

## ESTUDO DO ESCOAMENTO COUETTE-CIRCULAR

Andreia Aoyagui Nascimento, [aanascimento@ufg.br](mailto:aanascimento@ufg.br)  
Felipe Pamplona Mariano, [fpmariano@ufg.br](mailto:fpmariano@ufg.br)  
Elie Luis Martinez Padilla, [epadilla@mecanica.ufu.br](mailto:epadilla@mecanica.ufu.br)  
Aristeu da Silveira Neto, [aristeus@mecanica.ufu.br](mailto:aristeus@mecanica.ufu.br)

**Resumo.** O presente trabalho faz uso de duas distintas metodologias numéricas, para a solução das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível, o método dos Volumes Finitos e o método Pseudoespectral de Fourier, acoplados ao método da fronteira imersa. Os resultados são comparados com a solução analítica do gap, para o movimento circular do cilindro interno. Neste presente trabalho foi possível fazer uma análise quantitativa pela semelhança do comportamento do perfil de velocidade no gap, além de uma análise da taxa de convergência e acurácia entre ambos, assim verificando que mesmo com o uso da fronteira imersa a metodologia Pseudoespectral apresentou de modo mais homogêneo.

**Palavras chave:** Couette-Circular; métodos dos Volumes Finitos, método Pseudoespectral de Fourier, Método da Fronteira Imersa.

### 1. INTRODUÇÃO

Na dinâmica dos fluidos computacional utiliza vários métodos computacionais para a solução das equações de Navier-Stokes. No presente trabalho dois métodos são ressaltados: o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método Espectral de Fourier (MPFO).

O MVF consiste em dividir o domínio em um número finito de volumes (Patankar, 1980 e Maliska, 1995), nos quais são então aplicadas às equações de conservação com o objetivo de obter equações algébricas lineares, ou seja, realiza-se a discretização das variáveis para cada volume.

O MPFO consiste na solução das equações diferenciais (EDO) utilizando a série de Fourier, ou seja, uma integral discreta no domínio (DFT). Assim a EDO esta metodologia apresenta uma transformação de domínio, do domínio físico para o espectral. Sendo que ambas se relacionam através relações de reciprocidade (Briggs e Henson, 1995).

Com a finalidade de simular problemas com geometrias complexas, faz-se uso do método da fronteira imersa (MFI) que consiste em modelar as condições de contorno através da inserção de um termo fonte nas Equações de Navier-Stokes, o qual é calculado em uma malha lagrangiana, que representa a interface do corpo imerso e é transferido através de esquemas de interpolação, para a malha euleriana, a qual é usada para a solução das equações de Navier-Stokes (Mittal; Iaccarino, 2005).

O presente trabalho estuda bidimensionalmente a validação de dois códigos em MVF e o MPFO acoplados com o MFI. As simulações foram realizadas para 32, 64, 128, e 256 malhas/pontos de colocação, respectivamente. O cálculo do erro foi realizado pela norma  $L_2$  e assim sendo possível realizar um estudo da taxa de convergência em ambos métodos.

### 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

O problema físico consiste de um escoamento confinado entre cilindros concêntricos, originado pela rotação do cilindro de menor diâmetro. A Figura (1) mostra um esquema do problema, o qual é um caso especial do escoamento de Taylor-Couette, onde o cilindro interno,  $R_1$ , rotaciona no eixo axial.

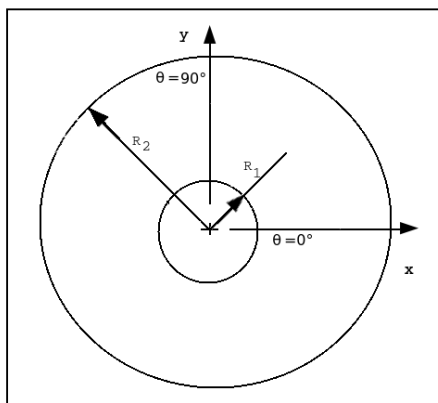


Figura 1 Esquema da rotação do problema físico.

