

CONSTRUÇÃO DE MODELO PROBABILÍSTICO DE PARÂMETROS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS *SHUNT* VIA MÉTODO DA MÁXIMA ENTROPIA

B.G.G.L.Z. Vicente, LMest, brunoqv@mec.ufu.br
A.M.G. de Lima, LMest, amglima@mecanica.ufu.br

Resumo. O presente trabalho dedica-se à construção do modelo probabilístico dos parâmetros de circuitos elétricos *shunt* ressonante aplicados a estruturas compostas contendo materiais piezelétricos, usando para isso o Método da Máxima Entropia como ferramenta matemática para obtenção das funções densidade de probabilidade que modelam o comportamento probabilístico de cada parâmetro em análise. Neste sentido, ênfase foi dada à abordagem paramétrica, uma vez que as incertezas serão introduzidas diretamente nos parâmetros do modelo, sendo também realizada a análise da influência de diferentes níveis de incertezas em cada um dos parâmetros dos circuitos *shunt*. Através dos resultados das análises, foram estabelecidos os limites de incertezas, o número mínimo de amostras e as prováveis distribuições de probabilidades para cada variável de projeto a serem utilizadas no processo de otimização robusta dos circuitos elétricos *shunt*, realizado a posteriori.

Palavras chave: modelagem probabilística, Método da Máxima Entropia, circuitos elétricos *shunt*, materiais piezelétricos, estruturas compostas.

1. INTRODUÇÃO

No contexto de estruturas inteligentes e seguindo os trabalhos de Soize (2010) e Ritto *et al.* (2008), o presente artigo apresenta avaliação da influência de incertezas nos parâmetros de resistência e indutância do circuito *shunt* e espessura do material piezelétrico de uma estrutura composta contendo material piezelétrico associado a circuito elétrico *shunt* ressonante. Através do Método da Máxima Entropia, determinou-se a distribuição apropriada do comportamento estocástico das incertezas e fundamentou-se o nível de dispersão máximo e de número de tiragens para convergência do modelo. Essas informações são de fundamental importância para o desenvolvimento do projeto ótimo-robusto de sistema para mitigação de vibrações, tais como o trabalho realizado por Santos (2012).

O processo de avaliação dos parâmetros baseia-se na análise da função de resposta em frequência (FRF) da estrutura contendo elementos piezelétricos combinados com circuitos *shunt*, dada por:

$$H(\omega) = \left[K_{uu} - K_{u\varphi} \left(K_{\varphi\varphi} - \frac{I}{j\omega} Z^{-1}(\omega) \right)^{-1} K_{\varphi u} - \omega^2 M \right]^{-1} \quad (1)$$

Onde K_{uu} é a rigidez puramente mecânica, $K_{u\varphi}$ e $K_{\varphi u}$ são as rigidezes eletromecânicas, $K_{\varphi\varphi}$ é a rigidez puramente elétrica e M é a massa do sistema. A Eq. (1) pode ser utilizada para diferentes tipos de circuitos *shunt* mediante a introdução das expressões correspondentes de suas impedâncias elétricas, indicadas por $Z(\omega)$.

2. MODELO NOMINAL

Estabeleceu-se como modelo nominal, denominado por $\bar{H}(\omega)$, uma viga em balanço de quatro camadas de material composto, esquematizada na Fig. (1), contendo um elemento PZT do tipo PZT G1195, na posição indicada, combinada a dois circuitos elétricos *shunt*: resistivo e ressonante.

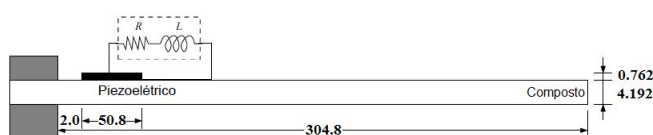


Figura 1 – Placa composta contendo circuito elétrico *shunt* ressonante.

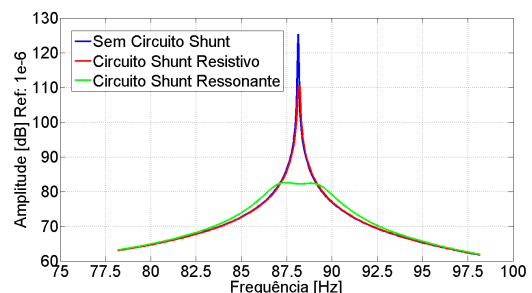


Figura 2 – Amplitudes das FRFs para os valores nominais dos circuitos *shunt* analisados.

