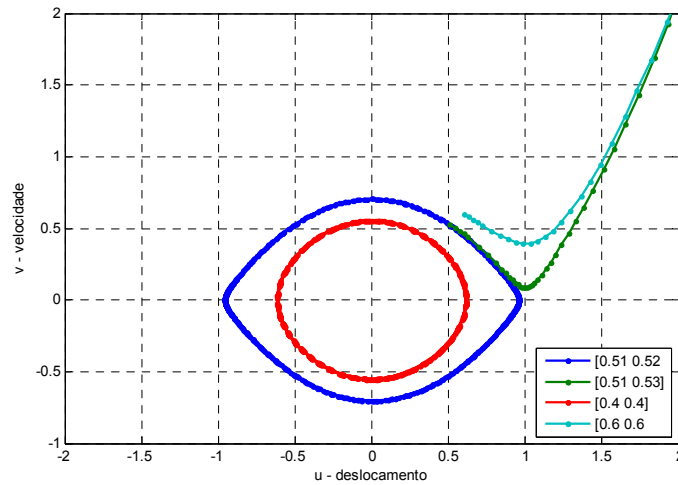


Figura 2. Regiões de estabilidade do Oscilador de Duffing

A energia total do sistema conservativo não-linear da Eq. (4), analisada através de seu Hamiltoniano, Eq. (6), varia conforme se verifica no gráfico da Fig. (3). A região central do gráfico apresenta menor variação de energia, próxima de zero, e nas extremidades a variação de energia é crescente, em coerência com as observações anteriores de estabilidade.

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \quad (6)$$

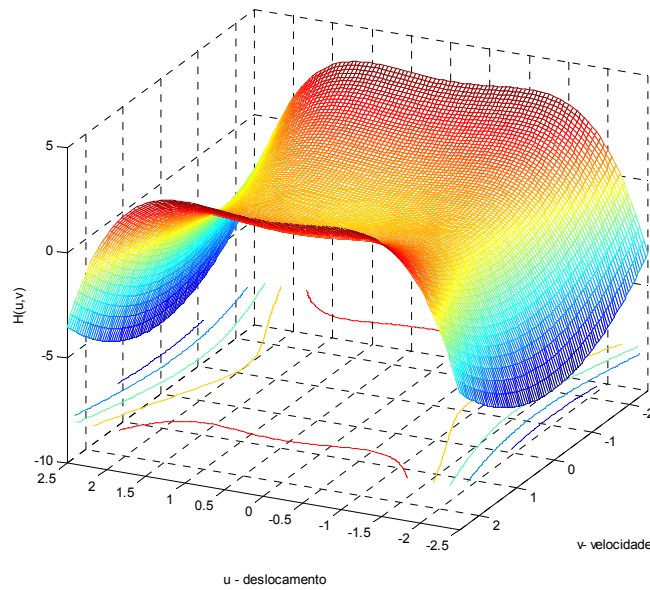


Figura 3. Energia total do sistema

3. Sistemas caóticos

Outro caso especial de oscilador é o da Eq. (7). Este oscilador tem comportamento não-linear e em algumas configurações apresenta comportamento caótico. Uma característica de um sistema caótico é apresentar em sua análise espectral uma banda limitada de sinais variáveis (Savi, 2006), como mostra a Fig. (4a). Outra característica deste tipo de comportamento é apresentar um espaço de estados com órbitas variadas, mas dentro de um espaço limitado Fig. (4b).

$$\ddot{u} + 0,05\dot{u} - 0,2u + u^3 = 7,8\sin(1,2t) \quad (7)$$

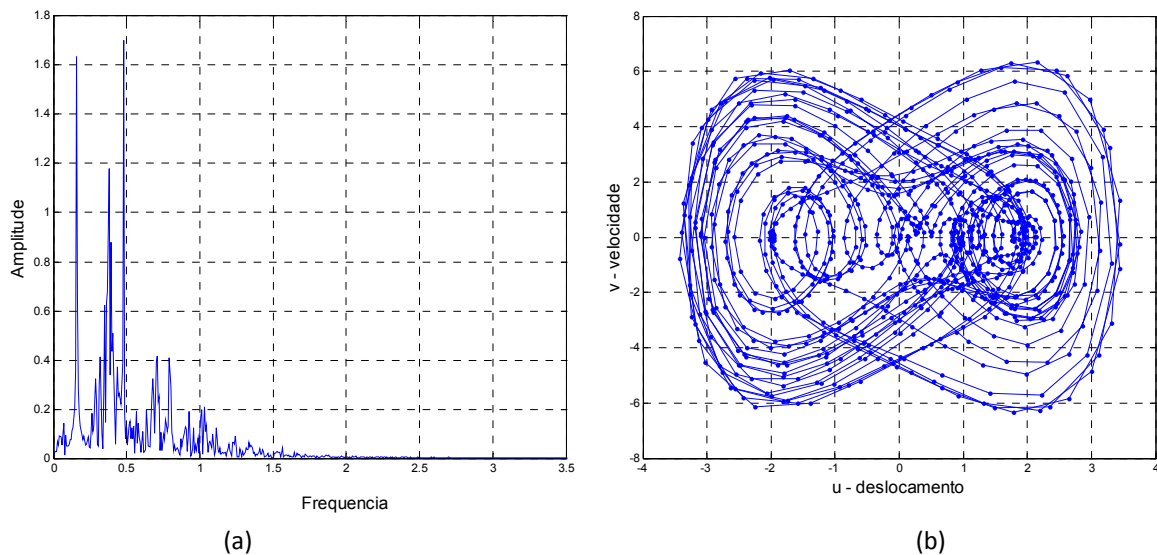


Figura 4. Transformada de Fourier e espaço de estados de um oscilador com comportamento caótico

