

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM SISTEMA VIBRATÓRIO CONTENDO MATERIAL COM MEMÓRIA DE FORMA

Wellington Luziano Paulo Júnior; Domingos Alves Rade.

Ligas com memória de forma (*Shape Memory Alloys – SMA*) são ligas metálicas que apresentam propriedades únicas de recuperação de grandes deformações (da ordem de 6% a 8%) sob efeito da temperatura. Assim como qualquer liga metálica, possuem diferentes fases cristalógicas que ocorrem a diferentes temperaturas. As duas fases presentes são a martensita (estável a baixas temperaturas) e a austenita (estável a altas temperaturas). Transformações de fase também podem ser induzidas pela aplicação de cargas externas, por meio de um processo não difusivo.

A martensita pode ser encontrada na forma maclada e não maclada, sendo a primeira decorrente do resfriamento do material sem a presença de carregamento, resultando uma auto-acomodação da estrutura cristalina. A martensita não maclada, por sua vez, ocorre somente na presença de carregamento, havendo assim, uma direção preferencial da estrutura cristalina. As transformações entre a martensita e a austenita produzem comportamento termomecânico representado por dois efeitos principais: efeito de memória de forma e pseudoelasticidade, que serão discutidos mais adiante. Tais efeitos são explorados em diversas aplicações de Engenharia.

No contexto do controle de vibrações as SMA foram empregados em diversos trabalhos, como no absorvedor dinâmico de vibrações adaptativo desenvolvido por Rustighi *et al.* (2003) e no sistema de controle ativo realizado por Suzuki e Kagawa (2010), ilustrado na Figura 1.

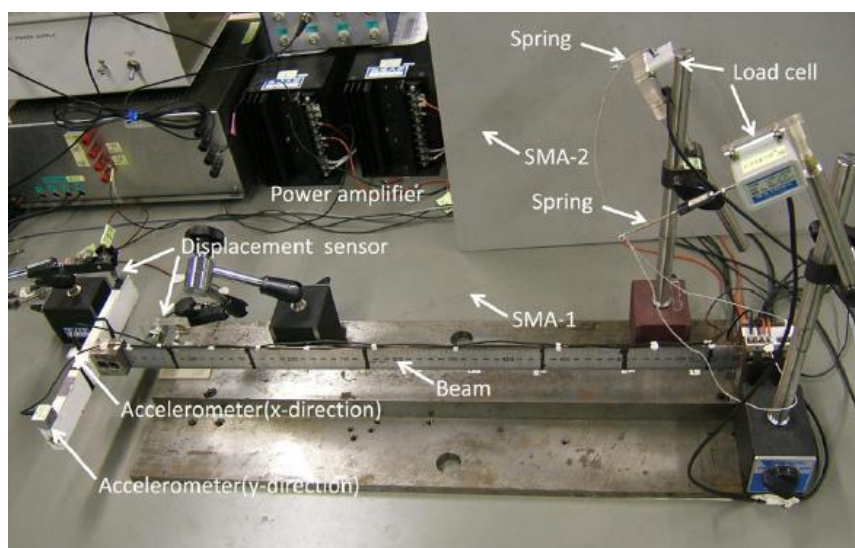


Figura 1: Viga flexível controlada por atuadores SMA (SUZUKI e KAGAWA, 2010).

Os dois principais efeitos que os materiais com memória de forma podem sofrer são o efeito memória de forma e o efeito pseudoelástico. O primeiro é ilustrado na Figura 2, onde é possível verificar que aplicando carregamento em uma estrutura composta de martensita maclada (ponto B), o material ultrapassa as tensões de alinhamento das variantes martensíticas e se transforma em martensita não maclada (ponto C). Verifica-se que no ponto E, quando a carga é retirada, existe uma deformação residual. A partir do aquecimento do material a martensita não maclada é transformada em austenita, recuperando completamente a deformação sofrida pelo material (ponto A). Quando o material é resfriado, ele retorna a sua configuração inicial (ponto B).

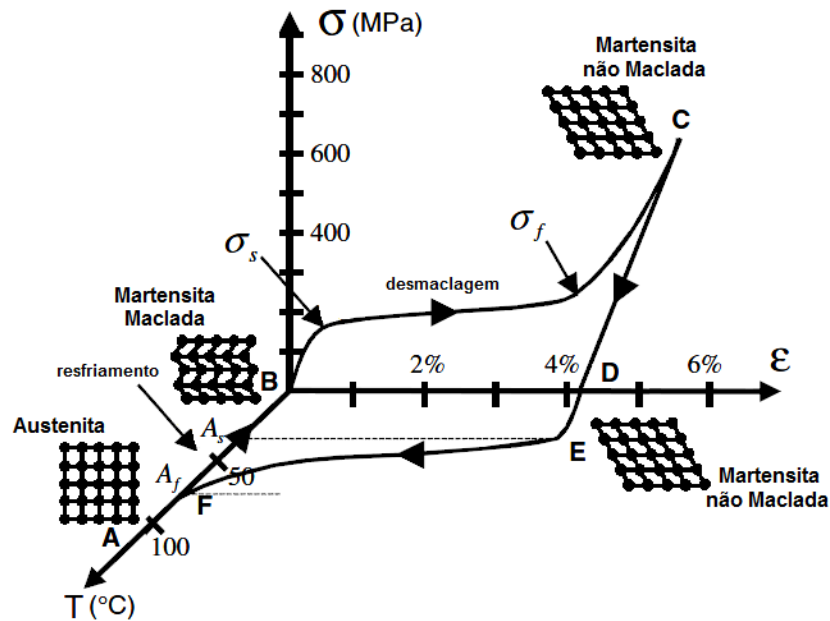


Figura 2: Gráfico representando o efeito memória de forma de uma liga de NiTi (adaptado de Lagoudas, 2008).

O efeito pseudoelástico, por sua vez, é uma transformação induzida pelo carregamento e posterior descarregamento, gerando grande deformação e recuperação quando o material está a uma temperatura A_f na qual a única fase presente no material é a austenita.

Na Figura 3 verifica-se que o material ultrapassa as tensões de formação de martensita quando carregado (σ_s^m e σ_f^m). Quando ocorre o descarregamento, o material retorna passando pelas tensões de formação de austenita (σ_s^a e σ_f^a) e recuperando completamente a deformação inicialmente sofrida. Verifica-se que o material exibe um comportamento histerético, motivo esse da utilização das SMA em aplicações no controle de vibração, uma vez que a histerese provoca dissipação de energia vibratória.

Outro detalhe importante são os chamados “*minor loopings*”, que são as curvas internas do gráfico, que acontecem quando a transformação não é completa. Este efeito é bastante comum em sistemas dinâmicos.

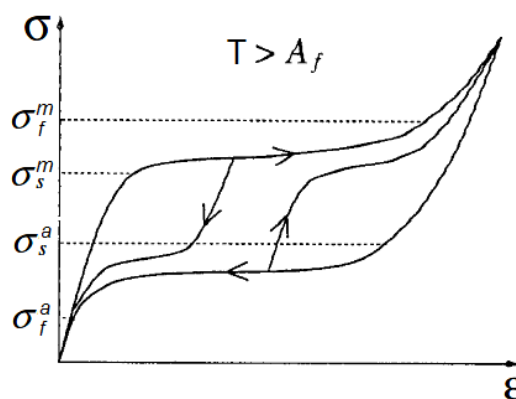


Figura 3: Curvas tensão-deformação representando o efeito pseudoelástico (VAN DER WIJST, 1998).

Diversos são os modelos desenvolvidos para representar o comportamento dos materiais com memória de forma. Citam-se os modelos de Brinson (BRINSON, 1993), Liang e Rogers (LIANG e ROGERS, 1990) e o modelo polinomial de Lagoudas (LAGOUDAS, 2008). Todos estes modelos utilizam os potenciais termodinâmicos para obtenção das equações constitutivas.

No presente trabalho deseja-se representar o comportamento histerético associado ao efeito pseudoelástico de uma liga com memória de forma; assim, foi utilizado o modelo simplificado de Lagoudas, pois este modelo é capaz de representar o efeito pseudoelástico utilizando poucos parâmetros, com menor custo computacional quando comparado à maioria dos demais modelos.

Lagoudas, Mayes e Khan (2001) assumem que acima da temperatura A_f a relação tensão-deformação pode ser representada por uma série de trechos lineares, conforme mostrado na Figura 4.

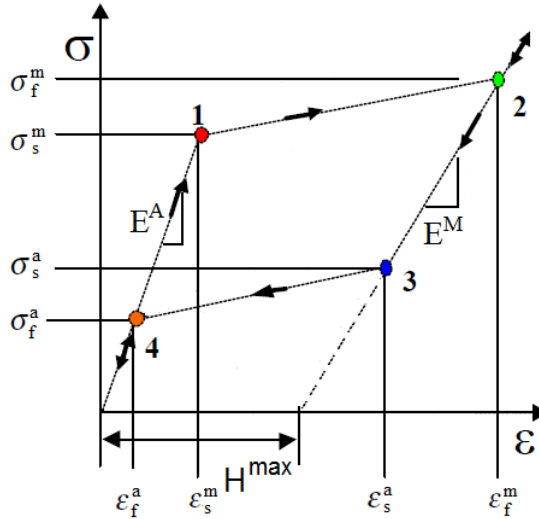


Figura 4: Diagrama tensão-deformação para uma SMA em condições isotérmicas (adaptado de Lagoudas, Mayes e Khan, 2001).

O ponto 1 da Figura 4 define o início da formação de martensita e pode ser calculado através das expressões:

$$\sigma_s^m = C(T - M_s) \quad (1)$$

$$\varepsilon_s^m = \frac{C(T - M_s)}{E^A} \quad (2)$$

onde C é o coeficiente que relaciona a tensão e a temperatura de transformação da martensita e austenita, M_s é a temperatura de início de formação de martensita e E^A é o módulo de elasticidade da liga quando esta é puramente austenítica. O fim da transformação direta (austenita para martensita) ocorre no ponto 2, definido por:

$$\sigma_f^m = C(T - M_f) \quad (3)$$

$$\varepsilon_f^m = H^{\max} + \frac{C(T - M_f)}{E^M} \quad (4)$$

onde M_f é a temperatura final de formação de martensita, E^M é o módulo de elasticidade da fase martensítica e $H^{\max}$ é a deformação máxima sofrida pelo material. A transformação inversa (martensita para austenita) inicia-se no ponto 3 definido pelas Eq. 5 e 6, sendo A_s a temperatura de início da formação de austenita:

$$\sigma_s^a = C(T - A_s) \quad (5)$$

$$\varepsilon_s^a = H^{\max} + \frac{C(T - A_s)}{E^M} \quad (6)$$

O fim da transformação inversa ocorre no ponto 4, definido por:

$$\sigma_f^a = C(T - A_f) \quad (7)$$

$$\varepsilon_f^a = \frac{C(T - A_f)}{E^A} \quad (8)$$

A transformação da liga pode ocorrer completamente (*“major looping”*), ou de forma incompleta (*“minor looping”*). Para a transformação completa, as equações que regem cada uma das regiões entre os pontos do gráfico da Figura 4 são dadas abaixo. Na região entre os pontos 4 e 1, que é a região elástica quando há somente austenita, a deformação de transformação e a tensão são dadas por:

$$\varepsilon^t = 0 \quad (9)$$

$$\sigma = E^A \varepsilon \quad (10)$$

Na região de transformação direta (entre os pontos 1 e 2) a deformação de transformação varia linearmente de zero ao valor máximo de deformação $H^{\max}$, enquanto a tensão é dada por uma regressão linear dos pontos 1 e 2, conforme equações 11 e 12:

$$\varepsilon^t = H^{\max} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_s^m}{\varepsilon_f^m - \varepsilon_s^m} \right) \quad (11)$$

$$\sigma = \sigma_s^m + \frac{\varepsilon^t}{H^{\max}} (\sigma_f^m - \sigma_s^m) \quad (12)$$

Na região puramente martensítica (entre os pontos 2 e 3) a deformação de transformação é constante igual a $H^{\max}$ e a tensão varia linearmente entre as tensões dos pontos 2 e 3:

$$\varepsilon^t = H^{\max} \quad (13)$$

$$\sigma = \sigma_f^m + E^M (\varepsilon - \varepsilon_f^m) \quad (14)$$

Na região restante ocorre a transformação inversa entre os pontos 3 e 4, onde a deformação de transformação varia de $H^{\max}$ a zero e a tensão varia linearmente entre os pontos 3 e 4:

$$\varepsilon^t = H^{\max} - H^{\max} \left(\frac{\varepsilon_s^a - \varepsilon}{\varepsilon_s^a - \varepsilon_f^a} \right) \quad (15)$$

$$\sigma = \sigma_f^a + \frac{\varepsilon^t}{H^{\max}} (\sigma_s^a - \sigma_f^a) \quad (16)$$

As relações que ocorrem quando a transformação não é completa, ou seja, durante o *“minor looping”* podem ser encontradas visualizando a Figura 5, onde os pontos 1 e 3 são reposicionados e há a introdução do ponto A (ponto onde o carregamento se interrompe) e ponto B (ponto onde o descarregamento é interrompido).

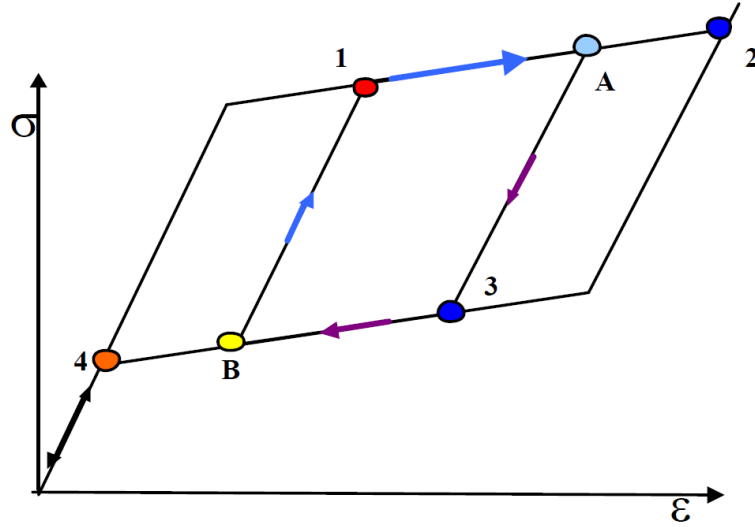


Figura 5: Diagrama tensão-deformação para um SMA em “minor looping” (adaptado de Lagoudas, Mayes e Khan, 2001).

As equações que ditam o comportamento do material no início do carregamento são idênticas para o *major looping* e para o *minor looping*. As diferenças se iniciam no ponto A onde o carregamento é interrompido e o descarregamento ocorre de forma linear. O módulo de elasticidade e a tensão nessa região são dados por:

$$E_R = \frac{E_M E_A}{\left(\frac{\varepsilon_{\max}^t}{H_{\max}} (E_A - E_M) + E_M \right)} \quad (17)$$

$$\sigma = \sigma_{\max} + E_R (\varepsilon - \varepsilon_{\max}) \quad (18)$$

onde $\varepsilon_{\max}^t$, $\sigma_{\max}$ e $\varepsilon_{\max}$ são os valores armazenados no ponto onde o descarregamento parcial inicia-se (ponto A). O descarregamento continua até a curva interceptar a região de transformação inversa (ponto 3) definido por:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_f^a + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{H_{\max}} (\varepsilon_s^a - \varepsilon_f^a) \quad (19)$$

$$\sigma_3 = \sigma_f^a + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{H_{\max}} (\sigma_s^a - \sigma_f^a) \quad (20)$$

No ponto 3 a transformação inversa se inicia e os valores da deformação de transformação e da tensão são representados pelas seguintes equações:

$$\varepsilon^t = H^{\max} - H^{\max} \left(\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_f^a}{\varepsilon_s^a - \varepsilon_f^a} \right) \quad (21)$$

$$\sigma = \sigma_f^a + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{H_{\max}} (\sigma_3 - \sigma_f^a) \quad (22)$$

À medida que a transformação inversa ocorre, a deformação de transformação tende a zero quando se aproxima do ponto 4, onde iria ocorrer o carregamento de forma elástica com um módulo de elasticidade igual ao da austenita; no entanto se o carregamento se iniciar antes (ponto B), este ocorrerá de forma linear com módulo de elasticidade diferente. As equações que definem esse novo módulo de elasticidade e a tensão nessa região são:

$$E_F = \frac{E_M E_A}{\left(\frac{\varepsilon_{\min}^t}{H^{\max}} (E_A - E_M) + E_M \right)} \quad (23)$$

$$\sigma = \sigma_{\min} + E_F (\varepsilon - \varepsilon_{\min}) \quad (24)$$

onde $\varepsilon_{\min}^t$, $\sigma_{\min}$ e $\varepsilon_{\min}$ são os valores armazenados no ponto de mudança de direção de carregamento (ponto B). O descarregamento continua até a curva interceptar a região de transformação direta no ponto 1 que é definido por:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s^m + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{H^{\max}} (\varepsilon_f^m - \varepsilon_s^m) \quad (25)$$

$$\sigma_1 = \sigma_s^m + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{H^{\max}} (\sigma_f^m - \sigma_s^m) \quad (26)$$

No ponto 1 a transformação direta se inicia novamente, e a tensão e a deformação de transformação nessa região são dadas pelas seguintes equações:

$$\varepsilon^t = H^{\max} - H^{\max} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_f^m - \varepsilon_1} \right) \quad (27)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{\varepsilon^t}{H^{\max}} (\sigma_f^m - \sigma_1) \quad (28)$$

Um exemplo foi implementado numericamente no presente trabalho e é um sistema vibratório de um grau de liberdade mostrado na Figura 6, onde verifica-se que a excitação é realizada através da vibração da base, sendo $y(t)$ um excitação do tipo harmônica.

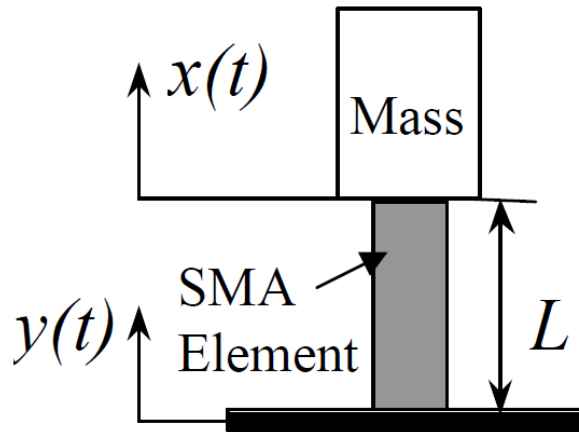


Figura 6: Sistema vibratório de um grau de liberdade contendo SMA (LAGOUDAS, MAYES e KHAN, 2001).

A partir da análise da Figura 6 e a aplicação da Segunda Lei de Newton, obtém-se:

$$\Sigma F = m\ddot{x} \Rightarrow F_{MF} = m\ddot{x} \quad (29)$$

onde F_{MF} é a força de reação do material com memória de forma à excitação $y(t)$. A partir de algumas manipulações algébricas nas equações que definem a tensão de cada região do diagrama tensão-deformação (equações 18, 22, 24 e 28) é possível obter:

$$\sigma_{MF} = \begin{cases} \sigma_{\max} + E_R (\varepsilon - \varepsilon_{\max}); & \text{Região de descarregamento} \\ \sigma_3 + E_{lin3} (\varepsilon - \varepsilon_3); & \text{Região de transformação inversa} \\ \sigma_{\min} + E_F (\varepsilon - \varepsilon_{\min}); & \text{Região de carregamento} \\ \sigma_1 + E_{lin1} (\varepsilon - \varepsilon_1); & \text{Região de transformação direta} \end{cases} \quad (30)$$

onde E_{lin} é o módulo de elasticidade linearizado para os dois pontos que definem aquela região. De acordo com a configuração do sistema dado pela Figura 6, verifica-se que a deformação é dada pela equação 31.

$$\varepsilon = \frac{x - y}{L} \quad (31)$$

Substituindo as relações da equação 30 e 31 na equação 29, obtém-se:

$$m\ddot{x} = F(t) - A_{MF} \begin{cases} \sigma_{\max} + E_R \left(\frac{x}{L} - \varepsilon_{\max} \right); & \text{Região de descarregamento} \\ \sigma_3 + E_{lin3} \left(\frac{x}{L} - \varepsilon_3 \right); & \text{Região de transformação inversa} \\ \sigma_{\min} + E_F \left(\frac{x}{L} - \varepsilon_{\min} \right); & \text{Região de carregamento} \\ \sigma_1 + E_{lin1} \left(\frac{x}{L} - \varepsilon_1 \right); & \text{Região de transformação direta} \end{cases} \quad (32)$$

onde $F(t)$ é a parcela que engloba a força de excitação $y(t)$ dada pela equação 33:

$$F(t) = \frac{E_{região} A_{MF}}{L} y(t) \quad (33)$$

onde $E_{região}$ foi definido como o módulo de elasticidade da região. Assim, em sua forma geral a equação 32 pode ser definida como:

$$m\ddot{x} + k_{região} x = F(t) - A_{MF} \sigma_{região} \quad (34)$$

Foi implementado um algoritmo em ambiente MATLAB utilizando das equações definidas anteriormente utilizando o método de Newmark para integração temporal. Os parâmetros do sistema e do material com memória de forma estão presentes na Tabela 1.