Inicialmente, a espessura do PZT (h_{PZT}) foi considerada igual a $0,762 \text{ mm}$ e a resistência do circuito *shunt* resistivo igual a $3,23 \times 10^5 \Omega$. Para o circuito *shunt* ressonante assumiu-se $R = 1,61 \times 10^4 \Omega$ e $L = 6,29 \times 10^2 \text{ H}$. Sabendo que o circuito *shunt* resistivo impõe $Z(\omega) = R$ e o *shunt* ressonante determina $Z(\omega) = R + j\omega L$ na Eq. (1), a Fig. (2) apresenta as amplitudes das FRFs obtidas para o primeiro modo de vibração, onde nota-se a maior redução nível de vibração do circuito elétrico *shunt* ressonante, sendo essa configuração a escolhida para o processo de modelagem estocástica com vistas na otimização robusta dos parâmetros.

3. QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS

O processo de construção do modelo probabilístico para cada parâmetro de projeto baseou-se no Método da Máxima Entropia (MME), que se apoia no fato de que ao maximizar a entropia do sistema, maximizam-se também as incertezas contidas no mesmo, o que resulta no mínimo de informações inferidas (Shannon, 1948). Portanto, partindo-se de distribuições que atendem as restrições (por exemplo, os momentos estatísticos) de uma dada variável de projeto, o MME tem determina a distribuição que apresenta o máximo de incerteza, ou seja, a máxima entropia.

Segundo Shannon (1948), dada uma função densidade de probabilidade $p_x(x)$, sua entropia é dada pela Eq. (2):

$$S(p_x(x)) = - \int p_x(x) \ln(p_x(x)) dx \quad (2)$$

Do ponto de vista da matemática estatística, frequentemente conhece-se alguma informação sobre x , como sua média e/ou sua variância, sendo essas informações descritas como momentos estatísticos. Usando essas informações e aplicando multiplicadores de Lagrange, maximiza-se o seguinte funcional $p_x(x)$:

$$\delta \bar{S} = \int \left[-\ln(p_x(x)) - 1 + \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right] \delta p_x(x) dx = 0 \quad (3)$$

A Eq. (3) fornece a expressão para a provável função densidade de probabilidade (FDP) da variável aleatória x :

$$p_x(x) = \exp \left[-1 + \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i \right] \quad (4)$$

Onde os multiplicadores de Lagrange, λ_i , podem ser obtidos através das $n+1$ equações de restrições impostas pelos momentos estatísticos conhecidos, para a variável aleatória x .

Seguindo o trabalho de Soize (2010), observa-se que os parâmetros em análise, a saber, R , L e h_{PZT} compartilham propriedades físicas elementares: são essencialmente positivos, limitados e não-nulos. Representando de forma generalizada esses parâmetros através da variável aleatória X , considera-se as seguintes restrições: (i) admite valores no intervalo $X \in]0, +\infty[$; (ii) é conhecida a média, $E\{X\} = \bar{X}$; (iii) a dispersão é finita, $E\{\ln(X)\} = c$, onde $|c| < +\infty$ (Soize, 2010). Resolvendo a Eq. (4) e impondo-se essas restrições, obtém-se a seguinte função *Gamma*:

$$p_X(x) = 1_{]0, +\infty[}(x) \frac{1}{\bar{X}} \left(\frac{1}{\delta_X^2} \right)^{\frac{1}{\delta_X^2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\delta_X^2}\right)} \left(\frac{x}{\bar{X}} \right)^{\frac{1}{\delta_X^2}-1} \exp \left[-\frac{x}{\delta_X^2 \bar{X}} \right] \quad , \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (5)$$

Onde $\delta_X = \sigma_X / \bar{X}$ é a dispersão relativa de X , limitada a $0 < \delta_X < 1/\sqrt{3}$ (Ritto *et al*, 2008), ou seja, de 0 a 57,7%.

A fim de se avaliar o modelo probabilístico obtido na Eq. (6) para os parâmetros em análise, empregou-se a função $GAMRND(\alpha, \beta)$ do MATLAB®, sendo $\alpha = 1/\delta_X^2$ e $\beta = \bar{X} \delta_X^2$, de acordo com o trabalho de (Ritto *et al*, 2008) e investigou-se o número mínimo de tiragens aleatórias para a convergência usando a seguinte função de convergência:

$$conv(n_s) = \frac{1}{n_s} \sum_{j=1}^{n_s} \|H_j(\omega, \theta) - \bar{H}(\omega)\|^2 \quad (6)$$

Sendo n_s o número de realizações, $H_j(\omega, \theta)$ a j -ésima FRF para uma dada realização aleatória θ .

