

IDENTIFICAÇÃO DE CARGA AXIAL APLICADA À ESTRUTURA MECÂNICA SUBMERSA A PARTIR DE RESPOSTA DINÂMICA DA ESTRUTURA

Sigeo Kitatani Jr, sigeo@mecanica.ufu.br
Aristeu da Silveira Neto, aristeus@mecanica.ufu.br
Domingos Alves Rade, domingos@ufu.br

Resumo: O nível de carga axial em estruturas esbeltas, sabidamente, influenciam o comportamento dinâmico e a integridade destas estruturas. O conhecimento deste e de outros carregamentos externos aos quais uma estrutura mecânica é submetida em suas condições de trabalho muitas vezes não é uma tarefa trivial, implicando quase sempre que os transdutores (sensores de força, aceleração, etc.) tenham sido inseridos na estrutura, antes da instalação desta estrutura. O presente trabalho tem como principal objetivo propor uma metodologia que seja capaz de identificar a carga axial a que um duto submerso. Para isto, prevê a modelagem numérica, via elementos finitos, do comportamento dinâmico da estrutura, da interação desta estrutura com o meio fluido ao qual está imerso, bem como a modelagem experimental para validação da metodologia.

Palavras-chave: fluido-estrutura, problema inverso, elementos finitos, carga axial.

1. INTRODUÇÃO

De uma forma geral, a modelagem de problemas de engenharia geralmente requer a resolução de um sistema de equações diferenciais parciais, EDP. Para que possamos resolver este sistema de equações, o problema deve estar bem posto do ponto de vista matemático, o que implica que a solução exista, que ela seja única e que dependa continuamente das condições auxiliares, ou seja, das condições iniciais e das condições de contorno, também denominadas condições de fronteira (Fortuna, 2000). Partindo deste ponto de vista, é importante especificar corretamente as condições iniciais e de fronteira, pois, do contrário, se especificadas incorretamente, farão com que a resolução do problema não seja única ou compatível com o problema físico.

A determinação de condições de fronteira em estruturas reais, nas suas condições de operação, muitas vezes implica na instrumentação das mesmas (colocação de transdutores como célula de carga e extensômetros), previamente à sua instalação ou mesmo durante este processo. Para algumas estruturas, esta condição é inviável ou mesmo impossível em alguns casos. Estes e outros fatores tornam cada vez mais importante o estudo destes efeitos e o desenvolvimento de metodologias capazes de avaliar as condições de fronteira a que as estruturas mecânicas reais estão submetidas.

O fato de que as solicitações externas podem modificar o comportamento dinâmico de uma estrutura é bem conhecido e é denominado enrijecimento por tensões, ou stress-stiffening (GREENING e LIEVEN, 1999). Para efeito didático, podemos exemplificar a presença deste efeito nos instrumentos musicais de corda, nos quais as notas (as frequências naturais de vibração) são ajustadas variando-se o nível de tensão nas cordas do instrumento. Este efeito ocorre igualmente em elementos estruturais, tais como barras, vigas, placas, cascas, conforme evidenciado por Lurie (1952) e, mais recentemente, no livro de Virgin (2007).

Historicamente, Rayleigh (1877) foi o primeiro a analisar os efeitos da carga axial sobre as frequências naturais de algumas estruturas. Stephens (1936) reconheceu a semelhança entre os problemas de estabilidade e vibrações de estruturas, propôs um método para determinar o coeficiente de fixação de elementos estruturais.

Weinstein e Chien (1943) investigaram o comportamento vibratório de uma placa engastada submetida a esforços de tração uniforme. Mostraram, por meio de um princípio variacional, que o quadrado da frequência de vibração da placa aumenta em forma aproximadamente linear, com o acréscimo da carga de tração.

Chu (1949) determinou uma relação linear entre a carga crítica de uma coluna simplesmente apoiada e de um pórtico com o quadrado das frequências naturais. Seus resultados experimentais mostraram-se muito próximos aos previstos pela teoria.

Lurie (1951) propôs um método de determinação das cargas últimas de flambagem a partir das respostas dinâmicas em colunas e placas finas. Pouco depois (LURIE, 1952), verificou que as cargas de flambagem de colunas podem ser encontradas por meio da condição de anulação da primeira frequência natural, e utilizou as vibrações laterais de vigas, pórticos e placas para tratar a estabilidade estrutural desses elementos.

Outros autores (SWEET et al., 1977; SEGALL e BARUCH, 1980; VIRGIN e PLAUT, 1990) propuseram métodos não destrutivos para a determinação da carga de flambagem em modelos de colunas, utilizando dados experimentais.

O presente trabalho tem como foco principal a proposição de um procedimento para determinação de condições de fronteira envolvendo estruturas submersas. Tem como objetivo a determinação das cargas externas aplicadas a uma estrutura mecânica, através da solução de problema inverso, a partir das respostas dinâmicas da estrutura. Para atingir

estes objetivos gerais, os principais desafios deste trabalho são: a modelagem numérica da estrutura; a modelagem numérica dos efeitos de interação fluido-estrutura e a realização de ensaios experimentais, para validação dos resultados numéricos e do procedimento de identificação.

A modelagem do efeito de interação fluido-estrutura é feita considerando o fluido inicialmente em repouso. Para o fluido serão levadas em considerações as seguintes hipóteses: escoamento bidimensional, irrotacional, isotérmico e incompressível. A discretização deste domínio será feita por elementos finitos, utilizando a técnica dos Resíduos Ponderados e o método de aproximação de Galerkin, metodologia esta inspirada no trabalho de Pavanetto (1991).

2. JUSTIFICATIVA

O presente trabalho é motivado pelo interesse tecnológico manifestado pela PETROBRAS (Empresa Brasileira de Petróleo) acerca do problema de determinação indireta de cargas axiais aplicadas em dutos submarinos que, sabidamente, influenciam o comportamento dinâmico e a duração da vida destas estruturas. Está inserido em proposta de projeto de pesquisa envolvendo a empresa supracitada e os grupos de trabalho do Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst) e do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU.

O estudo tem caráter científico, dada a necessidade de se desenvolverem novas metodologias adaptadas às condições específicas do ambiente submarino e, ao mesmo tempo, caráter tecnológico, em face do objetivo de transferência do conhecimento gerado à PETROBRAS, que pretende utilizá-lo para a redução de custos envolvidos na produção de petróleo em águas profundas.

Com a obtenção dos objetivos propostos neste trabalho pretende-se complementar o conhecimento científico do grupo de pesquisa envolvido neste trabalho, no que diz respeito à compreensão do comportamento dinâmico de estruturas mecânicas submersas, bem como oferecer uma proposta de solução de problemas práticos de engenharia, vivenciado pela empresa parceira deste projeto de pesquisa.

3. METODOLOGIA

A determinação de condições de fronteira é um problema recorrente em ampla área de atuação das engenharias, como Civil, Aeronáutica, Mecânica, Naval, entre outras, principalmente quando se trata da resolução de problemas envolvendo estruturas. Um exemplo típico deste problema é a análise de estruturas ou sistemas mecânicos construídos no passado, quando o engenheiro se depara com a necessidade de avaliar a vida útil destas estruturas (fazendo a verificação das considerações adotadas nos projetos ou verificando a integridade dos componentes deste sistema) ou mesmo na situação de necessidade de modificar estes projetos, para melhoria dos sistemas existentes. Além disso, existe a tendência atual de construção de estruturas cada vez mais leves, esbeltas e complexas, o que requer estudos cada vez mais detalhados de projeto. Em todas estas situações se faz necessário avaliar e quantificar os carregamentos, aos quais a estrutura ou o sistema mecânico está submetido, em suas condições de operação.

O problema de determinação indireta do carregamento axial requer que se disponha de um conjunto de respostas dinâmicas (frequências e/ou modos naturais de vibração, funções de resposta em frequência, por exemplo) e um modelo matemático relacionando as cargas externas e as respostas dinâmicas do sistema estrutural. Busca-se então formular o problema inverso de identificação resolvendo-se um problema de otimização não linear em que as variáveis de projeto são as cargas externas desconhecidas e a função objetivo representa a diferença entre as respostas dinâmicas medidas sobre a estrutura carregada e as correspondentes previsões do modelo matemático. O processo pode ser entendido como um problema de identificação paramétrica baseado em ajuste de modelos. O livro de Friswell e Mottershead (1995) fornece um abrangente apanhado da teoria e das aplicações deste tipo de estratégia.

