

Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes utilizando o método dos Volumes Finitos e o método Pseudoespectral de Fourier

Andreia Aoyagui Nascimento, andreianascimento@mecanica.ufu.br

Felipe Pamplona Mariano, fpmariano@emc.ufg.br

Elie Luis Martinez Padilla, epadilla@mecanica.ufu.br

Resumo: O presente trabalho faz uso de duas distintas metodologias numéricas, para a solução das equações de Navier-Stokes, para um fluido incompressível, o método dos Volumes Finitos e o método Pseudo-espectral de Fourier. Este estudo compara a convergência espacial e a acurácia ambas metodologias.

Palavras-chave: Volumes Finitos, Pseudo-espectral de Fourier, verificação, Vórtices de Taylor-Green

1. INTRODUÇÃO

O processo para a solução de problemas de engenharia encontra-se a sua disposição três diferentes métodos de solução: método analítico, experimentação em laboratório e métodos numéricos (Maliska, 1995). Os métodos numéricos apresentam uma grande vantagem com relação aos demais processos de solução de problemas, como: tornar possível a solução de problemas com elevadas pressões e velocidades, além de condições de contorno sobre geometrias complexas e seu custo é inferior ao experimental.

Na dinâmica dos fluidos computacional utilizam-se várias metodologias para a solução de problemas, dentre elas destacam-se duas: o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método Espectral de Fourier (MEFO).

O MVF consiste em dividir o domínio em um número finito de volumes que corresponde às células da malha (Patanka, 1980). Em cada volume de controle é então aplicadas às equações com o objetivo de obter equações algébricas lineares, o número de incógnitas corresponderá ao número de volumes da malha vezes o número de variáveis.

O MEFO consiste na solução da equação diferencial utilizando a série de Fourier, ou seja, uma integral discreta no domínio (DFT). Assim o problema nesta metodologia apresenta uma transformação de domínios, um domínio físico e um domínio espectral. Sendo que ambas se relacionam através relações de reciprocidade (Briggs e Henson, 1995), Fig.(1).

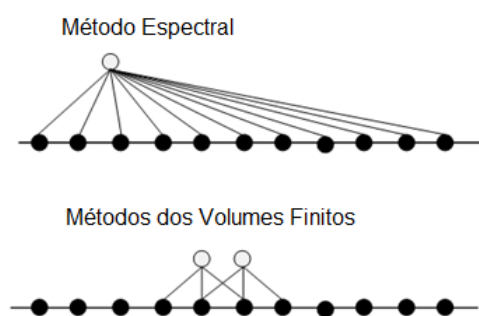


Figura 1- Esquema Representa o modo como é obtido as informações para a célula de calculo para os diferentes métodos (Mariano, 2010).

O presente trabalho compara os métodos dos volumes finitos e espectral de Fourier, utilizando de uma solução manufaturada, Vórtices de Green-Taylor. As simulações possuem as seguintes características: transiente, bidimensional, com refinamentos de 32, 64, 128, e 256 pontos, CFL de 0,001.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1. Modelo Matemático:

O uso da solução manufaturada para verificar a implementação das equações de Navier-Stokes. Consiste em determinar termos-fontes a partir da solução analítica proposta, Eqs. (1-3), para os campos de velocidade e de pressão, assim obtendo o valor analítico da solução e o valor numérico. Consequentemente pode-se obter o erro entre as soluções das equações.

$$u = -u_0 \cos(x/L) \sin(y/L) e^{\frac{-2\nu t}{L^2}} \quad (1)$$

$$v = u_0 \sin(x/L) \cos(y/L) e^{\frac{-2\nu t}{L^2}} \quad (2)$$

$$P = -\frac{u_0^2 \rho}{4} [\cos(2x/L) + \cos(2y/L)] e^{\frac{-4\nu t}{L^2}} \quad (3)$$

Onde u e v são as componentes de velocidade, P é a pressão, ν é a viscosidade cinemática, t o tempo, x e y são as variáveis espaciais. Estas equações foram propostas por Taylor e Green (1937).

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + f_i \quad (5)$$

Onde f é o termo fonte, ρ é a massa específica, e os índices i, j refere-se aos índices tensoriais.

O método da solução manufaturada consiste em substituir as equações analíticas, Eqs. (1-3), nas Eqs. (4) e (5) e determinar o termo-fonte, f_i . Desta forma, a solução numérica deve ser idêntica à solução analítica, a menos de erros numéricos, os quais podem ser determinados. Especificamente, as equações analíticas proposta por Taylor e Green (1937), geram termo-fonte nulo, de tal modo que as Eqs. (4) e (5) não precisam ser alteradas.

O presente trabalho mostra a verificação utilizando a técnica de solução manufaturada apresentada a cima, para o método dos volumes finitos e o método pseudo-espectral de Fourier, permitindo observar a ordem de convergência.

2.2. Modelo Numérico:

2.2.1 Solução utilizando o método dos Volumes Fintos:

O método de volumes finitos utiliza de discretização temporal e espacial com base em um volume da malha. Utilizou-se uma malha com arranjo deslocado que inibe oscilações de pressão decorrentes da independência entre pressão e velocidade num mesmo ponto durante a resolução da equação de conservação da massa. Esta resolução tem se revelado mais adequada, uma vez que os métodos que trabalham com malha co-localizada nem sempre garantem conservação da massa em seus volumes. Neste tipo de malha as propriedades físicas e a pressão são armazenadas na malha principal, enquanto as velocidades são armazenadas nas malhas deslocadas.

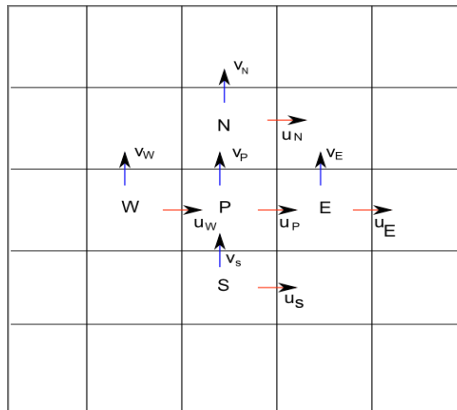


Figura 2- Esquema do posicionamento dos volumes em uma malha bidimensional, com velocidade deslocada.

Na Figura (2) é representada a malha principal, onde estão localizadas a pressão e as propriedades físicas, massa específica e viscosidade. Deslocada de $\Delta x/2$ para frente, esta localizada a componente da velocidade horizontal u_p , u_w e u_e (setas vermelha), as setas azuis representa a componente da velocidade vertical, deslocada de $\Delta y/2$. P representa o volume onde se calcula as variáveis discretizadas, e W (oeste), E (leste), N (norte), S (sul) são vizinhos utilizados para determinar as variáveis em P.

Portanto a equação discretizada para a componente velocidade em horizontal utilizando, para as derivadas espaciais diferenças centradas, e para o termo transiente Euler é dada pela Eq.(6).

$$\begin{aligned} \frac{u^t - u^0}{\Delta t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{P_e - P_w}{\Delta x} - \frac{u(u_e - u_w)}{\Delta x} - \frac{v(u_s - u_n)}{\Delta y} + \\ & + v \left[\left(\frac{u_e - u_p}{\delta_{xe}} - \frac{u_p - u_w}{\delta_{xw}} \right) \frac{1}{\Delta x} + \left(\frac{u_n - u_p}{\delta_{yn}} - \frac{u_p - u_s}{\delta_{ys}} \right) \frac{1}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

A solução da equação do movimento necessita do acoplamento pressão velocidade, este foi feito utilizando do método do passo fracionado, (Patanka, 1980).

2.2.2 Método do Passo Fracionado:

As equações envolvidas no processo de solução do acoplamento pressão-velocidade, por meio do método do passo fracionado, utilizam três equações assim denominadas: preditor Eq.(7), corretor Eq.(8) e Poisson Eq.(9).

$$\frac{u^* - u^0}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P^*}{\partial x} \right) + ADV + DIF \quad (7)$$

$$\frac{u^t - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P^t}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^{t+dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 P^*}{\partial x^2} \right)^{t+dt} \quad (9)$$

Onde “*” simboliza a variável estimada, ADV simboliza o termo advectivo e o DIF o termo difusivo.