3.1 Modelagem estocástica de incertezas nos parâmetros e avaliação de convergência

Conforme Sedra (2009), os resistores e indutores disponíveis comercialmente apresentam, no pior caso, 20% de tolerância em relação ao seu valor nominal. Assim, escolheu-se a máxima dispersão relativa desses parâmetros como $\delta_{R,L}^{\max} = 0,3$, ou seja, abaixo do limite teórico de 57,7%. Segundo Selten (2005), as incertezas na espessura dos materiais piezelétricos dependem da qualidade no processo de fabricação do mesmo. Partindo-se de catálogos disponíveis dos fabricantes *PI – Piezotechnology®* e *Midé Technology Corp.®*, a tolerância na espessura pode atingir 5%, escolheu-se o valor limite da dispersão relativa em 10%, ou seja, $\delta_{h_{PZT}}^{\max} = 0,1$, já que, segundo Andreus (2007), valores de incertezas superiores acarretariam em modificação estrutural, descaracterizando o problema original.

Para o modelo nominal foram calculados os parâmetros α e β a serem empregados na FDP *Gamma* para a avaliação da convergência (Eq. (6)) e, para cada nível de dispersão realizou-se 5000 tiragens aleatórias, usando o método do *Hyper-Cubo-Latino* (HCL), variante do Método de Monte Carlo, com garantia de convergência mais rápida.

A Figura (3) apresenta as FDPs para cada dispersão, em cada parâmetro. Nota-se que para valores acima de 10% as funções *Gamma* apresentam deslocamento do pico e achatamento dos valores de probabilidade.

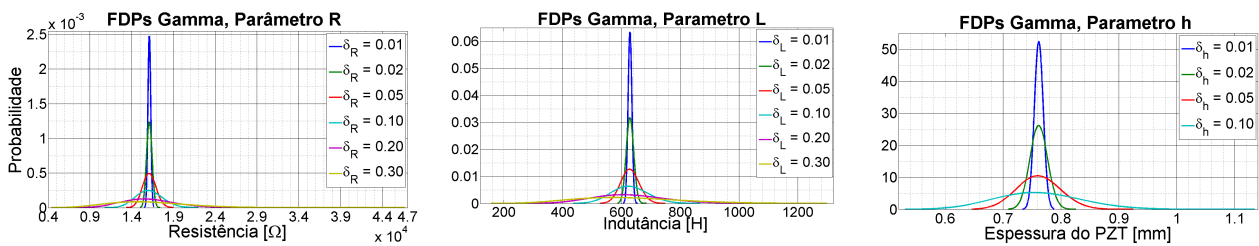


Figura 3 – Distribuições *Gamma* para diferentes valores de dispersão para cada parâmetro.

As Figuras (4) exibem os envelopes das FRFs para algumas das dispersões em cada um dos parâmetros. Deve-se salientar que para avaliação das incertezas fez-se variar um parâmetro por vez, mantendo os demais constantes. Observando as Figs. (4.a) a (4.c), FRFs para incerteza em R , nota-se que quanto maior o nível de dispersão δ_R , maior é a dispersão ao redor da resposta média do sistema. Nas Figuras (4.d) a (4.f) nota-se que um aumento no nível de dispersão δ_L do parâmetro L acarreta um aumento do intervalo de confiança e, em relação ao parâmetro R , exerce maior grau de influência na atenuação de vibrações. Nas Figs. (4.g) a (4.i) observa-se que a influência das incertezas no parâmetro espessura do elemento piezelétrico, h_{PZT} , é similar à influência das incertezas no parâmetro de indutância.