O tratamento de problemas inversos comporta, invariavelmente, algumas dificuldades intrínsecas, dentre as quais se podem citar:

- a) a precisão dos resultados da identificação é determinada pela precisão do modelo matemático disponível;
- b) do ponto de vista numérico, os problemas de identificação são geralmente mal condicionados, o que significa que sua solução apresenta-se muito sensível à presença de incertezas e ruídos que, inevitavelmente, contaminam os dados experimentais utilizados;
- c) por razões de natureza prática, os dados experimentais utilizados são invariavelmente incompletos, tanto no sentido espacial (respostas conhecidas em um número limitado de posições), quanto no aspecto espectral (respostas determinadas em uma banda de frequências). Consequentemente, a unicidade da solução não pode ser assegurada.

As especificidades encontradas na situação considerada no estudo realizado no âmbito do projeto de pesquisa em apreço levam a dificuldades adicionais, destacando-se:

- a) a necessidade de inclusão dos efeitos da interação-fluido estrutura no modelo estrutural a ser utilizado no procedimento de identificação;
- b) a necessidade de utilização de procedimentos experimentais específicos, capazes de acomodar medições em ambiente submerso, sem conhecimento prévio das cargas de excitação da estrutura submersa.

Com o desenvolvimento deste trabalho almeja-se a especificação de um procedimento híbrido numérico-experimental capaz de identificar a carga axial a que uma estrutura mecânica submersa está submetida, para diferentes tipos de vinculação, a partir da análise das respostas vibratórias da estrutura, obtidas experimentalmente. Desta forma, a metodologia proposta deverá ser capaz de lidar com ajustes de parâmetros que possibilitem, por exemplo, modelar a rigidez da condição de vinculação do tipo engaste, uma vez que, na prática, a hipótese de deslocamento nulo para este tipo de vinculação não é verificada (sempre há deslocamentos, por menores que sejam).

Embora seja possível a modelagem de vigas incluindo a influência de cargas axiais com base na teoria da dinâmica de meios contínuos, que leva à representação das equações do movimento por uma equação diferencial parcial (VIRGIN, 2007), adota-se, neste projeto de pesquisa a modelagem aproximada pelo método de elementos finitos (MEF), com as seguintes justificativas para esta escolha:

1ª) Embora o MEF seja uma técnica de aproximação, pode-se obter qualquer nível de precisão desejada com o refinamento da malha de discretização;

2ª) O MEF permite maior flexibilidade de modelagem, sem dificuldades operacionais consideráveis, no tocante a diferentes formas de carregamento e/ou condições de contorno. Em particular, a consideração de apoios flexíveis e base elástica podem ser facilmente acomodadas.

O procedimento de modelagem por elementos finitos é aqui realizado utilizando a teoria de Euler-Bernoulli para elementos de viga bidimensionais. Esta teoria é fundamentada nas seguintes hipóteses:

a) as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao seu eixo neutro;

b) negligenciam-se as deformações devidas ao cisalhamento e a inércia de rotação das seções transversais.

Para a modelagem do efeito de enrijecimento por tensões, o presente trabalho fará uso da proposta feita em Flores (2002). Neste trabalho o autor faz um estudo numérico de enrijecimento por tensões em vigas planas, pórticos e placas paralelas. Os resultados obtidos numericamente para vigas planas e para o pórtico são comparados com resultados de simulações numéricas utilizando o software Ansys, enquanto que os resultados para a placa plana são confrontados com resultados obtidos experimentalmente em laboratório. Em ambas as abordagens os resultados se mostram em concordância com as bases de dados confrontadas.

Em termos de modelagem do efeito interação fluido-estrutura, a proposta inicial é considerar o fluido ao redor da estrutura inicialmente em repouso. O escoamento se dá devido à vibração da estrutura, considerado com sendo irrotacional, isotérmico e incompressível, (PAVANELLO, 1991). Como a estrutura induz movimento no fluido, o fluido por sua vez altera a vibração da estrutura. Este efeito é bem conhecido na literatura e é comumente interpretado como sendo um acréscimo de inércia na estrutura, podendo ser caracterizado como uma massa adicionada a este sistema (CONCA, OSSES, PLANCHARD, 1997; KJELGREN e HYVÄRINEN, 1998; NAKAMURA, IROTA, WATANABE, 2002; SINHA, SINGH, RAO, 2003; ISHIHARA e YOSHIMURA, 2005; UCHYIAMA, 2003; BRAUNAWRUCH, 2009). Partindo as hipóteses iniciais, a partir das equações de conservação de massa, energia e quantidade de movimento, na forma bidimensional, a modelagem do domínio do fluido recai na equação de Helmholtz (EVERSTINE, 1995). A discretização do domínio do fluido pode então ser feita por elementos finitos, utilizando a técnica dos Resíduos Ponderados e o método de aproximação de Galerkin (PAVANELLO, 1991), onde as equações para o domínio do fluido e da estrutura são acopladas através da criação de elementos de acoplamento entre os modelos. Sendo assim, os resultados são obtidos para os dois sistemas (fluido e estrutura) acoplados. Esta abordagem de solução de problema de interação fluido-estrutura é também conhecida como two-way (FELIPPA e PARK, 2004).

A fim de contemplar tanto os efeitos de enrijecimento por tensões quanto o efeito de interação fluido-estrutura, o presente trabalho propõe combinar as duas metodologias citadas anteriormente, que são apresentadas na sequência deste capítulo.

3.1. Modelagem dos efeitos da carga axial

É sabido que a teoria de Euler-Bernoulli é adequada para a representação do comportamento dinâmico de vigas esbeltas, cujo comprimento é muito maior que as dimensões das seções transversais, e no domínio de baixas frequências. Fora destes casos, deve-se fazer uso da teoria de vigas de Timoshenko, a qual considera os efeitos secundários associados às deformações de cisalhamento e à inércia de rotação das seções transversais (RADE, 1987).

Considere-se o elemento genérico de viga, representado na Figura 3.1, contendo dois nós e três graus de liberdade por nó.

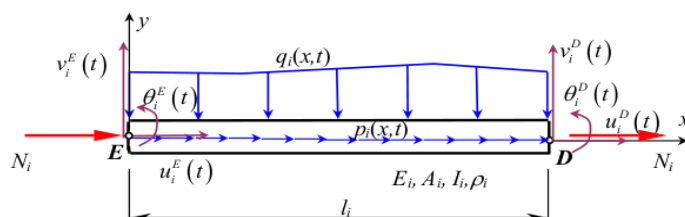


Figura 1 - Elemento de viga Euler-Bernoulli, adaptado de Rade (2003).

Na figura acima, $u_i^E(t)$ e $u_i^D(t)$ são os deslocamentos nodais longitudinais, $v_i^E(t)$ e $v_i^D(t)$ são os deslocamentos nodais transversais, $\theta_i^E(t)$ e $\theta_i^D(t)$ são as rotações das seções transversais nas extremidades esquerda e direita do elemento, respectivamente, l_i é o comprimento do elemento, E_i é o módulo de elasticidade do material, A_i é a área da seção transversal, I_i é o momento de inércia da área da seção transversal em relação ao seu eixo centroidal perpendicular ao plano da figura, ρ_i é a densidade do material. Além disso, $p_i(x,t)$ é o carregamento longitudinal distribuído e $q_i(x,t)$ é o carregamento transversal distribuído, ambos representados em termos de força por unidade de comprimento.

Designam-se genericamente os campos de deslocamento e rotação ao longo do elemento como segue:

- $u_i(x,t)$: campo de deslocamentos longitudinais ao longo do elemento i;
- $v_i(x,t)$: campo de deslocamentos transversais ao longo do elemento i;
- $\theta_i(x,t)$: campo de rotações das seções transversais ao longo do elemento i.

Devido ao fato de que os deslocamentos longitudinais são independentes dos demais e sabendo que as rotações e

os deslocamentos transversais relacionam-se segundo $\theta_i(x,t) = \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x}$, pode-se analisar separadamente o movimento longitudinal e o movimento transversal.