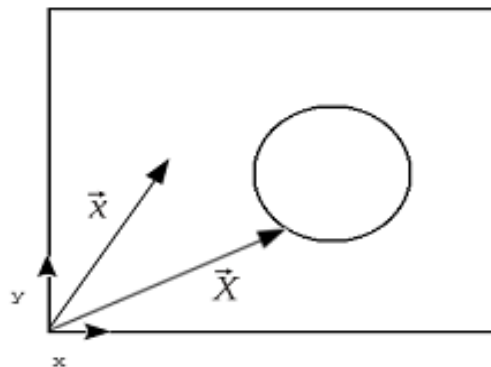


Figura 2. Esquema do domínio utilizado no MFI.

Neste escoamento, o movimento do fluido é circular e estacionário. A solução analítica para o escoamento na região de interesse (gap) é conhecida pela Eq.(1) (Moran e Shapiro, 2013).

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r} \quad A = \frac{w_2 R_2^2 - w_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad B = \frac{(w_1 - w_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1)$$

Onde A e B são constantes determinadas pela condição de contorno nas paredes, dada pela Eq.(1). Onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as velocidades angulares do cilindro interno e do externo respectivamente.  $\mu$ , é a viscosidade do fluido confinado. O número adimensional representativo deste tipo de escoamento é o número de Taylor definido segundo Chandrasekhar (1960), Eq.(2).

$$T_a = \frac{2R_1^2 \text{gap}^4}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{\omega}{\mu} \right)^2 \quad (2)$$

### 3. MODELAGEM NUMERICA

#### 3.1 Método dos Volumes Finitos (MVF)

O MVF utiliza de discretização temporal e espacial com base em um volume elementar. O código desenvolvido para o trabalho possui: malha deslocada e acoplamento pressão velocidade pelo método do passo fracionado (Patanka, 1980 e Maliska, 1995). Resultados referentes a verificação pode ser encontrado em (Nascimento, 2012). Como exemplo a equação discretizada para a componente da velocidade horizontal, u, é dada pela Eq. (3),

$$\frac{u^t - u^0}{\Delta t} = \frac{-1}{\rho} \frac{P_e - P_w}{\Delta x} - \frac{u(u_e - u_w)}{\Delta x} - \frac{v(u_n - u_s)}{\Delta y} + v \left[ \left( \frac{u_e - u_p}{\delta x_e} - \frac{u_p - u_w}{\delta x_w} \right) \frac{1}{\Delta x} + \left( \frac{u_n - u_p}{\delta y_n} - \frac{u_p - u_s}{\delta y_s} \right) \frac{1}{\Delta y} \right] \quad (3)$$

#### 3.2 Método Pseudospectral de Fourier (MPFO)

A solução utilizando o MPEFO consiste na transformação da equação do movimento para o espaço espectral, assim a formulação do campo de velocidade horizontal pode ser escrita como mostrado na Eq. (4).

$$\frac{u^t - u^0}{\Delta t} = \widehat{ADV} - (i k_x \hat{P}) + \widehat{DIF} + \hat{f} \quad (4)$$

Onde “^” simboliza o termo no espaço espectral. O termo advectivo (ADV) é resolvido utilizando a metodologia antissimétrica (Souza, 2005) e o DIF refere-se à parcela difusiva.

O MPFO não necessita do acoplamento pressão velocidade, devido a esta metodologia utilizar a projeção dos termos da equação de Navier-Stokes, no plano de divergência nula (Mariano, 2011 e Nascimento, 2012), o gradiente de pressão transformado é nulo sobre este plano.

O avanço temporal utilizado foi Runge-Kutta clássico de 4ª ordem, devido à metodologia MPFO mostrar elevada ordem de convergência espacial.

#### 3.3 Método Fronteira Imersa (MFI)

O Método de Fronteira Imersa (MFI) utiliza dois domínios independentes, o domínio Lagrangiano “ $\Gamma$ ” e o domínio Euleriano “ $\Omega$ ”, como mostrado na Fig. (2). O Método do “Direct-Forcing” (MDF) desenvolvido por Mohd-Yusof, (1997), foi utilizado para obter os valores do campo Lagrangiano, pois, tem como vantagem a forma de obter o termo força, sem utilizar os ajustes de constantes pelo usuário, (Mittal; Iaccariano, 2005 e Oliveira, 2006).