- 1- Estimar o campo de velocidades u^*, v^* no tempo $t+dt$ com as Eq.(7);
- 2- Estima P^* em $t+dt$ com a Eq. (9);
- 3- Corrige os campos de velocidades u, v Eq. (8);
- 4- Atualiza o termo de pressão, $P^{t+dt} = P^t + P^*$;
- 5- Verifica se a equação da continuidade é satisfeita e todo o domínio, para as novas velocidades obtidas;
- 6- Avança no tempo e retorna ao passo 1.

2.2.3 Método Pseudo-espectral de Fourier:

A solução utilizando o método pseudo-espectral de Fourier consiste na transformação da equação do movimento para o espaço espectral, assim a formulação para a componente de velocidade horizontal, u , neste método fica:

$$\frac{\hat{u}^t - \hat{u}^0}{\Delta t} = -\hat{ADV} - \left(ik_x \hat{P} \right) + \hat{DIF} + \hat{f} \quad (9)$$

Onde “^” simboliza o termo no espaço espectral. O termo advectivo é resolvido utilizando a metodologia anti-simétrica, Eq.(10)

$$\frac{F(uu) + F \left[F^{-1} \left(ik_x \hat{u} \right) F^{-1}(u) \right]}{2} \quad (10)$$



$$\frac{\hat{u}^t - \hat{u}^0}{\Delta t} = \wp \left(-\hat{ADV} + \hat{f} \right) + \hat{DIF} \quad (11)$$

2.2.4 Parâmetros de simulação:

Tabela 1. Parâmetros de simulação.

Largura do domínio	L	$2\pi[\text{m}]$
Altura do domínio	H	$2\pi [\text{m}]$
Velocidade máxima	u_0	1,0 [m/s]
Massa específica	ρ	1,0 [Kg/m ³]
Reynolds	Re	100
volumes/pontos de colocação	M,N	32, 64, 128, 256
Número de Kulant	CFL	0,001

$$\nu = \frac{u_0 L}{\text{Re}} \quad (12)$$

A Figura (3) representa a condição inicial do campo de pressão sobreposto com os vetores velocidade, para ambos

os métodos comparados. Nota-se a existência de quatro regiões de alta pressão.

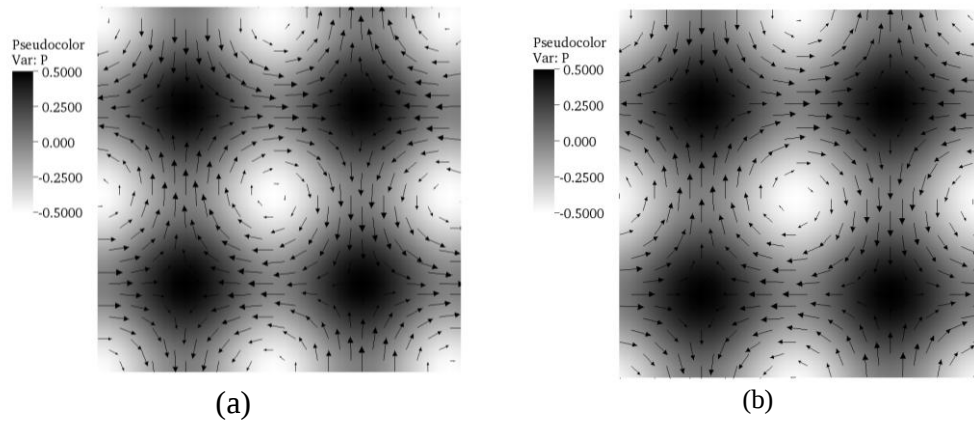


Figura 3-Distribuição da pressão na condição de $t=0$ s (a) método dos volumes finitos e (b) método pseudo-espectral de Fourier.

3. RESULTADOS

A seguir são apresentados os resultados obtidos para ambas as metodologias, com relação à ordem de convergência e a acurácia, dada a partir do cálculo do erro, seguindo a norma L_2 Eq.(13).

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_i^M \sum_j^N (\phi_{ij}^{analítico} - \phi_{ij}^{numérico})^2}{MN}} \quad (13)$$

Onde ϕ representa a propriedade: velocidade ou pressão, M e N são os números de pontos e i,j são os índices do somatório.