3.1.1. Equações para o movimento transversal

Para a obtenção das equações diferenciais do movimento da estrutura, empregam-se as equações de Lagrange ao movimento transversal da viga:

$$\frac{\partial L_i^s}{\partial \{\dot{\delta}_i(t)\}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i^s}{\partial \{\dot{\delta}_i(t)\}} \right) = 0, \quad (3.1)$$

em que L_i^s é o Lagrangeano, obtido da forma:

$$L_i^s = T_i^s - V_i^s, \quad (3.2)$$

T_i^s é a energia cinética da estrutura e V_i^s é a energia potencial total da estrutura, ambas associadas ao movimento transversal da viga.

Para obtenção das equações da energia cinética e potencial total, associadas ao movimento transversal, admite-se que o elemento seja solicitado na direção axial por forças concentradas constantes (estáticas)

aplicadas nos nós, as quais são denotadas por N_i na Figura 3.1. O campo de deslocamentos transversais é então aproximado por uma função de interpolação cúbica da forma:

$$v_i(x,t) = \phi_1(x)v_i^E(t) + \phi_2(x)\theta_i^E(t) + \phi_3(x)v_i^D(t) + \phi_4(x)\theta_i^D(t). \quad (3.3)$$

Introduzindo a notação matricial, a Equação 3.3 assume a forma:

$$v_i(x,t) = [\phi_i(x)]\{\delta_i(t)\}, \quad (3.4)$$

em que

$$\{\delta_i(t)\} = [v_i^E(t) \quad \theta_i^E(t) \quad v_i^D(t) \quad \theta_i^D(t)]^T \quad (3.5)$$

é o vetor formado pelos graus de liberdade nodais e

$$[\phi(x)] = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x)] \quad (3.6)$$

é a matriz das funções de interpolação, ou funções de forma, dadas por (CRAIG JR. e KURDILA, 2006).

A expressão da energia potencial total associada aos deslocamentos transversais, levando em conta o acoplamento entre a solicitação axial e a flexão é dada por Chajes (1974):

$$V_i^s(t) = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} E_i I_i \left[\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 - q_i(x,t) v_i(x,t) - \frac{N_i}{2} \left[\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} \right]^2 \right\} dx \quad (3.7)$$

Utilizando a notação matricial e introduzindo a aproximação (3.3) à equação anterior, conduz-se à seguinte expressão:

$$V_i^s(t) = \frac{1}{2} \{ \delta_i(t) \}^T [K_i^s] \{ \delta_i(t) \} - \{ \delta_i(t) \}^T \{ Q_i(t) \}, \quad (3.8)$$

em que

$$\{ Q_i(t) \} = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad q_3(t) \quad q_4(t)]^T, \quad (3.9)$$

$$[K_i^s] = [K_i^E] + [K_i^G], \quad (3.10)$$

com:

$$q_r(t) = \int_0^L q_r(t) \phi_r(x) dx \quad \text{para } r = 1, 2, 3, 4, \quad (3.11)$$

$$K_{rs}^E(t) = \int_0^L E_r I_r \phi_r''(x) \phi_s''(x) dx \quad \text{para } r, s = 1, 2, 3, 4 \text{ e} \quad (3.12)$$

$$K_{rs}^G(t) = \int_0^L N_r \phi_r'(x) \phi_s'(x) dx \quad \text{para } r, s = 1, 2, 3, 4. \quad (3.13)$$

Para as equações supracitadas, $[K_i^E]$ é a matriz de rigidez dita estrutural e $[K_i^G]$ é a chamada matriz de rigidez geométrica, sendo esta última associada à influência do carregamento axial sobre a rigidez à flexão, representando, portanto, o efeito do enrijecimento por tensões.

Negligenciando a inércia de rotação das seções transversais, a energia cinética associada ao deslocamento transversal é dada pela equação (Craig Jr. e Kurdila, 2006):

$$T_i^s(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_i \left(\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (3.14)$$

Combinando as equações (3.11) e (3.29) obtém-se:

$$T_i^s(t) = \frac{1}{2} \{ \dot{\delta}(t) \}^T [M_i^s] \{ \dot{\delta}(t) \} \quad (3.15)$$

em que

$$[M_i^s] = \int_0^L [\phi(x)]^T [\phi(x)] dx, \quad (3.16)$$

com

$$(M_i^s)_{rs} = (M_i^s)_{sr} = \rho_i \int_0^L \phi_r(x) \phi_s(x) dx. \quad (3.17)$$

Empregando-se as equações (3.7) e (3.14) e efetuando as derivações indicadas em (3.1), obtêm-se as equações do movimento em nível elementar:

$$[M_i^s] \{ \ddot{\delta}(t) \} + [K_i^s] \{ \delta_i(t) \} = \{ Q_i(t) \}. \quad (3.18)$$

3.1.2. Análise modal

A fim de se obter as frequências naturais e respectivos modos de vibração da viga, a análise modal numérica é realizada mediante a resolução do seguinte problema de autovalor:

$$([K_{II}] - \lambda_r [M_{II}]) \{ \Delta_r \} = \{ 0 \}, \quad (3.19)$$

com

$$[K_{II}] = [K_{II}^E] + [K_{II}^G] \quad (3.20)$$

A resolução numérica de (2.77) conduz aos autovalores λ_r que fornecem as frequências naturais e aos autovetores $\{\Delta_r\}$ fornecem os modos de vibração correspondentes.

3.2. Modelagem do efeito de massa adicionada

Como fora mencionado, para a resolução do problema de interação fluido-estrutura, de forma acoplada (abordagem two-way), é necessário utilizar três conjuntos de equações. O primeiro deles é utilizado para modelar a estrutura, construído a partir das equações da Teoria da Elasticidade Linear. O segundo, para modelar o comportamento do fluido, é obtido a partir da manipulação das equações da Fluidodinâmica. O terceiro é utilizado para fazer o acoplamento entre as equações do fluido e da estrutura. Tais equações se fazem necessárias para correlacionar as variáveis independentes das equações do domínio do fluido com as do domínio da estrutura, que não são as mesmas.

O primeiro conjunto de equação, utilizado para modelar o comportamento da estrutura, já fora apresentado anteriormente neste capítulo. O segundo e terceiro conjunto serão apresentados a seguir, cujas formulações foram inspiradas no trabalho de Pavanello (1991).

3.2.1. Modelagem do fluido

Para a modelagem do domínio fluido, adotam-se as seguintes hipóteses:

- Escoamento irrotacional
- Condições isotérmicas
- Densidade constante

Com estas hipóteses, a aplicação conjunta das leis de conservação de massa, conservação de energia e conservação de quantidade de movimento conduz às equações locais de um fluido compressível sob a forma:

$$\nabla p + \rho_f \dot{p} = 0, \text{ em } V_f; \quad (3.21.a)$$

$$\frac{1}{c} \dot{p} + \rho_f \nabla v = 0, \text{ em } V_f, \quad (3.21.b)$$

onde $p = p(x, y, z, t)$ e $v = v(x, y, z, t)$ designam, respectivamente, os campos de pressão e velocidade do domínio fluido e c é a velocidade do som no meio fluido.

Eliminando a velocidade nas equações (3.21), chega-se à conhecida equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0, \text{ em } V_f. \quad (3.22)$$

A equação (3.22) deve ser resolvida de modo a satisfazer um dado conjunto de condições de contorno, que são detalhadas a seguir:

- Superfície livre. Em uma superfície livre ocorrem ondas de gravidade e cria-se uma pressão hidrostática não nula. Esta situação é representada pela equação:

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{1}{g} \ddot{p} = 0, \text{ em } \Gamma_{SL}; \quad (3.23.a)$$

- Superfície rígida. Em uma superfície rígida, tem-se a condição:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \text{ em } \Gamma_{SR}; \quad (3.23.b)$$

- Superfície limite no infinito. As ondas de pressão não são refletidas e vale a condição de radiação de Sommerfeld:

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{1}{c} \dot{p} = 0, \text{ em } \Gamma_{\infty}; \quad (3.23.c)$$

- Interface fluido-estrutura. A velocidade normal à superfície de interface é igual à velocidade do sólido na mesma direção:

$$-\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial n} = \ddot{d}_n, \text{ em } \Gamma_I. \quad (3.23.d)$$

Para a resolução aproximada da equação (3.22), emprega-se a técnica dos Resíduos Ponderados, definindo-se as funções-resíduo:

$$R_i(t) = \int_{V_f} \psi_i \left(\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} \right) dV = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

onde $\psi_i = \psi_i(x, y, z)$ são funções de ponderação.