Esta metodologia extrai a força diretamente da solução numérica, a qual é determinada pela diferença entre as velocidades interpoladas e a velocidade física, (Mittal; Iaccariano, 2005 e Oliveira, 2006).

Os domínios Lagrangianos e Euleriano se relacionam da seguinte forma, Eq (5),

$$f_x = F_x(\vec{x}, t) \text{ se } \vec{x} = \vec{X} \quad \text{ou} \quad f_x = 0 \text{ se } \vec{x} \neq \vec{X} \quad (5)$$

Assim o conceito do MDF é aplicado na equação do movimento como mostrado nas Eq.(6).

$$\frac{u^{t+dt} - \hat{u} + \hat{u} - u^t}{\Delta t} + rhs + f_x = 0 \quad (6)$$

Onde rhs é a reorganização dos termo convectivos e difusivos em um tempo t, a variável  $\hat{u}$  é um parâmetro temporário. O termo fonte da Eq (6), é reescrito para o campo lagrangiano como mostrado na Eq.(7).

$$F_x = \frac{U^{t+dt} - \hat{U}}{\Delta t} \quad \forall X_l \quad (7)$$

Onde  $U^{t+dt}$  é a condição de contorno e  $\hat{U}$  é o parâmetro temporário interpolado do domínio euleriano para o lagrangiano. A atualização da velocidade é dada pela Eq. (8).

$$u^{t+dt} = \hat{u} + F_x \Delta t \quad (8)$$

### 3.4 Parâmetros para simulações

A simulação fez-se seguindo os parâmetros apresentados na Tab. (1), sendo velocidade de rotação do cilindro interno, ' $\omega_1$ ' de 1,0 rad/s.

Tabela 1. Parâmetros de simulação.

| Descrição                   | símbolos | valores                  |
|-----------------------------|----------|--------------------------|
| Largura e altura do domínio | L, H     | $\pi$                    |
| Massa específica            | $\rho$   | 1,0 [Kg/m <sup>3</sup> ] |
| Viscosidade                 | $\mu$    | 1,0 [Pa .s]              |
| Malha/ pontos de colocação  | N, M     | 32, 64, 128 e 256        |
| Número de Curret            | CFL      | 0,1                      |
| Número de Taylor            | $T_a$    | 20                       |
| Raio cilindro interno       | $R_1$    | 0,1 $\pi$                |
| Raio cilindro externo       | $R_2$    | $R_1$ 3,2                |

## 4. RESULTADOS

Figura 3 esta mostrando o erro obtido pela norma  $L_2$  para o problema Couette-Circular, com diferentes divisões do domínio. A norma  $L_2$  foi realizada a partir de uma comparação entre a solução analítica, Eq. (1), e a solução numérica.

Na Figura 3 pode-se notar que ambos os métodos apresentaram uma tendência a primeira ordem de convergência, sendo que, para o MVF houve a presença de uma descontinuidade para as malhas de 32 e 64 volumes, pois nestas condições, o cilindro interno obteve pouca malha em seu interior, o que prejudicou no cálculo da interpolação e distribuição do MFI. Fato este que não é notado no MPFO, pois devido aos cálculos das derivadas dos campos de velocidades utilizar todo os pontos de colocação do domínio, este erro é minimizado.

A Figura 4 mostra três perfis de velocidades, onde a linha contínua representa a solução analítica, os símbolos pontos representam o perfil velocidade para MPFO, utilizando 64x64 pontos de colocação, os símbolos de circulares representam o perfil velocidade para o mesmo método, utilizando 256x256 pontos de colocação. Portanto pode-se notar o ganho quantitativo do MPFO com o refinamento.