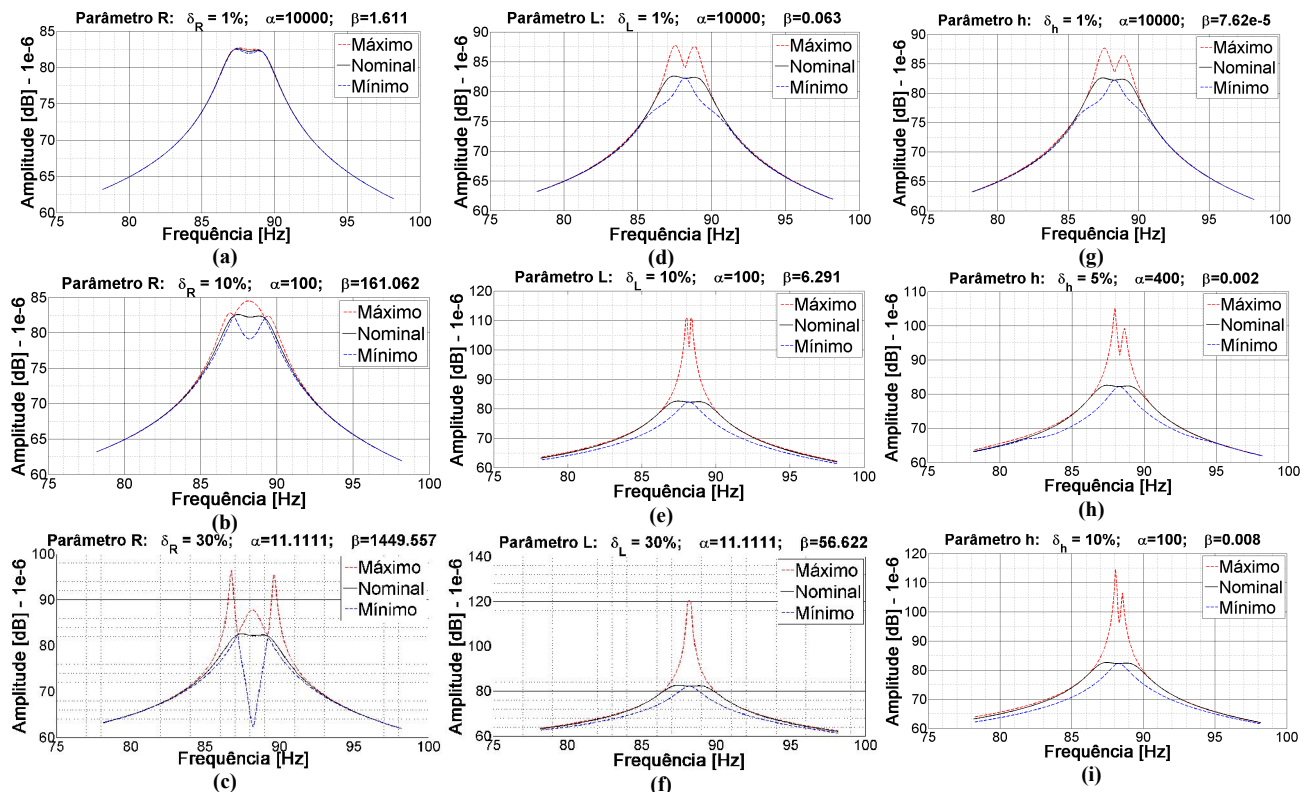


Figura 4 – Envelopes das FRFs para incertezas nos parâmetros. R : (a) – (c); L : (d) – (f); h_{PZT} : (g) – (i).

A Figura (5) apresenta a evolução do erro quadrático médio *versus* número de tiragens aleatórias. Para o parâmetro R , nota-se que foi necessário no pior caso (dispersão de 30%) 1500 realizações para convergência. No caso do parâmetro L , observa-se que em alguns casos são necessárias 2500 realizações para convergência. Já o parâmetro h_{PZT} apresentou a pior situação de convergência para 5% de dispersão, sendo necessário pelo menos 3000 realizações.