Os resultados obtidos podem ser visualizados na Figura 7, onde são comparados os deslocamentos obtidos pelo algoritmo implementado e os da literatura. Na Figura 8 é apresentado o diagrama tensão-deformação para o caso estudado, onde verifica-se a existência de diversos *minor loopings*.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema e do SMA (adaptado de Lagoudas, Mayes e Khan, 2001).

Parâmetro	Valor
Massa	500 kg
Comprimento do elemento SMA	1 m
Raio do elemento SMA	0,01 m
Amplitude de excitação da base	0,01 m
Frequência de excitação da base	50 Hz
Temperatura de operação	315 K
E^A	70×10^9 Pa
E^M	30×10^9 Pa
C	7×10^6 Pa/°C
$[M_f, M_s, A_s, A_f]$	[274, 292, 296, 315] K
H^{max}	0,05

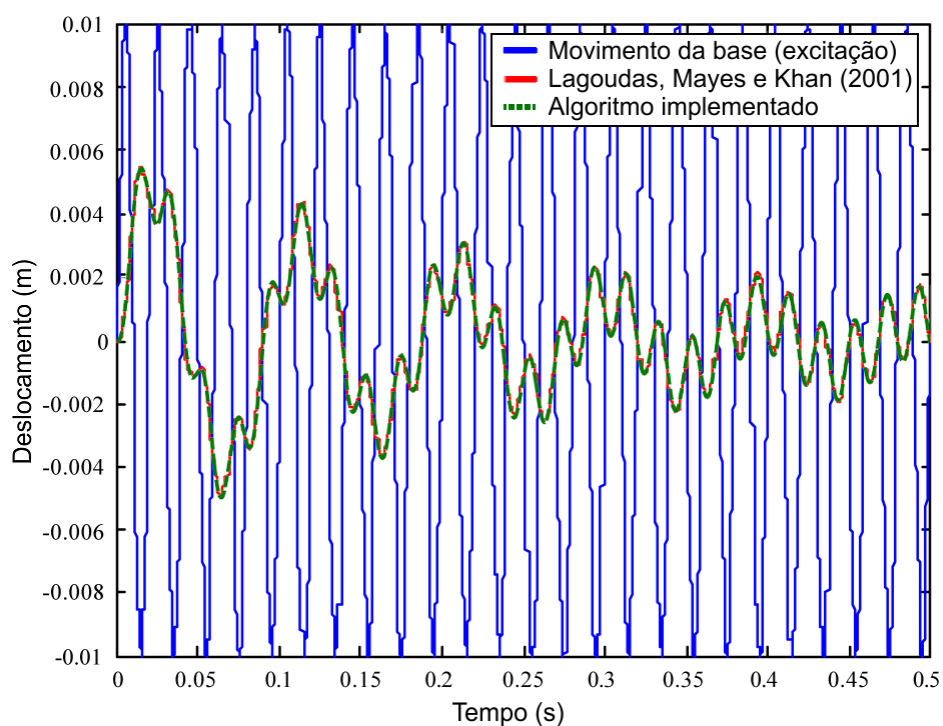


Figura 7: Comparação entre os deslocamentos obtidos pelo algoritmo implementado e os obtidos por Lagoudas, Mayes e Khan (2001).