Efetuada a integração por partes em (3.24), obtém-se:

$$-\int_{V_f} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dV + \int_{\Gamma_f} \psi_i \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{c^2} \int_{V_f} \psi_i \ddot{p} dV = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

Associando as condições de contorno (3.23) à equação (3.25), escreve-se:

$$\int_{\Gamma_f} \psi_i \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{g} \int_{\Gamma_{SL}} \psi_i \ddot{p} d\Gamma - \frac{1}{c} \int_{\Gamma_\infty} \psi_i p d\Gamma - \rho_f \int_{\Gamma_I} \psi_i \ddot{d}_n d\Gamma, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26.a)$$

e:

$$\begin{aligned} & -\int_{V_f} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dV - \frac{1}{c^2} \int_{V_f} \psi_i \ddot{p} dV - \frac{1}{g} \int_{\Gamma_{SL}} \psi_i \ddot{p} d\Gamma \\ & - \frac{1}{c} \int_{\Gamma_\infty} \psi_i p d\Gamma - \rho_f \int_{\Gamma_I} \psi_i \ddot{d}_n d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.26.b)$$

Após a imposição da condição de nulidade do resíduo ponderado total, chega-se às seguintes equações globais para o movimento do fluido:

$$\left[E_f \right] \left\{ \ddot{p}(t) \right\} + \left[D_f \right] \left\{ \dot{p}(t) \right\} + \left[H_f \right] \left\{ p(t) \right\} = -\rho_f \left[L_I \right]^T \left\{ \ddot{d}_n(t) \right\}, \quad (3.27)$$

onde:

$$\left[E_f \right]_{(N_f \times N_f)} = \sum_{i=1}^{n_{ef}} \left[\Pi^{(i)} \right]^T \left[E_f^{(i)} \right] \left[\Pi^{(i)} \right]; \quad (3.28.a)$$

$$\left[D_f \right]_{(N_f \times N_f)} = \sum_{i=1}^{n_{ef}} \left[\Pi^{(i)} \right]^T \left[D_f^{(i)} \right] \left[\Pi^{(i)} \right]; \quad (3.28.b)$$

$$\left[H_f \right]_{(N_f \times N_f)} = \sum_{i=1}^{n_{ef}} \left[\Pi^{(i)} \right]^T \left[H_f^{(i)} \right] \left[\Pi^{(i)} \right] \text{ e} \quad (3.28.c)$$

$$\left[L_I \right]_{(N_s \times N_f)} = \sum_{i=1}^{n_{ei}} \left[\Delta^{(i)} \right]^T \left[L_I^{(i)} \right] \left[\Pi^{(i)} \right]. \quad (3.28.d)$$

Nas equações acima N_f é o número total de graus de liberdade associado ao domínio fluido e N_s é o número total de graus de liberdade associado ao domínio sólido.

3.2.2. Modelagem do acoplamento fluido-estrutura

Combinando as equações para a estrutura (3.18) e para o fluido (3.27), obtém-se o seguinte conjunto de equações acopladas, envolvendo os campos de deslocamento do domínio estrutural e o campo de pressão do domínio fluido:

$$\begin{bmatrix} [M_s] & [0] \\ \rho_f [L_I]^T & [E_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\delta}(t)\} \\ \{p(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [D_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}(t)\} \\ \{\dot{p}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_s] & -[L_I] \\ [0] & [H_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta(t)\} \\ \{p(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

O sistema de equações diferenciais (3.29) deve ser resolvido para determinação dos campos de deslocamento e de pressão.

3.2.3. Problema de hidroelasticidade

Se o fluido for considerado incompressível ($c \rightarrow \infty$) e negligenciado a ocorrência de ondas de superfície ($[E_f] = [0]$) e de efeitos dissipativos ($[D_f] = [0]$), tem-se o problema hidroelástico clássico, representado pelo sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} [M_s] & [0] \\ \rho_f [L_f]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\delta}_s(t)\} \\ \{p(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}_s(t)\} \\ \{\dot{p}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_s] & -[L_f] \\ [0] & [H_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_s(t)\} \\ \{p(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q_s(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Neste caso, é possível condensar as equações, por meio da eliminação das coordenadas associadas ao campo de pressão, o que conduz ao seguinte sistema de equações do movimento, exclusivamente em termos do campo de deslocamentos da estrutura:

$$([M_s] + [M_a])\{\ddot{d}_s(t)\} + [K_s]\{d_s(t)\} = \{Q_s(t)\} \quad (3.31)$$

em que

$$[M_a] = \rho_f [L_f] [H_f]^{-1} [L_f]$$

define a chamada matriz de massa adicionada, a qual representa o efeito de inércia associado à interação fluido-estrutura.

A resolução do problema de autovalor associado a (3.31):

$$([K_s] - \omega_i^2 ([M_s] + [M_a]))\{D_s\} = \{0\} \quad (3.32)$$

permite obter as auto-soluções:

- $\omega_i^2, i = 1, 2, \dots$: frequências naturais
- $\{D_s\}, i = 1, 2, \dots$: modos naturais de vibração

4. MODELAGEM EXPERIMENTAL

O presente trabalho prevê a necessidade de se construir uma bancada experimental, Figura 3.7, onde serão feitos os ensaios para a obtenção da resposta dinâmica da estrutura submersa, dados estes a partir dos quais será resolvido o problema inverso de identificação das cargas sob as quais esta estrutura está sujeita.

Como fora comentado, o presente trabalho se insere dentro de um projeto de pesquisa em parceria com a empresa PETROBRAS, a qual tem a necessidade de identificação das cargas axiais a que os seus dutos de extração de gás (gasodutos) estão submetidos, na condição de operação, instalados no leito marinho ao longo da costa brasileira. Por este motivo, a estrutura a ser estudada será um duto, e as condições em laboratório deverão ser tais que permitam extrapolar os resultados de laboratório para as estruturas reais.

Para a avaliação do comportamento desta estrutura, a mesma deverá ser instalada sobre suportes que permitam as condições de vinculação biengastada e birrotulada, e permitir a aplicação de força axial, para diferentes níveis de força. O conjunto estrutura-suportes deverá ser instalado dentro de um reservatório a fim de permitir que os testes sejam feitos na condição submersa. O reservatório será preenchido com fluido (água), o qual terá movimento somente no caso devido à vibração da estrutura.

A bancada experimental será instrumentada para a realização dos ensaios com as estruturas-testes imersas. Os principais elementos da cadeia de medição serão:

- o sistema mecânico para aplicação de excitação por impacto;
- o célula de carga piezelétrica para medição da força de impacto;
- o célula de carga extensométrica para medição da força axial;
- o extensômetros elétricos de resistência para medição indireta da força axial ao longo do comprimento da estrutura-teste;
- o acelerômetros piezelétricos para medição das respostas vibratórias;
- o condicionadores de sinais das células de carga e dos acelerômetros;
- o sistema de aquisição de dados estáticos e dinâmicos baseado em plataforma LabView®.

O modelo proposto no Capítulo 3.1 será utilizado para a previsão dos níveis de cargas necessários para os ensaios nos ensaios experimentais bem como permitirá prever uma a banda de frequências envolvidas nos testes. Tais previsões permitirão projetar a bancada experimental de forma adequada, especificar os acelerômetros e outros sensores que serão utilizados.

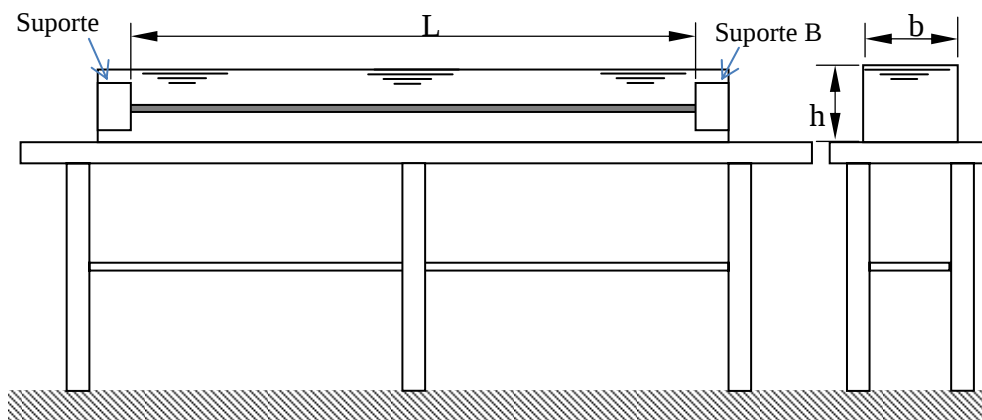


Figura 2 – Representação esquemática da abancada experimental a ser construída.

Com a construção e instrumentação da bancada, um conjunto de ensaios experimentais será realizado para a obtenção de frequências naturais da estrutura-teste submetida a diferentes condições, no tocante às condições de vinculação e valores das forças axiais aplicadas. Para cada ensaio, as frequências naturais serão obtidas a partir das respostas ao impacto utilizando técnicas tradicionais e não convencionais de Análise Modal Experimental.

As frequências naturais obtidas experimentalmente serão utilizadas em associação com os métodos de identificação implementados. A exatidão dos resultados de identificação serão validados mediante comparação com os valores medidos das forças axiais e com os valores conhecidos das flexibilidades dos vínculos (no caso da viga com molas rotacionais).

5. RESULTADOS

No que se diz respeito à abordagem numérica do projeto, ambas as metodologias, tanto para a modelagem do efeito da carga axial, tanto para a adição dos efeitos de massa adicionada devido a presença do fluido ao redor do tubo foram implementadas, utilizando discretização por elementos finitos, utilizando o software Matlab.

Testes foram feitos utilizando o modelo de enrijecimento por tensões e os resultados foram satisfatórios, indicando que a curva obtida tem o comportamento previsto por Bahra e Greening (2009). A metodologia utilizada para a modelagem da presença do fluido, embora implementada ainda não fora testada e comparada com resultados experimentais.

Para a identificação da carga axial foi utilizado uma *Toolbox* do Matlab, desenvolvida por um grupo de pesquisadores do LMEst. Dentre os diversos métodos disponíveis nesta *Toolbox* para solução de problemas inversor foi escolhido o método denominado Evolução Diferencial, método este baseado em Algoritmos Genéticos, proposto por Storm e Price (1995). A metodologia foi testada e se mostrou capaz de identificar a carga axial necessária para obter um conjunto de frequências naturais fornecidas à rotina numérica (previamente obtidas pelo modelo numérico implementado para resolução de análise modal da estrutura, utilizando uma carga axial arbitrária). O procedimento utilizado para validação da rotina de identificação da carga axial é mostrado na forma esquemática pela Figura abaixo.

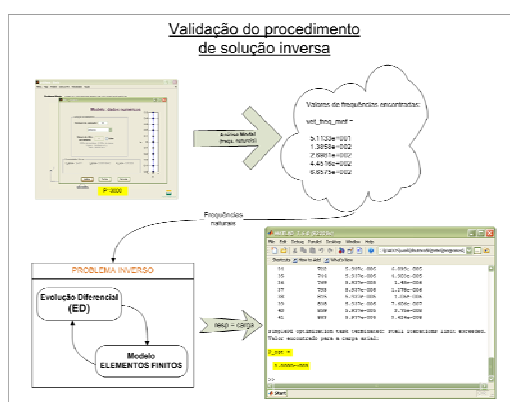


Figura 3 – Representação esquemática do procedimento de avaliação do método Evolução Diferencial utilizado para a identificação da carga axial aplicada à estrutura mecânica.

O aparato experimental foi totalmente desenvolvido e está instalado nas novas instalações do Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. J. E. T. Reis. Apenas pequenos ajustes estão sendo executados à medida que necessidades específicas são identificadas. Consiste basicamente de um reservatório projetado para condicionar um tubo de diâmetro

fixo de 33,4 mm de diâmetro externo, que pode assumir duas condições de vinculação (engastado e rotulado), ao qual pode ser aplicado uma carga de intensidade de até 1,0 ton.

Para suportar esta carga o tubo com o sistema de aplicação de carga foi montado sobre um perfil de alumínio comercial, devidamente projetado para suportar os esforços envolvidos. Para controlar a condição de rotulação ao qual o tubo é submetido é feito utilizando dois mancais do tipo bucha. Com um parafuso, colocado na bucha mais interna (mais próxima do centro do comprimento do tubo), o tubo tem a liberdade de giro neste mancal, o que dá a condição de rotulado. Com dois parafusos, um em cada mancal, no mesmo apoio, restringe-se o movimento do tubo ao longo do comprimento do apoio, representando então a condição engastada. A Figura 4 mostra as situações supracitadas, além de um corte em perspectiva do perfil de alumínio utilizado no projeto para suportar os esforços que surgem devido a aplicação da carga axial.

A intensidade da carga é monitorada por uma célula de carga com indicador, instalada entre o sistema de aplicação de carga e um dos apoios do tubo e também por um *strain gages* instalados na superfície do tubo. Os *strain gages* são necessários para monitoramento da carga na situação em que a estrutura se encontra submersa, situação esta em que a célula de carga será retirada do sistema. Para este propósito foram instalados dois *strain gages*, na linha neutra do tubo, na metade do comprimento do tubo, e a leitura dos mesmos é feita utilizando-os em paralelo a fim de minimizar desvios devido a erro de posicionamento e variação de espessura do tubo ao longo da sua circunferência. O sistema simples de aplicação de carga axial feito mediante o princípio de funcionamento de esticadores de cabos. A Figura 5 mostra os detalhes do aparato experimental, supracitados.

Quanto aos ensaios experimentais, os primeiros a serem realizados são aqueles necessários para a calibração do *strain gages*. Para este ensaio foi tido como valores padrão os mostrados pelo indicador da célula de carga (que por sua vez fora previamente calibrada pela empresa fornecedora do equipamento). A Tabela 1 mostra os resultados obtidos para cada nível de carga escolhido, de forma arbitrária, enquanto a Figura 6 mostra a curva de calibração obtida.

Tabela 1. Dados da calibração dos *strain gages*.

Nº do ensaio	Força Célula de carga [N]	Força SG [N]	Dif rel [%]
1	0	0,000	
2	-200	208,990	-4,50 %
3	-400	404,919	-1,23 %
4	-600	620,440	-3,41 %
5	-800	842,493	-5,31 %
6	-1000	1058,014	-5,80 %
7	-1500	1515,181	-1,01 %
8	-2000	1991,940	0,40 %
9	-2500	2462,169	1,51 %
10	-3000	2951,990	1,60 %
11	-4000	3918,571	2,04 %
12	-5000	4865,560	2,69 %
13	-6000	5694,990	5,08 %

Foram feitos alguns ensaios dinâmicos para a determinação das frequências naturais do tubo. Para tanto, está sendo utilizada a plataforma Pulse®, da Bruel&Kjaer. Inicialmente foram feitos ensaios sem a aplicação de carga axial. Nesta condição as frequências naturais foram obtidas utilizando duas abordagens.

A primeira delas consiste em realizar um procedimento de análise modal, através de métodos tradicionais. Para tanto, são escolhidos ao longo do tubo pontos para a obtenção das FRF's do sinal da aceleração. Estes pontos foram escolhidos estrategicamente, através de análise numérica utilizando elementos finitos, a fim de se evitar pontos nodais ou pontos de máximos e mínimos. Em um destes pontos é afixado um acelerômetro e, para cada um dos outros pontos, utiliza-se um martelo com um transdutor de força para aplicar um impulso no tubo. Com os sinais da aceleração e da força de impacto podem-se calcular as FRF's para cada ponto de aplicação de força. Foram feitas as medições dos sinais e, através da utilização do software ME'Scope, da Vibrant Technology, pode-se obter numericamente as frequências naturais correspondentes aos dados obtidos, através das curvas das FRF's. Para este caso foram utilizados 6 pontos diferentes para a aplicação da força de impacto, como mostrado na Figura 7.

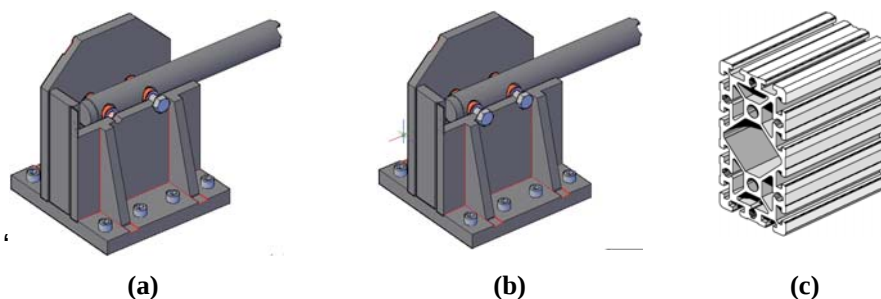


Figura 4 – Bases utilizadas para determinar a condições de vinculação: (a) rotulada; (b) engastado; e (c) seção transversal do perfil estrutural sobre o qual as bases de vinculação são montadas para garantir a rigidez estrutural da bancada.

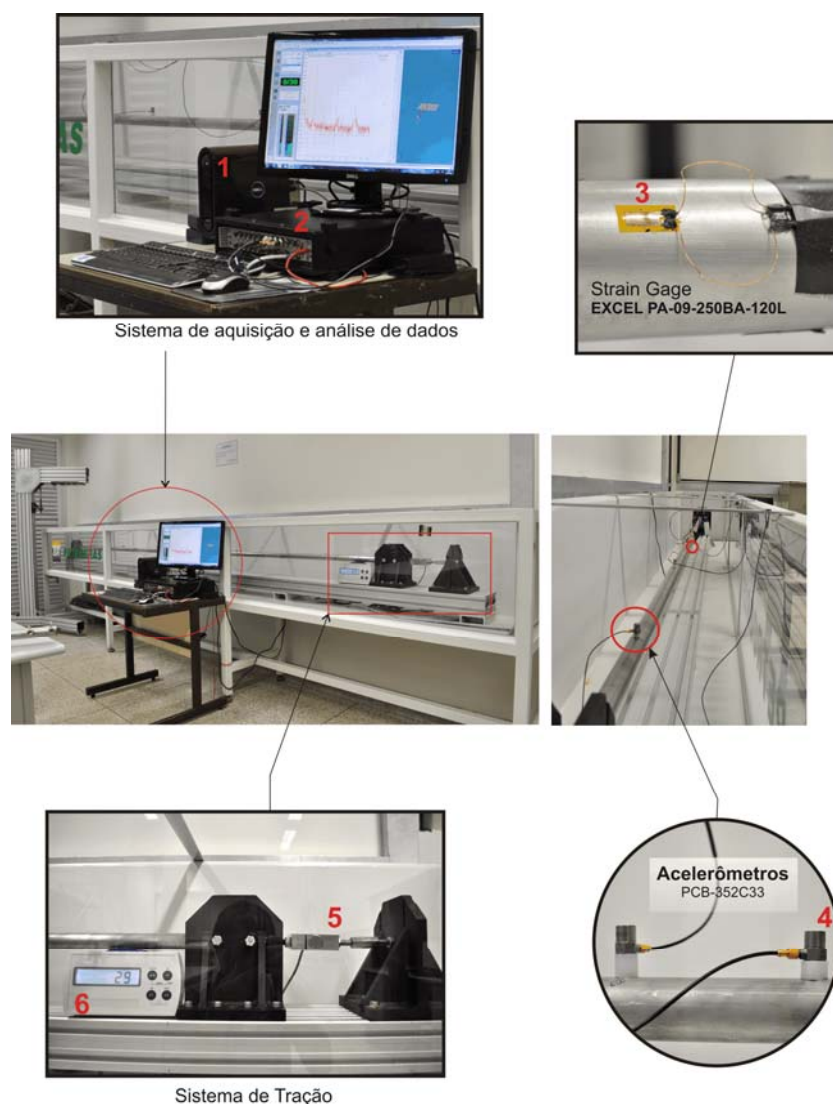


Figura 5 - Bancada experimental com detalhes da instrumentação: (1) Computador som softwares para aquisição e análise de dados experimentais; (2) Plataforma Pulse®, da Bruel&Kjaer para leitura de dados dos acelerômetros, operada por computador; (3) Strain gage para monitoramento de nível de tensão no tubo; (4) Acelerômetros; (5) Célula de carga HBM-1ton; (6) Indicador da célula de carga.

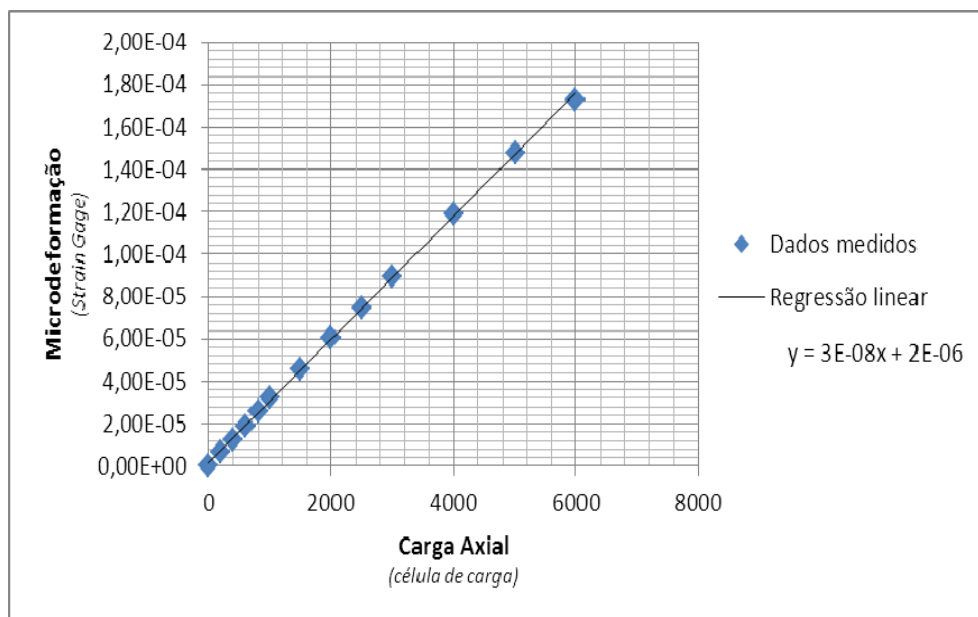


Figura 6 – Gráfico de calibração obtido para os strain gages.

No segundo caso foram estimadas as frequências naturais do tubo utilizando uma metodologia que não faz uso da leitura da força aplicada no tubo. As FRF's são estimadas por esta abordagem utilizando o Software OMA (*Operational Modal Analysis*, desenvolvido pela Bruel&Kjaer) a partir da análise estatística feita somente sobre os dados de aceleração do tubo. Para este caso foram utilizados 4 acelerômetros. Um permanece fixo, no ponto 7 representado na Figura 7, enquanto os outros 3 são posicionados nos pontos de 1 a 3 e posteriormente nos pontos de 4 a 6.

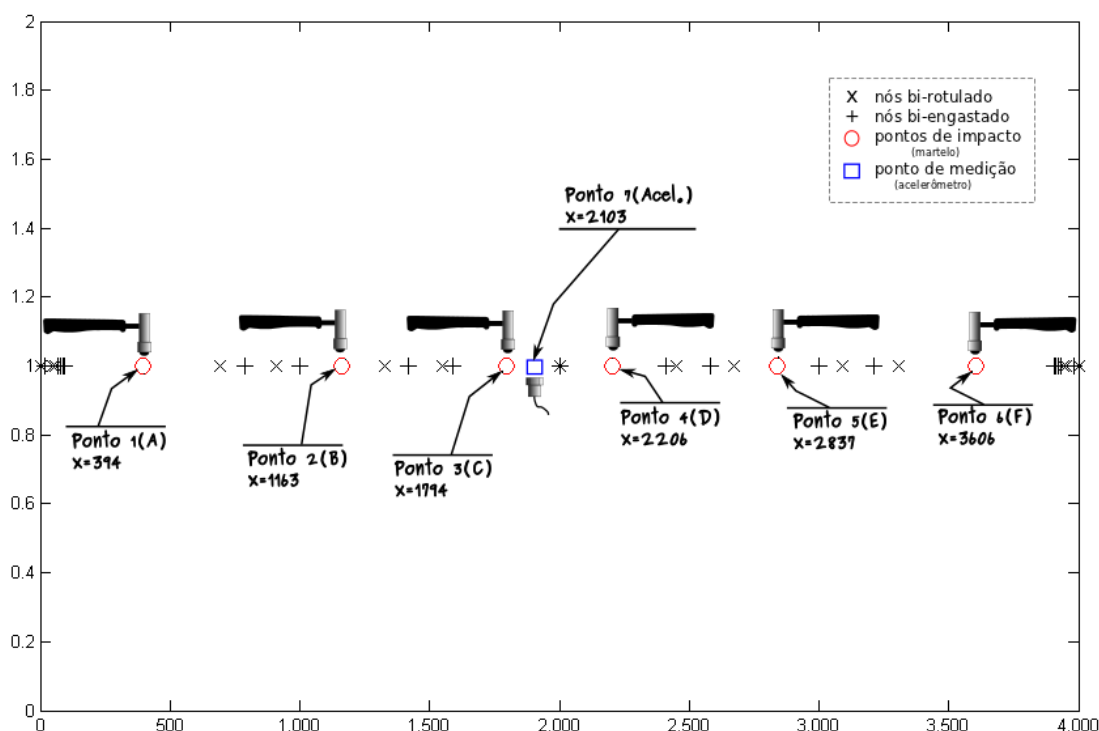


Figura 7 – Representação dos pontos do tubo escolhidos para a obtenção das frequências naturais.

A Figura 8 mostra um recorte da imagem instantânea dos softwares supracitados, com resultados para a situação em que o tubo está bi-engastado e com carga axial nula. Através dos resultados observados nesta figura pode-se notar a boa concordância entre os resultados encontrados utilizando as duas abordagens.

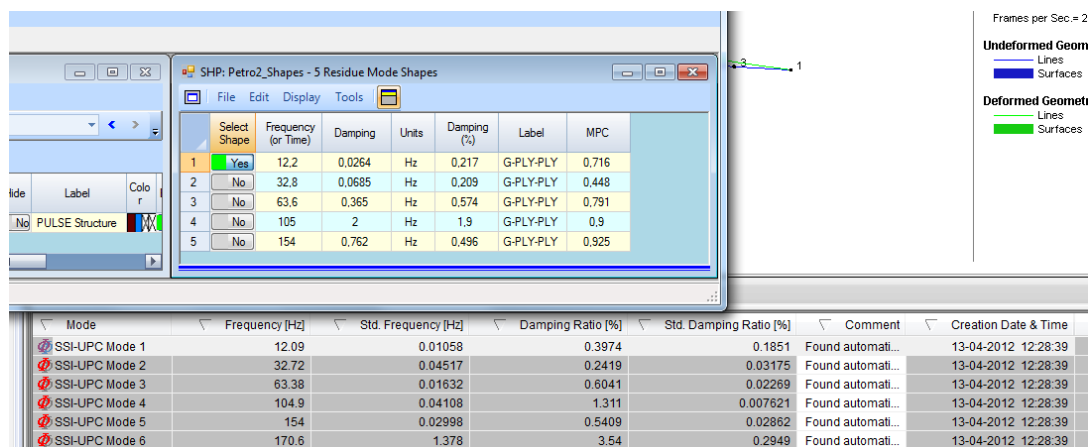


Figura 8 – Imagem instantânea dos softwares utilizados para a resolução da análise modal dos dados experimentais, mostrando os resultados obtidos.

Através da Tabela 2 podem-se comparar os resultados obtidos para as duas metodologias utilizadas com os resultados de simulação numérica. A última coluna mostra os resultados para o modelo numérico ajustado. Isto se faz necessário, pois no modelo experimental as extremidades do tubo são maciça, recurso prático utilizado para poder utilizar a condição de vinculação do tipo engastada, sem danificar o modelo. Maiores detalhes podem ser obtidos no projeto mecânico da bancada, apresentado em relatórios anteriores.

Tabela 2 – Resultados para primeiras 5 FRF's: tubo bi-engastado, carga axial nula.

MEF [Hz]	ME'Scope [Hz]	OMA [Hz]	MEF ajust. [Hz]
14,25	12,20	12,09	12,60
37,05	32,80	32,72	34,73
70,72	63,60	63,38	68,14
115,55	105,00	104,90	112,83
171,87	154,00	154,00	169,06

Finalmente, são mostrados alguns resultados evidenciando o a variação no comportamento dinâmico da estrutura em função da variação da carga axial a que se submete a estrutura, como previsto pela teoria. A tabela 2 mostra as frequências (de primeira a quarta frequências naturais) obtidas variando-se o nível de carga axial aplicada ao tubo, para a condição de vinculação bi-engastada.

Tabela 3 – Resultados obtidos de ensaios dinâmicos: frequências naturais, em Hertz, versus carga axial aplicada ao tubo.

		1ª freq. [Hz]			2ª freq. [Hz]			3ª freq. [Hz]			4ª freq. [Hz]		
		M1	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3
Carga [N]	0	11,87	11,87	11,73	32,72	32,90	32,56	64,39	63,95	63,39	107,84	106,96	105,10
	200	11,99	11,96	11,83	32,90	32,97	32,65	64,57	63,74	63,30	108,04	106,94	105,20
	400	12,12	12,08	11,96	33,07	33,09	32,88	64,76	63,92	63,67	108,24	107,10	106,00
	600	12,24	12,18	12,17	33,24	33,19	33,16	64,95	63,98	64,14	108,44	107,34	106,90
	1000	12,48	12,40	12,18	33,57	33,49	33,18	65,33	64,31	64,22	108,84	107,61	107,00
	1500	12,78	13,02	12,56	33,99	34,52	33,69	65,79	66,03	64,75	109,33	109,14	107,50
	2000	13,06	13,13	12,77	34,40	34,69	34,01	66,26	66,23	65,25	109,83	109,25	107,70
	3000	13,62	13,63	13,36	35,21	35,44	34,83	67,17	67,19	65,95	110,81	110,24	108,80
	4000	14,15	14,16	13,76	35,99	36,20	35,32	68,08	68,13	66,53	111,78	111,15	109,00
	5000	14,66	14,66	14,40	36,76	36,94	35,97	68,97	68,71	66,80	112,75	111,95	108,60

A tendência linear prevista pela teoria é melhor percebida através do gráfico para a primeira frequência natural, mostrado na Figura 9, abaixo:

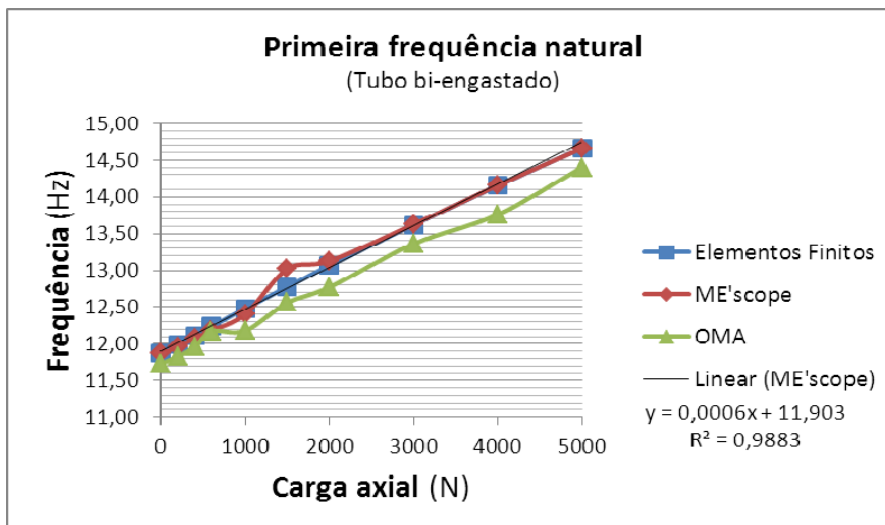


Figura 9 – Gráfico obtido através dos dados da primeira frequência natural do tubo, mostrados na Tabela 3.

A partir da Figura acima é possível notar boa concordância entre os resultados obtidos pelo modelo numérico e os resultados experimentais processados com a metodologia clássica de análise modal (obtidos através do software ME'scope).

Nota-se pelos resultados apresentados que nenhum teste ainda fora feito com a estrutura submersa, ou seja, na presença de fluido. Tais ensaios ainda deverão ser realizados, de acordo com o cronograma proposto no projeto do presente trabalho.

6. CONCLUSÕES

Pode-se concluir sobre os dados e análises anteriormente apresentados que os resultados apresentam boa concordância com os dados de referência previstos pela revisão de literatura. Além disso, pode-se dizer que os dados obtidos experimentalmente estão coerentes com os obtidos pelos modelos numéricos. Se compararmos as metodologias de obtenção das frequências naturais que utilizam a metodologia clássica de análise modal e a metodologia que leva em consideração dados estatísticos obtidos a partir das respostas vibratórias da estrutura, podemos verificar que a metodologia clássica é mais fiel ao modelo de elementos finitos. Isto se deve ao fato de que o modelo numérico não possui leva em consideração modelos determinísticos, mas ambos representam bem o comportamento observado nos ensaios experimentais. Entretanto, os modelos não convencionais são de extrema importância, pois a metodologia clássica muitas vezes é inviável de ser aplicada devido às restrições de acesso à estrutura real. Quanto aos efeitos de interação fluido-estrutura nada se pode dizer, pois ainda não foram feitos nenhum estudo experimental com a estrutura submersa, sendo necessário o avanço no cronograma de atividades do projeto de pesquisa do presente trabalho.

7. AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES, ao CNPq, ao programa de Pós-Graduação pelo apoio e incentivo ao desenvolvimento deste projeto de pesquisa. Agradecemos também aos coordenadores/orientadores deste trabalho, os professores Domingos Alves Rade, Helder Barbieri e Aristeu da Silveira Neto, sem os quais seria impossível a evolução do mesmo.

8. REFERÊNCIAS

- Almeida, S. F. M., Hansen, J. S., 1997, "Enhanced Elastic Buckling Loads of Composite Plates with Tailored Thermal Residual Stresses", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, No. 4, pp. 772–780.
- AXISA, F. "**Modélisation des Systèmes Mécaniques**" – Interactions Fluide Structure. Paris – France: Hermes Science Publications, 2001, Vol. III.
- Bailey, C. D., 1973, "Vibration of Thermally Stressed Plates with Various Boundary Conditions", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 11, pp. 14-19.
- Baruch, M., 1973, "Integral Equations for Nondestructive Determination of Buckling Loads for Elastic Plate and Bars", *Israel Journal of Technology*, Vol. 11, pp. 1-8.
- Chajes, A., 1974, "**Principles of Structural Stability Theory**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- Chu, T. H., 1949, "**Determination of Buckling Loads by Frequency Measurements**", Doctorate Thesis at the California Institute of Technology.
- Craig, R. R. Jr., 1981, "**Structural dynamics: An Introduction to Computer Methods**", New York: John Wiley, 1981, 544 p.
- Craig Jr., R. R. e Kurdila, A. J. "**Fundamentals of Structural Dynamics**", 2.ed., New Jersey – USA: John Wiley & Sons, 2006. 744p.
- Donadon, M. V., Almeida, S. F. M., Faria, A. R., 2002, "**Stiffening Effects on the Natural Frequencies of Laminated Plates with Piezoelectric Actuators**", Composites Part B-Engineering, USA, Vol. 33, No. 5, pp.335 - 342.
- Friswell, M. I., Mottershead, J. E., 1995, "**Finite Element Model Updating in Structural Dynamics**", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 286 p.
- Go, C. G., Liou, C. D., 2002, "Load-response Determination for Imperfect Column Using Vibratory Data", **Journal of Sound and Vibration**, accepted 20 December 2002, in press.
- Greening, P. D., Lieven, N. A. J., Vann, A. M., 1996, "Effect of a Pre-load on The Dynamic Properties of a Simple Structure", **Proceedings of 2nd International Conference, Structural Dynamics Modelling: Test, Analysis, Correlation and Updating**, Cumbria, UK.
- Greening, P. D., Lieven, N. A. J., 1999, "Modeling Dynamic Response of Stressed Structures", **Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference**, Florida, pp. 103-108.
- Greening, P. D., Lieven, N. A. J., 2003, "Identification and Updating of Loading in Frameworks Using Dynamic Measurements", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 260, No. 1, pp.101-115.
- Hernandes, J. A., Almeida, S. F. M., Nabarrete, A., 2000, "**Stiffening Effects on the Free Vibration Behavior of Composite Plates with PZT Actuators**", Composite Structures, Inglaterra, Vol. 49, No. 1, pp. 55–63.
- Huang, L., 1997, "Analysis of Dynamic Stress Responses in Structural Vibration", Proceedings of the 16th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, **Design Engineering Technical Conference**, Sacramento, California.
- Laura, P. A. A., Rossi, R. E., 1989, "On the Relative Accuracy and Relative Difficulties of Vibrations and Buckling Problems of Structural Elements", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 134, No. 3, pp. 381-387.
- Lieven, N. A. J., Greening, P. D., 2000, "**Effect of Experimental Pre-stress and Residual Stress on Modal Behavior**", Philosophical Transactions of Royal Society London A 359, p. 97-11.
- Livingston, T., Béliveau, J. G., Huston, D. R., 1993, "Estimation of Axial Load in Prismatic Members Using Flexural Vibrations", submitted to **Journal of Sound and Vibration**.
- Lurie, H., 1951, "Effective End Restraint of Columns by Frequency Measurements", **Journal of the Aeronautical Sciences**, Vol. 19, pp. 21-22.
- Lurie, H., 1952, "Lateral Vibrations as Related to Structural Stability", **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 19, pp. 195-204.
- MCCONNELL, K. G. ; VAROTO, P. S. . "**Vibration Testing: Theory and Practice**". 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008. v. 1. 652 p.
- Mead, D. J., 2002, "Free Vibrations of Self-strained Assemblies of Beams", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 249, pp. 101-127.
- Mead, D. J., 2003, "Vibration and Buckling of Flat Free-Free Plates Under Non-uniform In-plane. Thermal Stresses", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 260, pp. 141-165.
- Rade, D. A., 1987, "**Vibrações e Estabilidade de Vigas Segundo a Teoria de Timoshenko**", Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José Dos Campos, SP, Brasil.
- Rade, D. A., 1994, "**Correction Paramétrique de Modèles Éléments Finis: Élargissement de l'Espace de Connaissance**", Tese de Doutorado, Université de Franche-COMTÉ, UF-C, Besançon, França.
- Rade, D. A., 2003, "**Método dos Elementos Finitos em Engenharia Mecânica**", Apostila, Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, Brasil.
- Rayleigh, Lord, 1877, "**Theory of Sound**", Vol. 2, 2nd edition, Dover, New York, 1877, 1945 re-issue.
- SILVA, C. W. "**Vibration Damping, Control, and Design**". 2.ed. Flórida – USA: CRC Press Taylor & Francis Group, 2007. 596p.
- Sweet, A. L., Genin, J., Makar, P. F., 1977, "**Determination of Column Buckling Criteria Using Vibratory Data**", Experimental Mechanics, Vol. 177, pp. 385-391.
- Vieira Jr. A. B., 2003, "**Identificação de Tensões em Placas Retangulares a Partir de Respostas Vibratórias, com Aplicação a Tensões Residuais de Soldagem**", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.
- Vieira Jr. A. B., Rade, D. A., 2003, "Identification of Stresses in Plates from Dynamic Responses", Proceedings of IMACXXI - Conference and Exposition on Structural Dynamics, Orlando, USA (CD-ROM).

Virgin, L. N., Plaut, R. H., 1990, "Use of Frequency Data to Predict Buckling", **Journal of Engineering Mechanics**, Vol. 116, pp. 2330-2335.

Virgin, L. N., Plaut, R. H., 1993, "Effect of Axial Load on Forced Vibrations of Beams", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 168, No. 3, pp. 395-405.

Weinstein, A., Chien, W. Z., 1943, "**On the Vibrations of a Clamped Plate Under Tension**", Quaterly of Applied Mathematics, Vol. 1, pp. 61-68.

Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", **Annual Conference of the Applied Mechanics Division**, Purdue University, Lafayette.