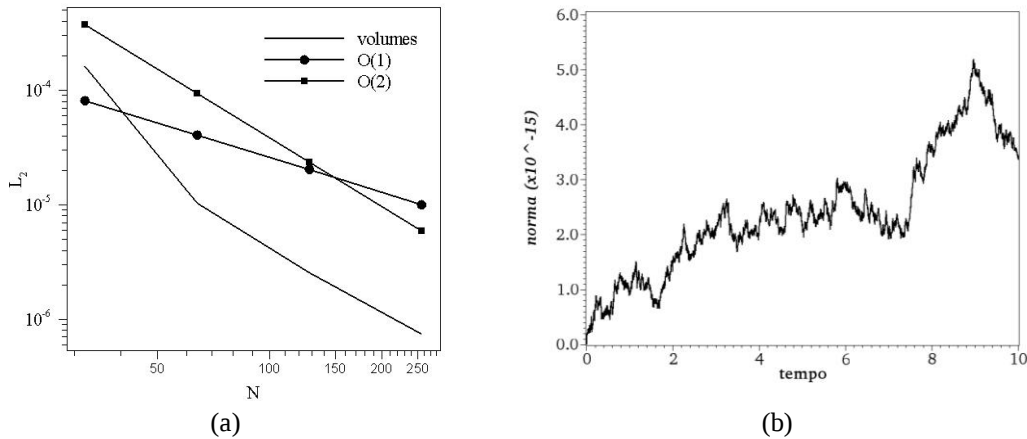


Figura 4- (a) Ordem de convergência para a metodologia Volumes finitos e (b) Norma L_2 obtida com o método pseudo-espectral de Fourier.

A Figura (4a) representa a ordem de convergência para a metodologia volumes finitos. Pode-se notar que ao elevar os níveis de refinamento, a curva numérica, linha cheia, apresenta uma redução praticamente linear aproximando da linha do erro teórico de segunda ordem, $O(2)$, quadrados.

A Figura (4b) representa a curva da norma L_2 em função do tempo para a metodologia pseudo-espectral de Fourier para utilizando 32 pontos de colocação. Nesta metodologia não se pode obter a ordem de convergência, visto que os erros obtidos são na ordem de erro de arredondamento, (dupla precisão). Assim, exibindo a elevada acurácia como esperado para esta metodologia.

4. CONCLUSÃO

Portanto, de acordo com os resultados apresentados na validação de ambos os códigos, pode-se concluir que a metodologias pseudo-espectral de Fourier apresenta grandes vantagens com relação ao método dos volumes finitos, na medida em que, apresenta implementação mais amigável e a ausência da necessidade do processo de acoplamento pressão velocidade. Além da elevada acurácia, em problemas periódicos bidimensionais. Porém esta elevada acurácia, é obtida devido a utilização de todos os pontos do domínio no cálculo das derivadas espaciais. Assim, apresenta um elevado custo computacional quando comparado com o método dos volumes finitos de segunda ordem utilizado no presente trabalho.

5. AGRADECIMENTOS

À PETROBRÁS e à CAPES pelo incentivo financeiro e Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.

6. REFERÊNCIAS

- Briggs, W. L., e Henson, V. E. (1995). *THE DFT : an owner's manual for the discrete Fourier transform*. SIAM.
- Maliska, C. R. (1995). *TRANSFERENCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS FLUIDO COMPUTACIONAL*. RIO DE JANEIRO: LTC.
- Mariano, F. P. (2011). *Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes Usando uma Hibridação das Metodologias Fronteira Imersa e Pseudo-Espectral de Fourier*. Uberlândia: UFU- Faculdade de Engenharia Mecânica.
- Patanka, S. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid flow* (Vols. ISBN 0891165223, 1 ed). Taylor e Francis
- Taylor, G. I., e Green, A. E. (1937). Mechanism of the Poduction of Small Eddies from Large Ones. *Proceedings of the Royal Society of London.Series A, Mathematical and Physical Sciences* , vol.158 499-521.
- Mariano, F. P. (2010). *Solução numérica das equações de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias de fronteira imersa e pseudo-espectral de Fourier*. Uberlandia: UFU.