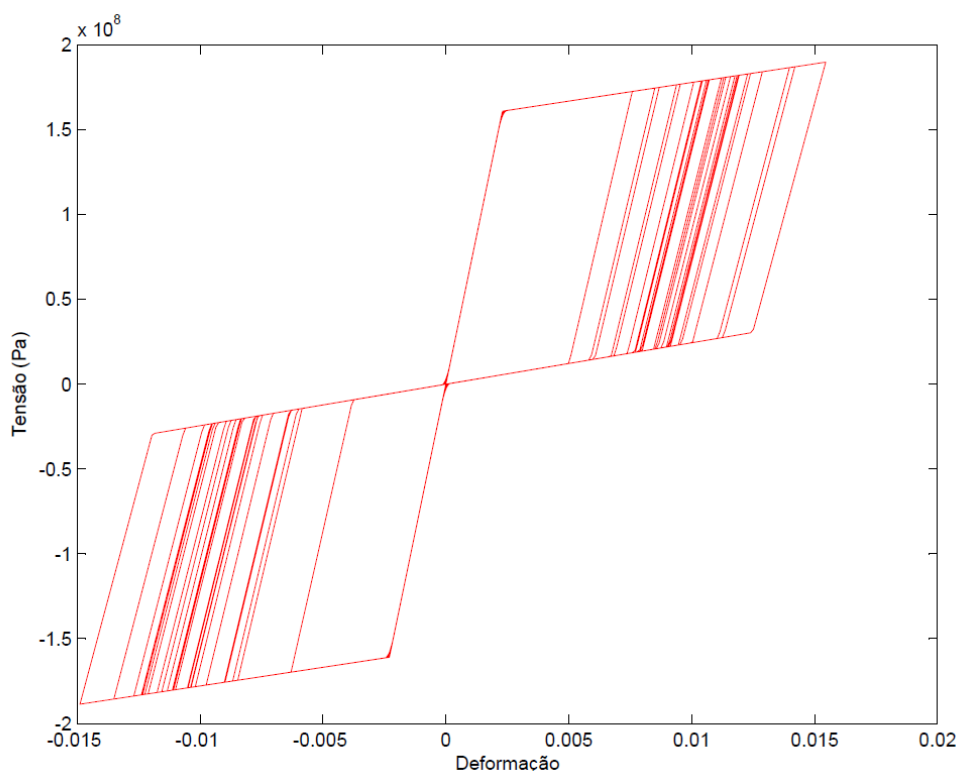


Figura 8: Diagrama tensão-deformação obtido utilizando o modelo simplificado de Lagoudas.

Verifica-se, na Figura 7, que os resultados obtidos foram idênticos aos da literatura, fato que valida a implementação realizada. O decaimento das amplitudes de movimento, observado na Figura 7, indica que um amortecimento considerável foi gerado pela presença do SMA. Na Figura 8 pode ser visto que não houve nenhum *major looping* uma vez que a deformação máxima atingida na simulação foi da ordem de 0,015, enquanto que o H^{max} utilizado foi de 0,05. O tempo de simulação para esse exemplo foi na faixa de 3 segundos, ou seja, o custo computacional é baixo quando comparado aos obtidos da literatura que passam de 20 segundos (LAGOUDAS, MAYES e KHAN, 2001).

Por fim, este trabalho apresentou um dos modelos constitutivos propostos para representar o comportamento unidimensional de ligas com memória de forma. O modelo constitutivo foi utilizado para representar o comportamento do elemento resiliente de um sistema vibratório de um grau de liberdade. Por meio de implementação computacional, foi simulado o comportamento vibratório deste sistema, permitindo observar a influência do efeito pseudoelástico na dissipação de energia vibratória. Este resultado confirma o interesse de se empregar SMA em dispositivos amortecedores. Esta possibilidade será explorada pelos autores na concepção de absorvedores dinâmicos de vibrações adaptativos.

REFERÊNCIAS

- BRINSON, L. C. **One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable**, Journal of Intelligent Material Systems and Structures 4, 1993. pp. 229-242.
- LAGOUDAS, D. C. (ed) **Shape memory alloys. Modeling and engineering applications**", Springer, 2008.
- LAGOUDAS, D. C., MAYES, J. J., KHAN, M. M. **Simplified shape memory alloy (SMA) material model for vibration isolation**, In: SPIE Conference of modelling, signal and control in smart structures, 2001.

LIANG, C., ROGERS, C. A. **One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials**, Journal of Intelligent Material Systems and Structures 1, 1990. pp. 207-234.

RUSTIGHI, E., BRENNAN, M.J., MACE, B.R. **Design of an adaptive vibration absorber using shape memory alloy**, ISVR Technical Memorandum No. 920, 2003.

SUZUKI, Y., KAGAWA, Y. **Active vibration control of a flexible cantilever beam using shape memory alloy actuators**, Smart Mater. Struct. 19 085014, 2010.

WIJST, M. V. D. **Shape control of structures and materials with shape memory alloys**, PhD. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1998.