O procedimento de criação da seção de Poincaré possibilita uma melhor compreensão da dinâmica global do sistema. A seção de Poincaré é utilizada para o estudo de órbitas próximas às órbitas periódicas; é utilizada também para analisar o espaço de fases de sistemas com forçamento periódico e quasi-periódico; e ainda, a estrutura de órbitas

próximas de órbitas homoclínicas e heteroclínicas. A Figura (5a) apresenta a seção de Poincaré para cada ciclo de forçamento do sistema caótico da Eq. (7).

Os expoentes de Lyapunov avaliam a sensibilidade do sistema à variação das condições iniciais, verificando a divergência entre trajetórias vizinhas, em modo dinâmico. O expoente de Lyapunov é definido pela Eq. (8), ou seja, se λ for negativo ou nulo a trajetória não diverge, se λ for positivo a trajetória diverge, caracterizando então o caos. A Figura (5b) se refere ao espectro de Lyapunov do sistema da Eq. (7). Observa-se que um dos expoentes é negativo e o outro positivo, o que caracteriza divergência das órbitas, característica de um sistema caótico. A implementação do espectro de Lyapunov foi realizada pelo algoritmo de Wolf (Nayfeh, 2004).

$$\lambda = \frac{1}{t} \log_b \left(\frac{d(t)}{d_0} \right) \quad (8)$$

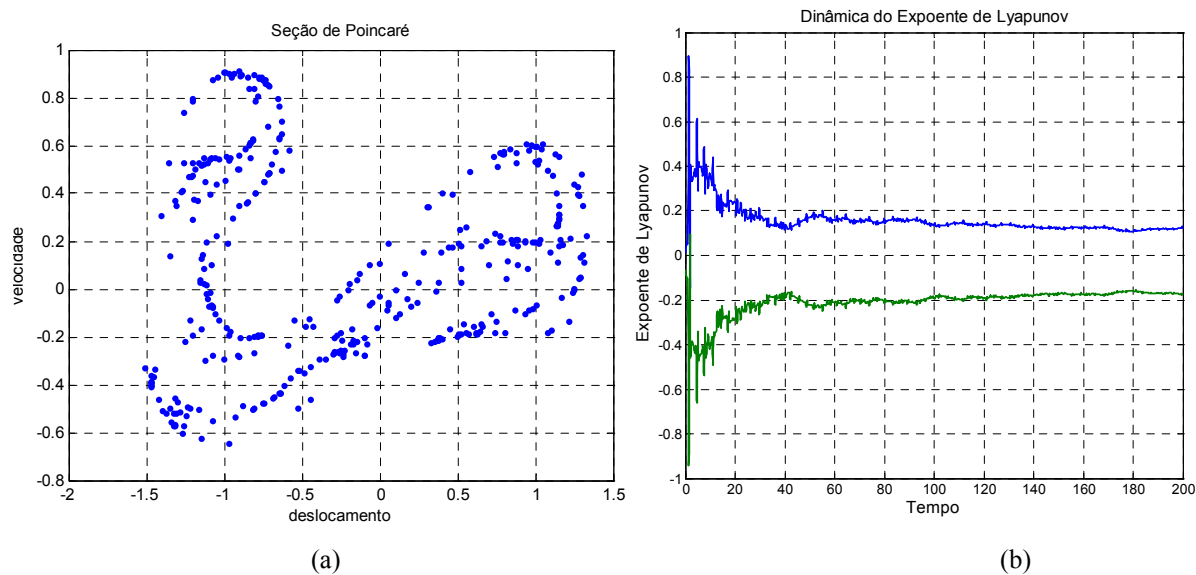


Figura 5. Seção de Poincaré e Expoente de Lyapunov de sistema com comportamento caótico

4. Conclusão

Este trabalho sintetiza estudos preliminares realizados pela autora sobre sistemas dinâmicos não-lineares e sistemas caóticos. As equações básicas foram apresentadas e algumas ferramentas de análise foram mostradas sucintamente. As análises de comportamento dinâmico foram implementadas pela própria autora a partir de rotinas computacionais desenvolvidas dentro da plataforma Matlab®. Na sequência deste estudo, pretende-se aplicar os conhecimentos adquiridos em sistemas reais, inclusive com validação experimental.

5. Referências

- Hagedorn, P. Oscilações Não-lineares, Editora Edgard Blücher Ltda, 1984.
 Monteiro, L. H. A. Sistemas Dinâmicos, Editora Livraria da Física, 2006.
 Nayfeh, A. H., Balachandran, B. Applied Nonlinear Dynamics, Wiley-VCH, 2004.
 Ogata, K., Engenharia de Controle Moderno, Editora: Pearson, 5 edição, 2010.
 Savi, M. A., Dinâmica Não-linear e Caos, Editora: e-papers, 2006.
 Viana, R. L. Introdução à Dinâmica Não-linear e Caos, Universidade Federal do Paraná, 2011.

6. Responsabilidade pelas informações

O autor é o único responsável pelas informações incluídas neste trabalho.