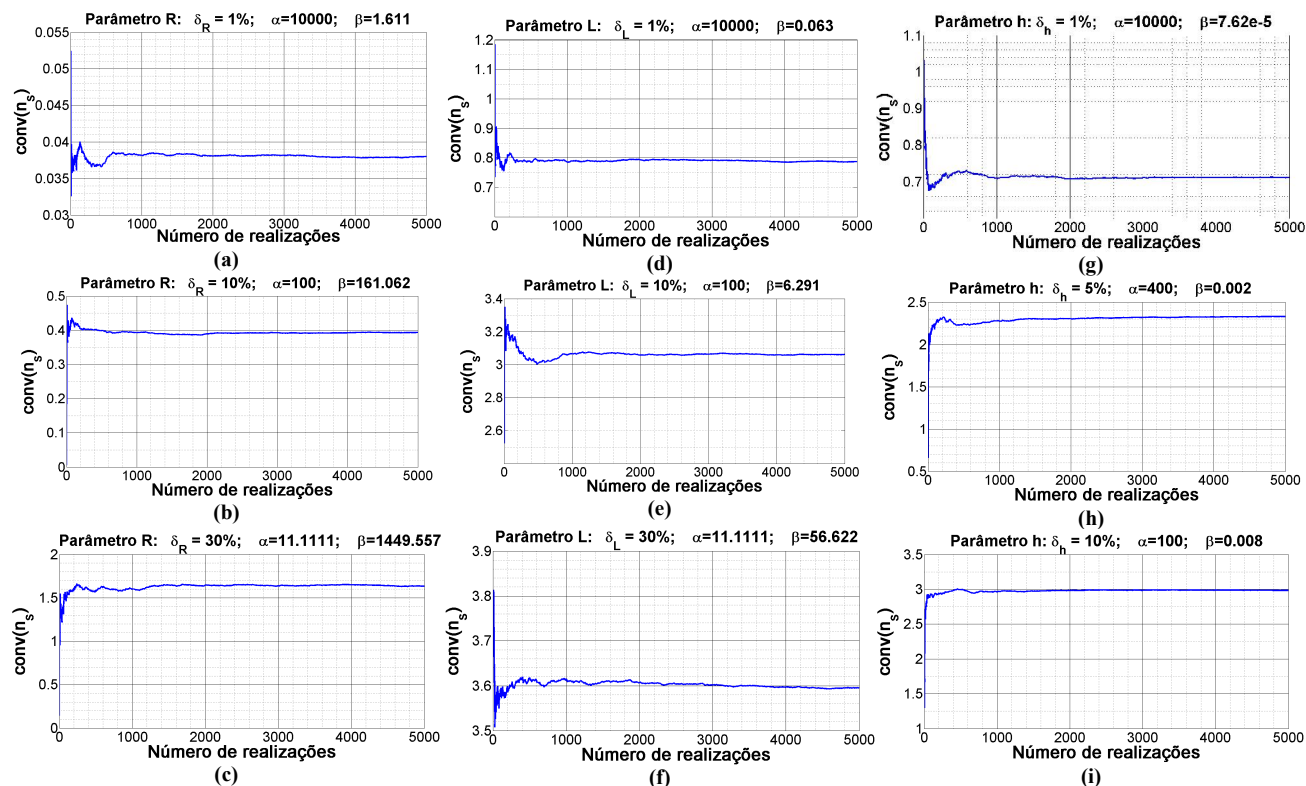


Figura 6 – Convergência do erro quadrático médio nos parâmetros. R : (a) – (c); L : (d) – (f); h_{PZT} : (g) – (i).

A partir das análises realizadas, a Tab. (1) apresenta os limites de dispersão e do número mínimo de tiragens aleatórias consolidados, a serem utilizados posteriormente no processo de otimização robusta:

Tabela 1 – Dispersão, δ , e número de tiragens, n .

	R	L	h_{PZT}
δ	0,30	0,30	0,10
n	1500	2500	3000

4. REFERÊNCIAS

- Andreus, U.; Porfiri, M., 2006, “Effect of Electrical Uncertainties on Resonant Piezoelectric Shunting”. In *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, May 2007 18: 477-485, first published on October 30.
- Ritto, T. G., Sampaio, R. Cataldo, E. 2008, “Timoshenko Beam with Uncertainty on the Boundary Conditions”, In *Journal of Brazilian Society of Mechanical Science e Engineering*, Oct-Dec, Vol. XXX, No. 4, pp. 295-303.
- Santos, H. F. L., 2012, *Controle ativo-passivo de vibrações estruturais usando materiais piezelétricos: Otimização e quantificação de incertezas*, Tese de Doutorado – EESC/USP, São Carlos, SP.
- Shannon C. E., *A mathematical theory of communication*, 1948, Bell System Tech. J., 27, 379-423 and 623-659.
- Sedra, A. S.; Smith, K. C. *Microeletrônica*, 2009, 6ª Edição / Editora: Oxford, ISBN13: 9780195323030,
- Selten, M., Schneider, G.A., Knoblauch, V. and McMeeking, R. M., 2005, “On the evolution of the linear material properties of PZT during loading history: an experimental study”, In *Journal of Solids and Structures*, 1-14.
- Soize, C., 2010, “Stochastic Models in Computational Mechanics”, *Seminar on Uncertainties and Stochastic Modeling*, PUC-Rio, August, 2-6.

5. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.