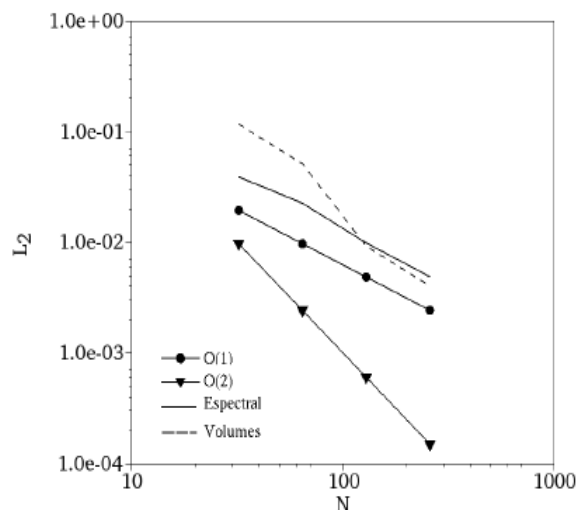


Figura 3. Taxa de convergência.

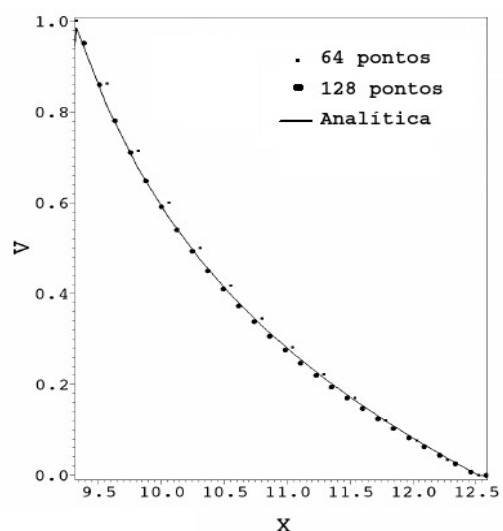


Figura 4. Perfis velocidades, obtida no gap para a posição de  $\theta=0^\circ$

## 5. CONCLUSÃO

De acordo com o resultado apresentados na verificação de ambos os códigos, pode-se concluir que o MPFO apresenta vantagens em relação ao MVF, na medida em que, apresenta implementação mais amigável e a ausência da necessidade do processo de acoplamento pressão velocidade. Nota-se que devido ao MPFO utilizar todo domínio para a solução numérica (fato que o favorece na acurácia da metodologia), torna-se um modo de propagação de erro para quando acoplado com o MFI, o qual utiliza de funções de interpolação e distribuição.

## 6. REFERENCIAS

- Briggs, W.L., e Henson, V.E., 1995, "The DFT : an owner's manual for the discrete Fourier transform." SIAM.
- Chandrasekhar, S., 1960, "Experiments on The Stability of Spiral Flow Between Rotating Cylinders," Proc. N. A. S., Vol. 46, 1150 - 1154.
- Maliska, C.R., 1995, "Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional", Ed. LTC, Rio de Janeiro, Brasil.
- Mariano, F.P., 2011., "Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes Usando uma Híbrida das Metodologias Fronteira Imersa e Pseudospectral de Fourier", (tese doutorado), Uberlândia: UFU- Faculdade de Engenharia Mecânica.
- Mittal, R. e Iaccarino, G., 2005, "Immersed boundary methods. Annual Reviews of Fluids Mechanic", p. 239–261.
- Mohd-Yusof, J., 1997, "Combined immersed-boundary/b-spline methods for simulations of flow in complex geometries". CTR Annual Research Breifs, p. 317–327, 1997.
- Moran, M. J., Shapiro, H. N., 2013, "Princípios de Termodinâmica Para Engenharia", 7ª Ed. LTC.
- Nascimento, A.A., Mariano, F.P., Padilla, E.L.M., 2012, "Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes utilizando o método dos Volumes Finitos e o método Pseudospectral de Fourier", 22 ° POSMEC, Uberlândia-MG, Brasil.
- Patanka, S., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", Ed. Taylor e Francis.
- Oliveira, J.E.S.M , 2006, "Método da Fronteira Imersa Aplicado à Modelagem Matemática e Simulação Numérica de Escoamentos Turbulentos Sobre Geometrias Móveis e Deformáveis". (tese Doutorado) Uberlândia: UFU, Brazil.
- Souza, A.M., 2005. "Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares livres". (tese doutorado), Uberlândia: UFU- Faculdade de Engenharia Mecânica.

## 7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho