

Verificação da conservação de massa em escoamentos bifásicos

Mariana Fernandes dos Santos Villela, marianamat_ufu@yahoo.com.br
Felipe Pamplona Mariano, fpmariano@emc.ufg.br
Aristeu da Silveira Neto, aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo: O método *Front-Tracking*, utilizado para simular escoamentos com duas ou mais fases, se baseia em resolver a dinâmica dos fluidos em uma malha fixa e estacionária, denominado domínio euleriano, e o domínio lagrangiano, que é dado por um conjunto de pontos, os quais são partículas livres, que logicamente conectadas referem-se a interface, a qual é móvel e deformável. A medida que a interface se movimenta a posição destes pontos é modificada, afetando a acurácia dos cálculos. Portanto, no presente trabalho é desenvolvido um método de remalhagem lagrangiana. Além disso, resultados para validação da equidistribuição dos pontos da interface são também apresentados.

Palavras-chave: *Front-Tracking*, escoamentos bifásicos, equidistribuição dos pontos lagrangianos.

1. INTRODUÇÃO

O método *Front-tracking* foi introduzido por Richtmyer and Morton em 1960 e a primeira implementação foi realizada por Glimm e outros pesquisadores em 1980. Desde então, vários estudos tem sido feitos para evolução do método. Atualmente, diversas técnicas do método *Front-tracking* têm sido desenvolvidas.

O método *Front-Tracking* baseia-se em resolver a dinâmica dos fluidos em uma malha fixa e estacionária, domínio euleriano, e o domínio lagrangiano (Fig. 1) é dado por um conjunto de pontos, os quais são partículas livres, que logicamente conectadas definem a interface, a qual é móvel e deformável (TRYVAGSON, 1991). Dessa maneira, a medida que a interface se movimenta a distribuição uniforme destas partículas livres são modificadas, e para manter a acurácia dos cálculos é necessário a redistribuição dos pontos da interface, buscando assim mantê-los uniformemente distribuídos.

Neste trabalho, esta redistribuição dos pontos é feita utilizando a spline cúbica e para validação do método utilizado foram feitos o teste de deslocamento da interface lagrangiana e o teste de *vortex flow*, onde foram feitas análise qualitativas e quantitativas.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

O método ‘Front-tracking’, desenvolvido por Tryggvason e colaboradores, pode ser compreendido como um método híbrido ‘Front-tracking / Front-capturing’, pois existe uma malha estacionária regular ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Fig. 1) para solução da dinâmica dos fluidos e uma malha não-estruturada (Γ , Fig. 1) para representar a interface que se move sobre a malha estacionária. Contudo, ao contrário do método *Front-tracking*, onde cada fase é tratada separadamente, aqui todas as fases são tratadas juntas por um conjunto de equações que governam todo fluido, característica do método *Front-capturing*. Além disso, este método híbrido caracteriza-se pela presença de uma função indicadora, que permite atualizar as propriedades do fluido à medida que a interface se desloca.

Os subdomínios Ω_1 (fase contínua) e Ω_2 (fase dispersa) representam a parte externa e interna da interface, respectivamente. As equações de Navier-Stokes são usadas para modelar e descrever a dinâmica do fluido no domínio Ω e a formulação lagrangiana modela a dinâmica da interface Γ .

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial u_l u_k}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right] \right\} + g_l + \frac{1}{\rho} f_l. \quad (2)$$

onde, ρ e μ são, respectivamente, a massa específica e a viscosidade do fluido, u_l é a componente l do vetor velocidade, p é o campo de pressão, f_l é a componente l do vetor campo de força de interface que atua sobre o escoamento, g_l é a componente l da aceleração gravitacional, e $l = 1, 2$, para problemas bidimensionais.

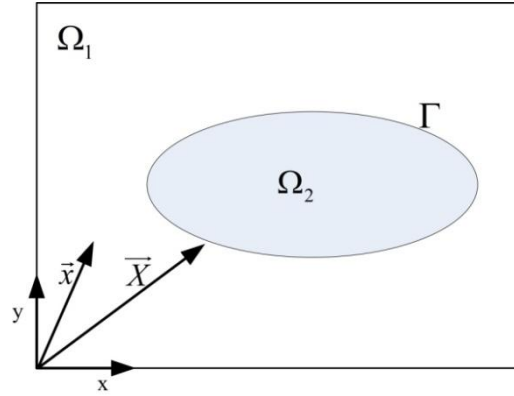


Figura 1: Representação dos domínios euleriano $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, e lagrangiano Γ para um corpo imerso de geometria arbitrária.

Para o cálculo das propriedades físicas da fase contínua, fase dispersa e para região de transição entre ambas as fases utiliza-se relações de interpolações dadas pelas Eqs. 3 e 4:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_c + (\rho_d - \rho_c)I(\vec{x}, t) \quad (3)$$

$$\mu(\vec{x}, t) = \mu_c + (\mu_d - \mu_c)I(\vec{x}, t) \quad (4)$$

onde μ_c e μ_d são os coeficientes de viscosidades e ρ_c e ρ_d são as massas específicas, da fase contínua Ω_1 e dispersa Ω_2 , respectivamente, e $I(\vec{x}, t)$ é a função indicadora (VILLELA, 2011).

O termo fonte f_l (Eq. 5) permite a comunicação entre as equações de Navier-Stokes e as equações para o movimento da interface. Dessa forma, o termo fonte euleriano é diferente de zero sobre a interface e nulo fora da interface. Este comportamento é representado matematicamente usando a função delta de Dirac (δ) (PESKIN, 1977).

$$f_l(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma} F_l(\vec{X}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) d\vec{X}, \quad (5)$$

sendo $F_l(\vec{X}, t) = \sigma \kappa \eta_l$ a componente l da força lagrangiana calculada sobre as partículas de fluido que compõem a interface, x_l é a componente l do vetor posição de uma partícula de fluido no domínio euleriano, X_l é a componente l do vetor posição de uma partícula de fluido que está sobre o domínio lagrangiano, κ é a curvatura da interface, σ é a tensão interfacial e η_l é a componente l do vetor normal a interface.

O movimento da interface é modelado utilizando-se a Eq. 6:

$$\frac{\partial X_l}{\partial t} = U_l(\vec{X}, t), \quad (6)$$

onde $U_l(\vec{X}, t)$ corresponde a componente l do vetor velocidade lagrangiana da interface, calculada interpolando-se as velocidades eulerianas para os pontos lagrangianos.

Durante o escoamento, a interface se deforma e se estende, afetando a distribuição dos pontos lagrangianos, X_l . Geralmente, observa-se que em regiões de alta curvatura os pontos lagrangianos tendem a se aglomerar e, ao contrário, em regiões de menor curvatura, os pontos lagrangianos tendem a distanciar (VILLAR, 2007b). Para manter a acurácia dos cálculos, é necessária uma redistribuição dos pontos na interface, buscando assim mantê-los uniformemente distribuídos.

No presente trabalho utiliza-se a o ajuste de curvas por spline para redistribuir os pontos lagrangianos e tal procedimento é descrito no método numérico.

3. MÉTODO NUMÉRICO

3.1 Domínio Lagrangiano

A discretização das equações que modelam o movimento da interface é realizada em uma malha lagrangiana. Os pontos discretizados são dispostos de maneira que $s_q = q\Delta s$, $q = 1, \dots, N_L$ é a posição dos pontos lagrangianos $X_L(q)$ tal que $\vec{X} = (X(q), Y(q))$, ver Fig. 2.

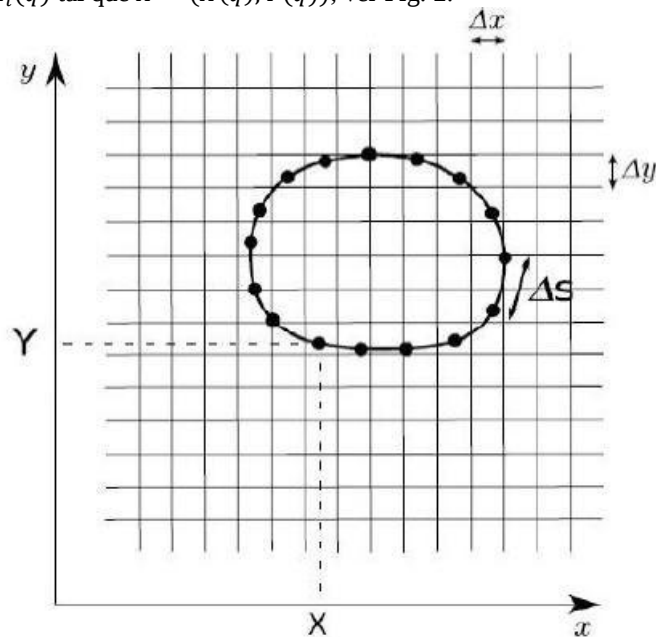


Figura 2: Representação esquemática da malha lagrangiana, sobre os nós de colocação eulerianos.

A malha lagrangiana é definida por N_L pontos, tal que N_L é dependente da malha euleriana. No presente trabalho, adota-se a densidade de dois pontos lagrangianos por célula da malha euleriana, logo define-se:

$$\Delta s = \min\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}\right), \quad (7)$$

$$N_L = \text{int}\left(\frac{L_B}{\Delta s}\right), \quad (8)$$

onde L_B é o perímetro da interface e Δs é definido como o espaçamento da malha lagrangiana. $\min()$ é o mínimo entre os valores Δx e Δy , os quais são os espaçamentos da malha euleriana na direções x e y , respectivamente, e $\text{int}()$ é a parte inteira da divisão.

3.2 Redistribuição dos pontos lagrangianos

A redistribuição dos pontos lagrangianos é composta de duas etapas: a remalhagem e a equidistribuição. Ambos têm por objetivo manter os pontos lagrangianos uniformemente distribuídos, de tal maneira, a obter acurácia dos cálculos, como por exemplo o cálculo da força lagrangiana.

A remalhagem é necessária devido a interface se deformar. Deste modo, para manter uma densidade de dois pontos lagrangianos por célula da malha euleriana é preciso acrescentar ou retirar pontos lagrangianos.

Nota-se, pela Fig. 3, que $\Delta s(q+1) < \Delta s = \min\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}\right)$, logo o ponto (X_{q+1}, Y_{q+1}) está próximo do ponto (X_q, Y_q) , sendo assim, é necessário retirar o ponto (X_{q+1}, Y_{q+1}) , de modo a manter uma densidade de pontos lagrangianos uniforme. Na Fig. 4, observa-se que $\Delta s(q+1) > \Delta s = \min\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}\right)$, assim é

necessário inserir o ponto (X_n, Y_n) . Portanto, os pontos lagrangianos devem se aproximar de uma densidade de dois pontos lagrangianos por célula da malha euleriana.

A posição do ponto lagrangiano que será inserido entre os pontos (X_q, Y_q) e (X_{q+1}, Y_{q+1}) é definido pela spline paramétrica circular local (CHAPRA; CANALE, 1985). Assim, calcula-se a função cúbica $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$ que representa a curva que passa pelos pontos (X_{q-1}, Y_{q-1}) , (X_q, Y_q) , (X_{q+1}, Y_{q+1}) e (X_{q+2}, Y_{q+2}) , e, então define-se $X_n = \frac{X_q + X_{q+1}}{2}$, e Y_n é obtido através da função cúbica calculada pela interpolação spline.

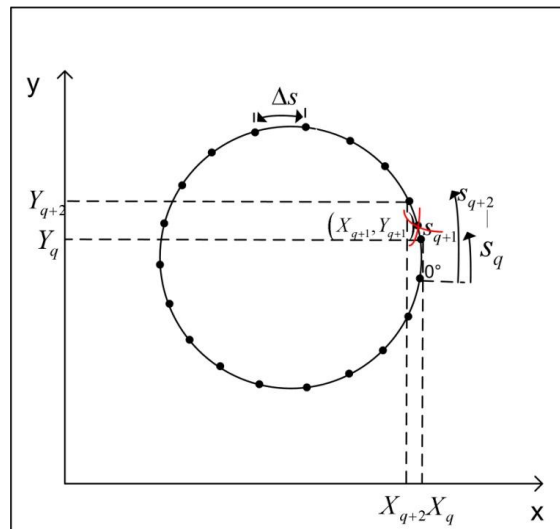


Figura 3: Representação esquemática da remoção do ponto lagrangiano.

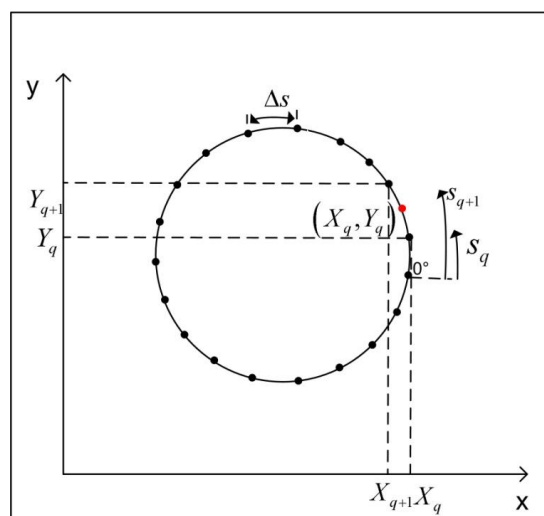


Figura 4: Representação esquemática da inserção do ponto lagrangiano.

Este procedimento garante um $\Delta s = \min\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}\right)$, porém, não garante uma distribuição uniforme dos pontos lagrangianos, o qual é necessário para manter a acurácia dos cálculos, logo é preciso equidistribuir os pontos da interface.

Para equidistribuir tais pontos, após a remalhagem com o novo número de pontos lagrangianos N_L , utiliza-se a técnica da interpolação spline cúbica paramétrica circular. Assim, recalcula-se o novo comprimento de arco L_B , e, a partir daí obtém-se $\Delta s_n = \frac{L_B}{N_L}$. Com o novo parâmetro Δs_n obtém-se um conjunto de funções cúbicas que representam o conjunto de pontos que compõe a interface lagrangiana. Com este procedimento, garante que $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \dots = \Delta s_{N_L}$, isto é, uma distribuição uniforme dos pontos lagrangianos.

4. RESULTADOS

São apresentados dois testes que permitem verificar a eficiência de regularização da malha lagrangiana, o teste de deslocamento da interface lagrangiana e o teste do *vortex flow*.

4.1 Teste de deslocamento da interface lagrangiana

Uma interface lagrangiana é submetida a um campo imposto de velocidade cisalhante de valor unitário em um domínio $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ em uma malha uniforme 512×512 , permitindo que metade da interface se desloque em um sentido e a outra metade para o lado oposto (Fig. 5).

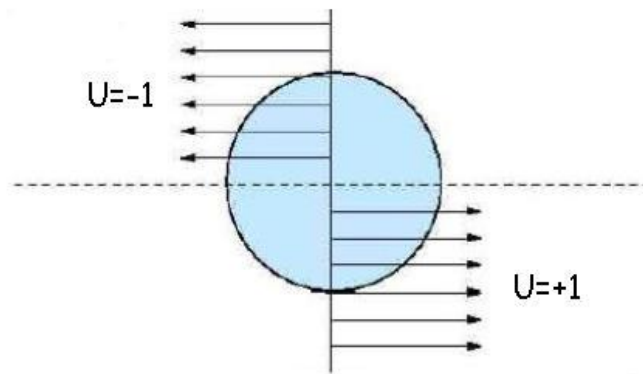


Figura 5: Representação esquemática do teste de deformação da interface lagrangiana.

Na Fig. 6 ilustra, através da função indicadora, a deformação máxima da interface ao longo do tempo. A Fig. 7 mostra a distribuição dos pontos lagrangianos, quando esta é submetida a uma deformação. Nota-se que os pontos são inseridos e redistribuídos, de forma que sua distribuição sobre a interface permanece uniforme ao longo do tempo.

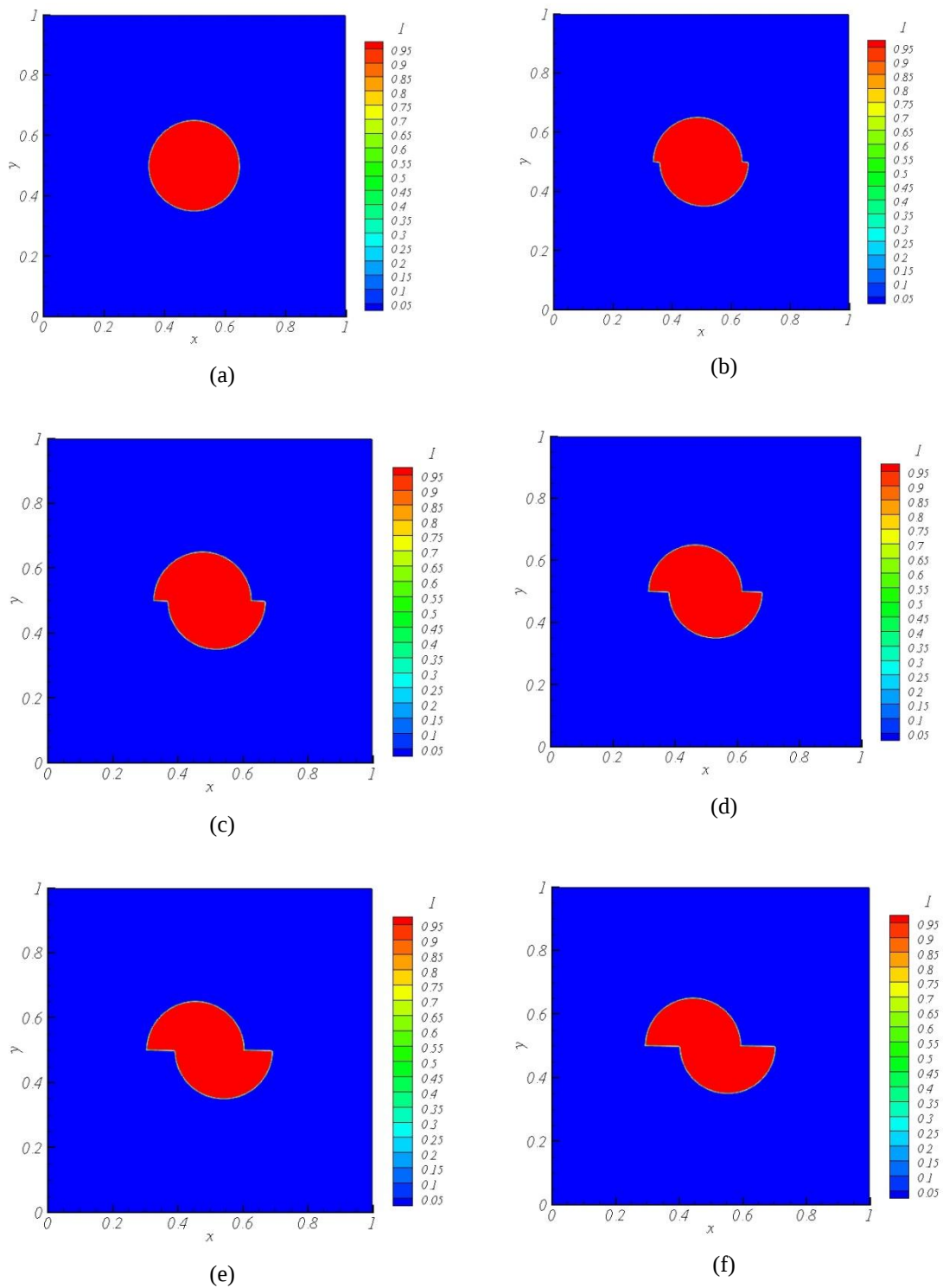


Figura 6: Evolução temporal do campo da função indicadora: (a) $t = 0,01[s]$; (b) $t = 0,02[s]$; (c) $t = 0,03[s]$; (d) $t = 0,04[s]$; (e) $t = 0,05[s]$; (f) $t = 0,06[s]$.

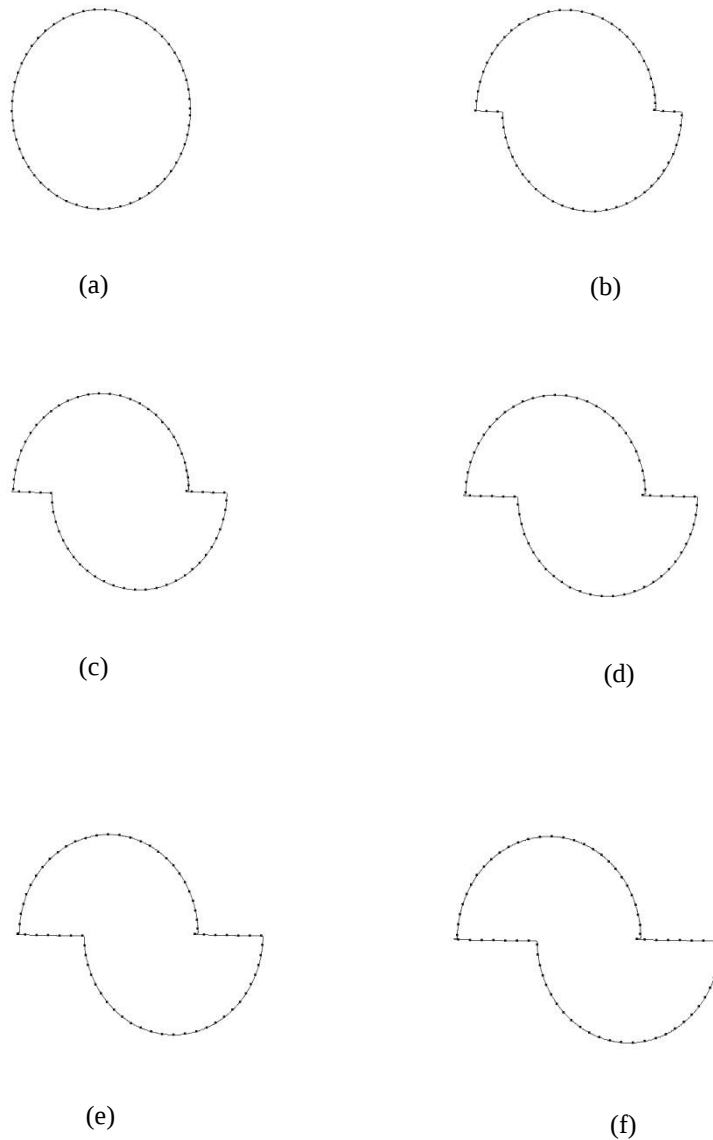


Figura 7: Evolução temporal da distribuição dos pontos lagrangianos: (a) $t = 0,01[s]$; (b) $t = 0,02[s]$; (c) $t = 0,03[s]$; (d) $t = 0,04[s]$; (e) $t = 0,05[s]$; (f) $t = 0,06[s]$.

Na Fig. 8 é feito um comparativo de uma interface sem remalhar com uma interface submetida ao artifício de remalhagem. Observa-se a importância de manter os pontos uniformemente distribuídos, uma vez que na Fig. 8 (a) apresenta oscilações na posição dos pontos lagrangianos que definem a geometria, o que ocasiona instabilidades numéricas em toda solução.

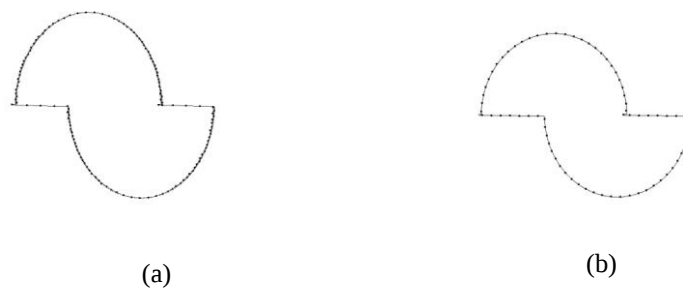


Figura 8: Comparação de uma interface: (a) sem remalhagem lagrangiana em $t = 0,06[s]$; (b) com remalhagem lagrangiana em $t = 0,06[s]$.

4.1 Teste de *vortex flow*

O teste de *vortex flow* consiste em uma interface circular, a qual sofre um estiramento (VILLAR, 2010). Esta deformação da interface é gerada através do campo de velocidade dado pela função corrente:

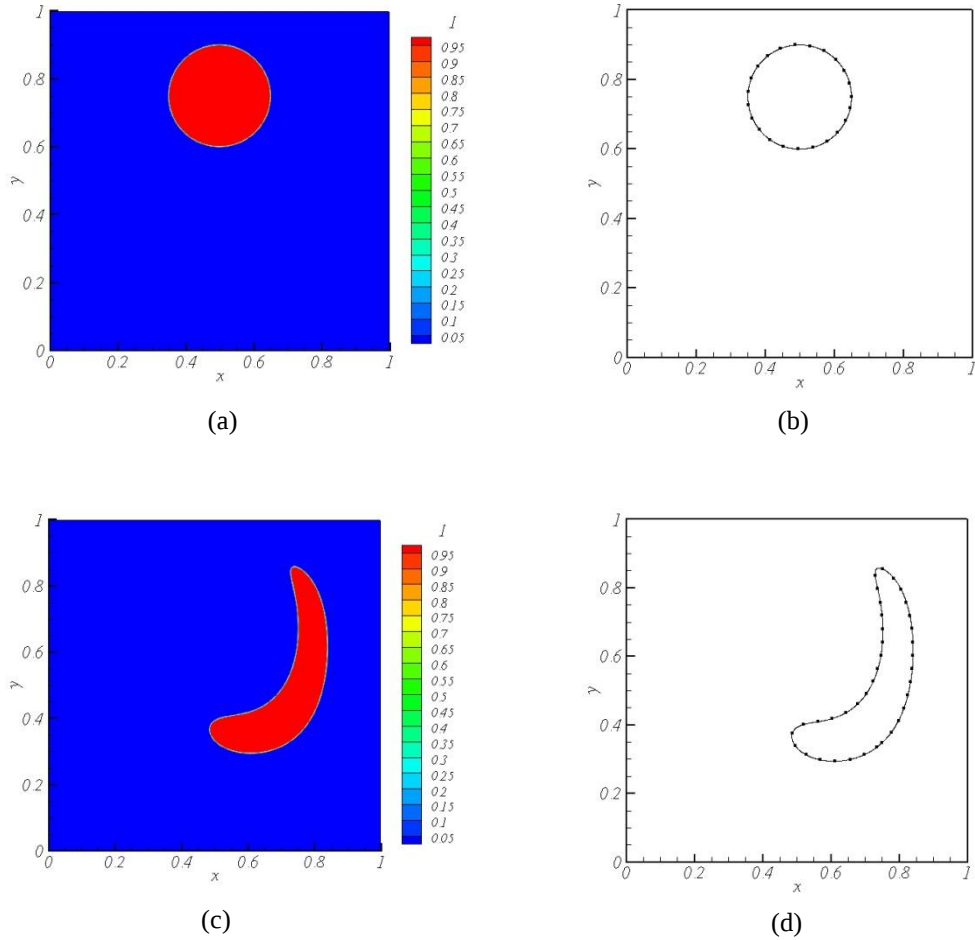
$$\psi(t, x, y) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (9)$$

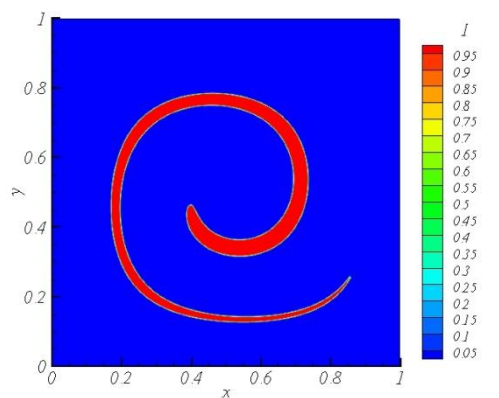
onde T é o período após o qual a interface retorna à sua forma inicial e $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$.

O teste de *vortex flow* é utilizado para verificar a qualidade da redistribuição dos pontos lagrangianos e também verifica quantitativamente a conservação de massa diante da metodologia usada. Além disso, é usado para validar a função indicadora com o intuito de certificar se esta acompanha a deformação presente na malha lagrangiana, podendo, assim, definir as propriedades de cada fluido.

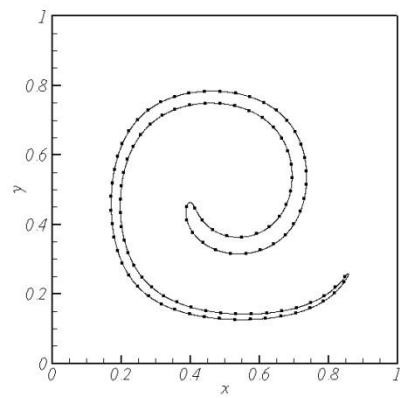
O domínio computacional é $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$. A interface, inicialmente circular, tem raio de 0,15 e está centrada em (0,50; 0,75) e $T = 8$ [s]. A malha euleriana é de 512×512 . O espaçamento da malha euleriana adotado neste teste é o mínimo entre $\Delta x/4$ e $\Delta y/4$.

Na Fig. 9 apresenta a evolução no tempo de simulação do *vortex flow*. Nota-se o estiramento da interface ao longo do tempo e o acompanhamento da função indicadora à medida que a malha lagrangiana se deforma, o que valida a utilização desta função, mostrando que esta está qualitativamente e quantitativamente correta. Além disso, observa-se também a distribuição uniforme dos pontos lagrangianos durante o estiramento da interface, o que demonstra que o método de regularização dos pontos lagrangianos está qualitativamente correto.

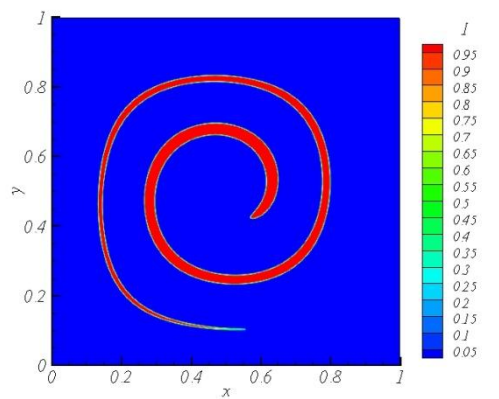




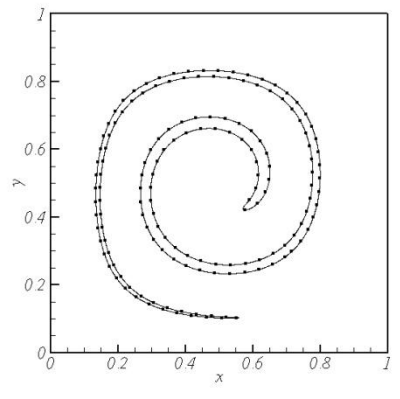
(e)



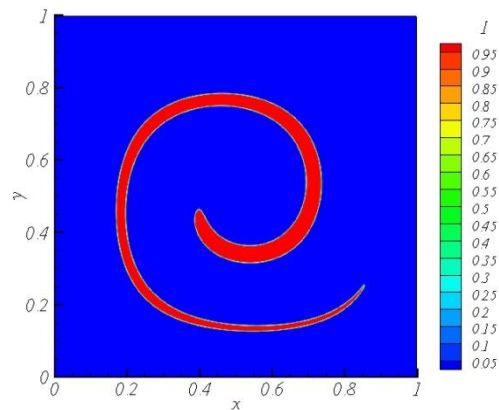
(f)



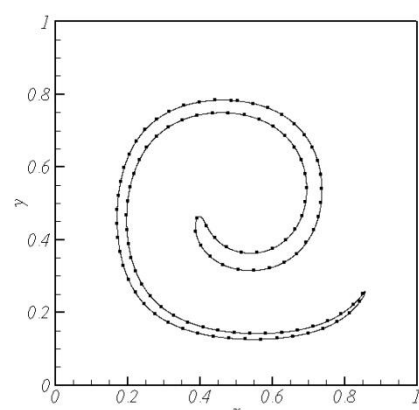
(g)



(h)



(i)



(j)

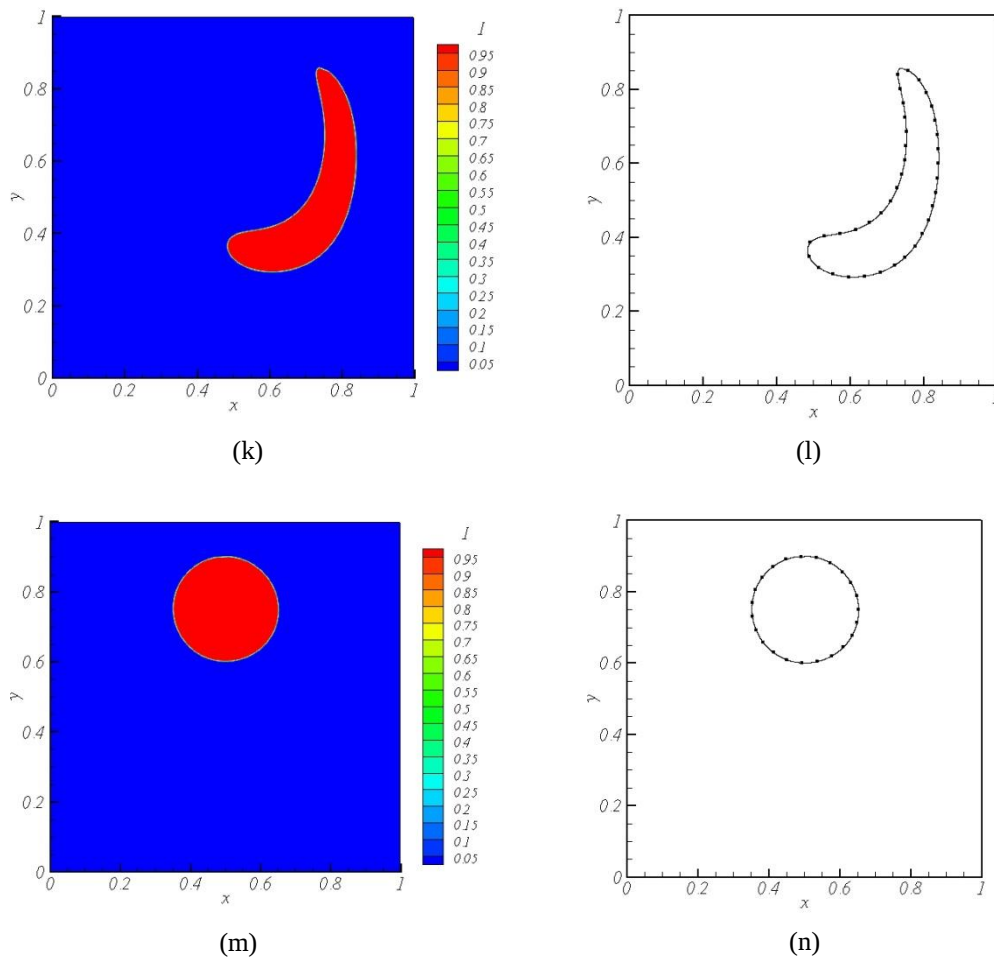


Figura 9: Evolução temporal do campo da função indicadora e distribuição dos pontos lagrangianos em: (a) e (b) $t = 0[s]$; (c) e (d) $t = 5[s]$; (e) e (f) $t = 20[s]$; (g) e (h) $t = 40[s]$; (i) e (j) $t = 60[s]$; (k) e (l) $t = 75[s]$ e (m) e (n) $t = 80[s]$.

Na Fig. 10 tem-se a conservação da área da interface ao longo do tempo para as malhas 256×256 e 512×512 . Observa-se um comparativo da conservação de massa quando se tem a interpolação da velocidade e com a velocidade imposta diretamente sobre a malha lagrangiana. Quando se tem interpolação a perda de área é menor, isso acontece devido ao fato de que a interpolação suaviza as regiões de maior curvatura, o que é equivalente a filtrar os pontos lagrangianos, e, como, a spline cúbica não mantém a acurácia nas regiões de maior curvatura, justificando assim tal resultado.

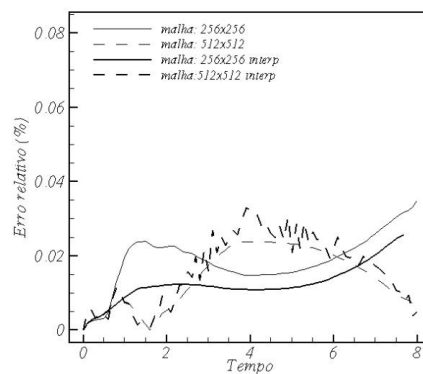


Figura 10: Representação gráfica da conservação de massa ao longo do tempo.

5. CONCLUSÃO

Testes de regularização da malha lagrangiana foram apresentados. Tanto no teste de deformação da interface, assim como o teste de *vortex flow*, mostraram qualitativamente corretos. No teste de *vortex flow*, foi apresentado testes quatitativos de conservação de massa, o que demonstraram coerentes com a literatura.

Além disso, a validação da função indicadora foi feita através de ambos os casos de regularização da malha lagrangiana. A partir dos resultados apresentados, observa-se que a função indicadora acompanha bem a interface lagrangiana enquanto ela é estirada, o que permite validar os cálculos. A validação da função indicadora é de extrema importância, pois garante que as propriedades físicas do fluido interno e externo à bolha permanecem constantes enquanto ocorre a ascensão e deformação da interface lagrangiana.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Capes, FAPEMIG, CNPq e Petrobrás pelo apoio financeiro.

7. REFERÊNCIAS

- CHAPRA, S.; CANALE, R. Numerical methods for engineers. McGraw-Hill, 1985.
- PESKIN, C. Numerical analysis of blood flow in the heart. JCP, v. 25, p. 220, 1977.
- TRYGGVASON, G.; UNVERDI, S. O. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. Journal of Computational Physics, v. 100, p. 25-37, 1991.
- VILLAR, M. Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.
- VILLAR, M.; CENICEROS, H.; ROMA, A.; SILVEIRA-NETO, A.. A robust fully adaptive hybrid level-set/front-tracking method for two phase flows with an accurate surface tension computation. Communication in Computer Physics, v.8, p.51-94, 2010.