

ESTUDO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL DA INFLUÊNCIA DE AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO EM SISTEMAS QUE CONTÊM MÚLTIPLOS CORPOS FLEXÍVEIS

Thiago de Paula Sales, Domingos Alves Rade

Durante as últimas décadas, diversos pesquisadores têm dado atenção à dinâmica de sistemas que contêm múltiplos corpos, como pode ser comprovado pela vasta literatura disponível sobre o tema (WASFY, NOOR, 2003). Enquadra-se nesta grande linha de pesquisa acadêmica, que apresenta grande potencial de aplicação nas áreas industrial e de desenvolvimento tecnológico, a dinâmica de sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis. Como apontado por Shabana (1997), esta expressão está relacionada à modelagem computacional e à análise de sistemas que contêm corpos que apresentam a capacidade de se deformar, que se sujeitam a restrições e que são submetidos a movimentos de grande amplitude (o que inclui movimentos de corpo rígido, envolvendo grandes rotações, por exemplo, e também movimentos devidos a deformações). Ainda de acordo com o mesmo autor (SHABANA, 1997), um sistema composto por múltiplos corpos flexíveis pode conter tanto elementos flexíveis como rígidos, sendo uns conectados aos outros por intermédio de juntas e/ou elementos capazes de produzir forças, o que abrange, por exemplo, molas, amortecedores e atuadores. Devido às restrições introduzidas por conexões, os deslocamentos aos quais os corpos são submetidos não são totalmente independentes uns dos outros. Além dos problemas devidos a restrições e a grandes rotações, comuns quando na análise de sistemas que contêm múltiplos corpos rígidos, empenho também deve ser voltado para que uma correta modelagem da deformação dos corpos presentes em sistemas que apresentam múltiplos corpos flexíveis seja conseguida. Também é importante reconhecer que movimentos devido à presença de flexibilidade do sistema podem afetar de maneira significativa a metodologia utilizada na formulação do problema de grandes rotações e das restrições. O fato é que, independentemente dos corpos apresentarem pequenas ou grandes deformações, as equações que regem o movimento dos corpos flexíveis constituintes de um sistema analisado são altamente não lineares e geralmente exibem um forte acoplamento não linear entre diferentes modos de deslocamento (SHABANA, 1997). Desta forma, há a necessidade de utilização de dinâmica computacional para a construção e solução de modelos para sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis, uma vez que, além das não lineares inerentes a esta classe de problema, um grande número de coordenadas se faz necessário para que um modelo matemático razoável e confiável seja conseguido.

Os autores Wasfy e Noor (2003) concordam com Shabana (1997) sobre a definição de sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis e sobre a dinâmica que os rege. A importância da dinâmica de sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis também é aludida pelos pesquisadores em questão (WASFY, NOOR, 2003), já que, segundo os mesmos, ela pode desempenhar papel importante na análise, no projeto e no controle de muitos sistemas práticos de engenharia, como em: veículos de transporte de cunho terrestre, aéreo e espacial (bicicletas, automóveis, trens, aeronaves, espaçonaves); máquinas-ferramenta e de precisão; manipuladores e sistemas robóticos; mecanismos; estruturas terrestres articuladas (guindastes, pontes levadiças); estruturas espaciais articuladas (satélites, estações espaciais); e sistemas biodinâmicos (corpo humano, animais, insetos).

Graças às exigências cada vez mais rigorosas associadas a sistemas que contêm múltiplos corpos quanto às necessidades de peso reduzido (que na maioria dos casos leva a um aumento da flexibilidade de um dos componentes do sistema) e de altas velocidades, o problema de vibração a eles associado demanda cada vez mais atenção da comunidade científica (SHABANA, 1997; WASFY, NOOR, 2003; SHABANA, 2005; SCHIEHLEN, 2006). Isto se faz verdade uma vez que vibrações atuantes em sistemas mecânicos estão intimamente relacionadas: a processos de fadiga, de desgaste e de nucleação/propagação de defeitos, os quais podem levar à falha de um componente estrutural; e à produção de ruído, que pode representar risco à saúde de operadores e/ou usuários de determinado equipamento. Desta forma, faz-se razoável introduzir mecanismos de controle de vibrações em sistemas mecânicos que se mostrem suscetíveis aos problemas

mencionados anteriormente, visando tanto aumento da vida útil da estrutura, como o cumprimento de normas de segurança de cunho estrutural e/ou ambiental. Para tanto, diversas técnicas têm sido utilizadas, as quais podem ser distribuídas nas classes de controle ativo, passivo, híbrido e semiativo de vibrações (LIMA, 2003; CASCIATI, MAGONETTE, MARAZZI, 2006; DE SILVA, 2007).

Embora estratégias ativas, híbridas e semiativas talvez sejam mais desejáveis em determinadas aplicações, as técnicas de controle passivo tratam-se de uma alternativa viável tendo em vista as vantagens por elas apresentadas: baixo custo relativo de implementação; estabilidade inerente; e não dependência de uma fonte de energia externa. Uma das técnicas de controle passivo de vibrações está associada à utilização de materiais viscoelásticos visando à dissipação de energia vibratória sob a forma de energia térmica. Estes têm sido amplamente utilizados nas indústrias aeroespacial, aeronáutica, automobilística e civil, por exemplo (LIMA, 2003; LIMA 2007). São empregados, geralmente, sob a forma de fitas adesivas ou de amortecedores pré-fabricados, conforme ilustrado nas Figs. 1 a 5. Ainda, são vários os aspectos que devem ser levados em conta no tocante à modelagem dinâmica de materiais viscoelásticos. Embora carga dinâmica e pré-carga estática exerçam relativa influência na resposta exibida pelo material, são duas as variáveis que mais influenciam seu comportamento elastodinâmico: temperatura e frequência da excitação a que é submetido (NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985).

Dentre os modelos comumente empregados na simulação do comportamento destes materiais, citam-se aqueles que fazem uso de derivadas de ordem não inteira para descrever o comportamento do material, no domínio do tempo, a partir de equações diferenciais fracionárias. Os primeiros a fazerem uso desta técnica foram Bagley e Torvik (1979). Bagley (1983) mostra que este método não necessita ser interpretado apenas como um procedimento de ajuste de curvas, já que ele está associado, de certa forma, à descrição física do problema. A partir de então, modelos que envolvem derivadas fracionárias passaram a ser mais estudados e sua utilização, que anteriormente era restrita ao domínio de Laplace, ou da frequência, passou a ser investigada, também, no domínio do tempo, inclusive conjuntamente à utilização da técnica dos elementos finitos. Em trabalhos posteriores, Bagley e Torvik (1983, 1985) incorporaram um modelo que envolve derivadas fracionárias em modelos de elementos finitos de barras e vigas tratadas com camada restrita passiva, resolveram o problema de autovalor complexo resultante e realizaram ainda análise de respostas temporais. Aplicações mais recentes envolvem, por exemplo, a abordagem descrita por Galucio, Deü, e Ohayon (2004) para implementação de um modelo que envolve derivadas fracionárias a modelos de elementos finitos; neste último trabalho, os autores realizaram simulações transientes de uma viga que recebe tratamento viscoelástico superficial restrito.

Na sequência, aspectos relacionados tanto à modelagem de sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis, quanto à implementação de um modelo que contêm derivadas fracionárias para o comportamento viscoelástico em modelos de elementos finitos, serão levantados. Serão então apresentados alguns resultados numéricos oriundos de simulação computacional de um mecanismo de quatro barras flexível plano. Este é considerado sob duas condições, quais sejam as em que o mesmo não apresenta e apresenta, respectivamente, tratamento viscoelástico superficial utilizado para o fim de controle passivo de vibrações. Conclusões serão então apresentadas.

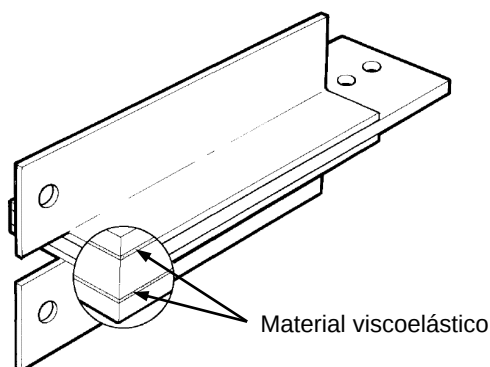


Figura 1: Exemplo da aplicação de materiais viscoelásticos em estruturas metálicas (adaptado de CALDWELL, 1986).



Figura 2: Amortecedores da linha industrial da fabricante Vibtech® que fazem uso de elastômeros (retirado de VIBTECH, 2011).

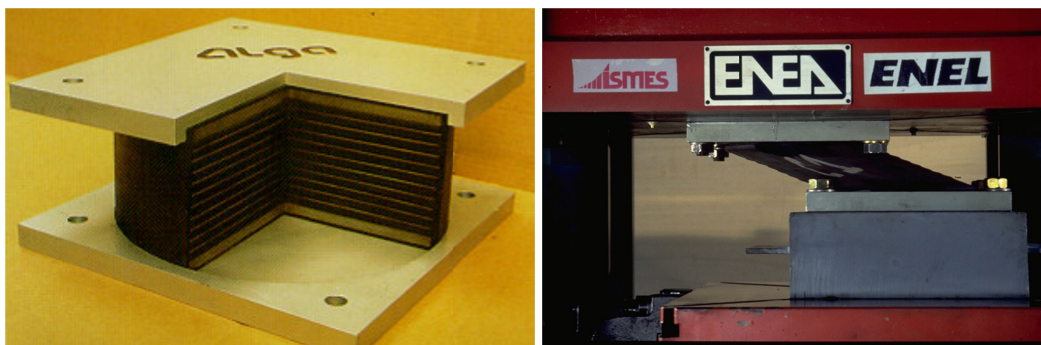


Figura 3: Blocos de borracha de alto amortecimento utilizados no isolamento de base de estruturas e mecanismos (retirado de GUERREIRO, 2007).

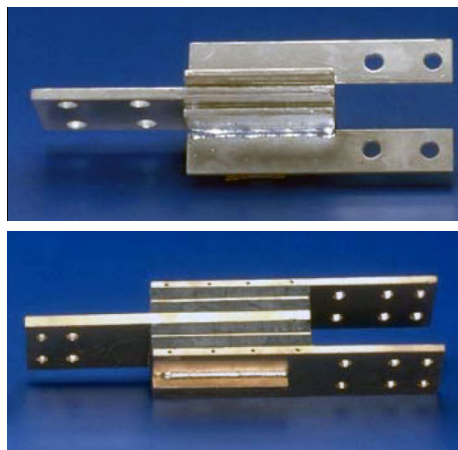


Figura 4: Amortecedores viscoelásticos translacionais típicos (GUERREIRO, 2007).



Figura 5: Fitas VHBTM de material viscoelástico da fabricante 3M[®] (retirado de 3M, 2011).

De acordo com Wasfy e Noor (2003), quando na consideração de problemas de dinâmica de sistemas que envolvem múltiplos corpos flexíveis, um referencial inercial serve como um sistema de referência global para os componentes do sistema. Ainda, referenciais intermediários locais são associados a cada um dos corpos, os quais geralmente seguem o movimento médio de corpo rígido local (rotação e translação) do corpo ao qual estão vinculados. Desta forma, o movimento da parte considerada com respeito a este referencial local é praticamente devido apenas a sua flexibilidade, isto é, aos movimentos causadores de deformação. Esta abordagem pode simplificar o cálculo das forças internas que surgem no material com respeito ao sistema de referência local, uma vez que métricas de tensão e de deformação as quais não são invariantes a movimentos de corpo rígido, como o tensor de tensões de Cauchy e o tensor de deformações infinitesimais, podem ser, nestes casos, utilizadas. Dois tipos principais de sistemas intermediários são comumente empregados para a modelagem dinâmica de sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis: sistemas de referência flutuantes; e sistemas de referência corrotacionais. Este último tipo de referência é utilizado principalmente quando na discretização de corpos flexíveis através do método dos elementos finitos, caso em que um sistema corrotacional é associado a cada um dos elementos finitos que juntos representam o componente considerado. Neste caso, também, o sistema de referência intermediário tenta seguir o movimento de corpo rígido médio apresentado pelo elemento finito ao qual se encontra associado. Sistemas flutuantes, por sua vez, tentam seguir o movimento de corpo rígido de toda uma subestrutura participante do sistema que contém múltiplos corpos, e podem ser utilizados também em situações em que não se faz emprego do método dos elementos finitos para discretização do contínuo. Outra abordagem possível envolve a consideração de métricas não lineares para deformações finitas, e das correspondentes métricas de tensão, para avaliar as forças internas desenvolvidas no material. Nesta situação, os movimentos de corpo rígido e devido à flexibilidade do contínuo são tratados sem que haja distinção entre os mesmos e diretamente no sistema de referência inercial global. A Fig. 6, adaptada do trabalho de Wasfy e Noor (2003), ilustra esquematicamente os referenciais utilizados por cada uma das formulações consideradas.

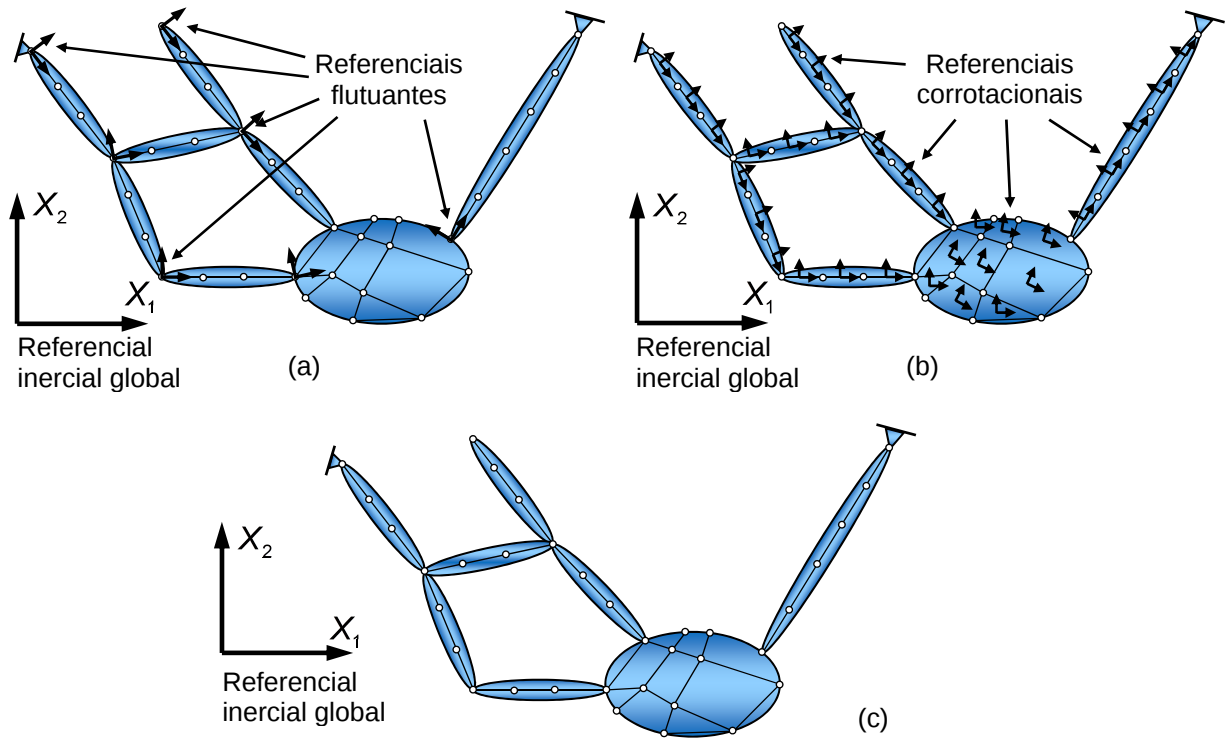


Figura 6: Referenciais utilizados por cada uma das formulações consideradas (adaptado de WASFY, NOOR, 2003). (a): Referenciais flutuantes; (b): Referenciais corrotacionais; (c) Referencial inercial global.

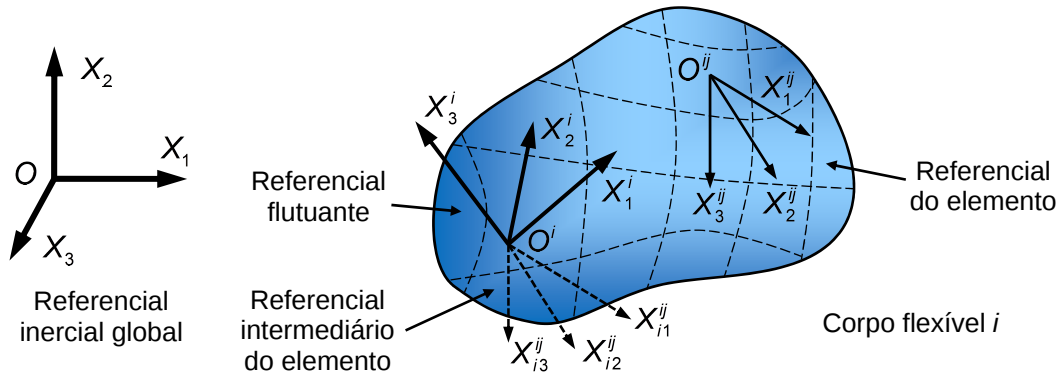


Figura 7: Referenciais utilizados para descrição da cinemática associada à formulação por referenciais flutuantes e elementos finitos (adaptado de SHABANA, 2005).

A equação básica utilizada para descrever a cinemática de um corpo flexível quando na utilização de um referencial intermediário flutuante em conjunto com o método dos elementos finitos é análoga àquela empregada quando na análise de um corpo rígido que se encontra em movimento tridimensional geral (SHABANA, 2005):

$$\mathbf{r}^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^{ij}. \quad (1)$$

Nesta: $\mathbf{r}^{ij}$ é o vetor posição de um ponto arbitrário do elemento j que faz parte da malha que discretiza o corpo flexível i , expresso no referencial inercial global $OX_1X_2X_3$; $\mathbf{R}^i$ é o vetor posição da origem do referencial flutuante $O^iX_1^iX_2^iX_3^i$ associado ao mesmo corpo flexível considerado; $\mathbf{A}^i$ é a matriz de rotação associada ao referencial flutuante $O^iX_1^iX_2^iX_3^i$ que dá informações sobre sua orientação; e $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$ é o vetor posição de um ponto arbitrário do elemento j associado ao corpo flexível i , este expresso no referencial local flutuante $O^iX_1^iX_2^iX_3^i$. Cabe salientar que:

- a) os vetores $\mathbf{r}^{ij}$ e $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$ são dependentes: da posição do ponto considerado no interior do volume do elemento j do corpo i , aqui denotada por $\mathbf{x}^{ij}$, esta sendo mensurada com respeito ao referencial local $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$ de cada elemento; e do tempo t ;
- b) o vetor $\mathbf{R}^i$ é dependente do tempo t ;
- c) a matriz de rotação $\mathbf{A}^i$ é considerada como sendo expressa em função de um vetor de parâmetros de rotação $\boldsymbol{\theta}^i$, como ângulos de Euler, parâmetros de Euler, parâmetros de Rodriguez, cossenos diretores, etc., sendo o mesmo dependente do tempo t .

Salienta-se que estas dependências não serão incluídas em grande parte das equações aqui apresentadas para facilitar a visualização e a compreensão por parte do leitor.

Os referenciais utilizados para descrição da cinemática de um elemento finito são mostrados na Fig. 7. Como já mencionado, $O X_1 X_2 X_3$, $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$ e $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$ são os referenciais inercial global, flutuante associado ao corpo flexível i e do elemento finito j que compõe a malha deste mesmo corpo, respectivamente. Na figura considerada é ainda mostrado outro referencial intermediário, $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$, associado a cada elemento finito utilizado na discretização do corpo flexível considerado. Este referencial tem origem coincidente com aquela do referencial flutuante associado ao componente i do sistema, bem como orientação fixa com respeito ao mesmo. Isto é, ambos os referenciais $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$ e $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$ estão sujeitos aos mesmos movimentos de translação e de rotação. Ainda, a orientação inicial do referencial $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$ é idêntica àquela assumida pelo referencial do elemento $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$ para a configuração de não deformação do sistema. Feitas estas considerações, o referencial intermediário $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$ está completamente caracterizado.

Para que se obtenha uma expressão apropriada para o vetor posição $\bar{\mathbf{u}}^{ij}$, é considerada inicialmente a equação de interpolação do campo de deslocamentos generalizados $\mathbf{w}^{ij}$ no interior de um elemento arbitrário j :

$$\mathbf{w}^{ij} = \mathbf{S}^{ij} \mathbf{e}^{ij}, \quad (2)$$

onde $\mathbf{S}^{ij} = \mathbf{S}^{ij}(\mathbf{x}^{ij})$ é a matriz das funções de forma associada ao elemento finito considerado e $\mathbf{e}^{ij} = \mathbf{e}^{ij}(t)$ é o vetor que contém seus graus de liberdade nodais. Cabe mencionar aqui que a Eq. (2) é válida uma vez que a mesma é expressa no referencial do elemento finito $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$. Como se considera que a matriz das funções de forma $\mathbf{S}^{ij}$ é capaz de descrever movimentos de translação de corpo rígido, a Eq. (2) pode ser expressa em qualquer referencial que é inicialmente paralelo ao referencial do elemento finito $O^j X_1^j X_2^j X_3^j$, como naquele intermediário $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$ introduzido anteriormente. Desta forma, é possível estabelecer que:

$$\mathbf{w}_i^{ij} = \mathbf{S}_i^{ij} \mathbf{e}_i^{ij}, \quad (3)$$

onde $\mathbf{w}_i^{ij}$ e $\mathbf{e}_i^{ij}$ são os vetores de deslocamentos generalizados e dos graus de liberdade elementares, respectivamente, ambos expressos no referencial $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$. Como este último referencial tem orientação fixa com respeito ao referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$, o vetor $\mathbf{e}_i^{ij}$ dos graus de liberdade nodais expressos no referencial intermediário do elemento finito j associado ao corpo flexível i pode ser definido a partir de uma rotação daqueles graus de liberdade nodais $\mathbf{q}_n^{ij}$ associado ao mesmo elemento finito e expressos, contudo, no referencial flutuante associado ao componente flexível da vez; isto é:

$$\mathbf{e}_i^{ij} = \bar{\mathbf{C}}^{ij} \mathbf{q}_n^{ij}, \quad (4)$$

onde $\bar{\mathbf{C}}^j$ é uma matriz de transformação ortogonal e constante. De forma análoga, o vetor posição $\bar{\mathbf{u}}^j$ expresso no sistema de referência flutuante pode ser obtido a partir de uma transformação do vetor de deslocamentos generalizados $\mathbf{w}_i^j$ definido com respeito à $O^i X_{i1}^j X_{i2}^j X_{i3}^j$:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{w}_i^j, \quad (5)$$

onde $\mathbf{C}^j$ é uma matriz de passagem entre os referenciais mencionados previamente. Substituindo a Eq. (3) na Eq. (5) resulta que:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{w}_i^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \mathbf{e}_i^j, \quad (6)$$

e considerando a Eq. (4), pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \mathbf{e}_i^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{q}_n^j. \quad (7)$$

Como colocado por Shabana (2005), esta equação define o vetor posição de um ponto arbitrário de um elemento finito do corpo flexível considerado com respeito ao sistema de coordenadas flutuante a ele associado. Para que condições de conectividade entre elementos possam ser obedecidas, faz-se uso da equação seguinte:

$$\mathbf{q}_n^j = \mathbf{B}_1^j \mathbf{q}_n^i, \quad (8)$$

onde $\mathbf{B}_1^j$ é uma matriz de transformação Booleana e $\mathbf{q}_n^i$ é o vetor que contém todos os graus de liberdade nodais associados ao componente i do sistema considerado. Resulta após introdução da Eq. (8) naquela Eq. (7):

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{q}_n^j = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{B}_1^j \mathbf{q}_n^i = \mathbf{N}^j \mathbf{q}_n^i. \quad (9)$$

Nesta, $\mathbf{N}^j = \mathbf{N}^j(\mathbf{x}^j) = \mathbf{C}^j \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{C}}^j \mathbf{B}_1^j$ pode ser encarada como uma matriz de interpolação expandida (por interpolar deslocamentos generalizados a partir do vetor de todos os graus de liberdades nodais associados ao corpo flexível i) e expressa no referencial flutuante $O^i X_1^i X_2^i X_3^i$.

Pode-se observar que a Eq. (9) contempla modos de corpo rígido para $\bar{\mathbf{u}}^j$ devido à presença da matriz das funções de forma $\mathbf{S}^j$ associada aos elementos finitos considerados. Entretanto, os modos de corpo rígido de cada componente do sistema já são considerados no modelo devido à utilização daquela Eq. (1), na qual se mostram presentes uma translação e uma rotação entre referenciais, associadas ao vetor $\mathbf{R}^i$ e à matriz $\mathbf{A}^i$, respectivamente. Parte-se então a eliminação dos modos de corpo rígido presentes na Eq. (9); o vetor $\mathbf{q}_n^i$ pode ser expresso sob a forma:

$$\mathbf{q}_n^i = \mathbf{q}_0^i + \bar{\mathbf{q}}_f^i, \quad (10)$$

onde $\mathbf{q}_0^i$ e $\bar{\mathbf{q}}_f^i$ são os vetores que contêm as contribuições aos graus de liberdades nodais devidas à configuração inicial (não deformada) e à flexibilidade, respectivamente. Para eliminar modos de corpo rígido devidos às funções de forma associadas aos elementos finitos utilizados para discretização de um componente do sistema é então utilizado um conjunto de equações algébricas que relacionam a parte flexível dos graus de liberdade nodais. Isto pode ser feito através de uma matriz de transformação linear $\mathbf{B}_2^i$ para que se defina um novo conjunto de graus de liberdade nodais flexíveis $\mathbf{q}_f^i$ que sejam independentes entre si. Então:

$$\bar{\mathbf{q}}_f^i = \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i. \quad (11)$$

Fazendo uso das Eqs. (10) e (11), a Eq. (9) pode ser reescrita sob a forma:

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{N}^j \mathbf{q}_n^i = \mathbf{N}^j (\mathbf{q}_0^i + \bar{\mathbf{q}}_f^i) = \mathbf{N}^j (\mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i). \quad (12)$$

Esta última equação é adequada para correta representação, em conjunto com a Eq. (1), do campo de deslocamentos a que um elemento finito arbitrário j presente na malha de um corpo flexível i é submetido. Isto se faz verdade já que nesta última o campo de deslocamentos não apresenta modos de corpo rígido, ao contrário do que acontece com a Eq. (9).

Substituindo a Eq. (12) na Eq. (1), resulta finalmente uma equação para o vetor posição $\mathbf{r}^j$ expresso no referencial inercial global:

$$\mathbf{r}^j = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^j = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{N}^j (\mathbf{q}_0^i + \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i). \quad (13)$$

A partir desta última, o vetor velocidade pode ser obtido a partir de diferenciação com respeito ao tempo; a partir do mesmo, pode-se construir uma expressão para a energia cinética para um elemento finito genérico e, conseqüentemente, para o corpo ao qual este se encontra associado. Esta última pode ser expressa sob a forma seguinte:

$$T^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} T^j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \left[\sum_{j=1}^{n_e^i} \mathbf{M}^j \right] \dot{\mathbf{q}}^i = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i, \quad (14)$$

onde n_e^i é o número de elementos finitos utilizados na discretização do corpo flexível i e $\mathbf{M}^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} \mathbf{M}^j = \mathbf{M}^i(\mathbf{q}^i)$ é a matriz de massa a ele associada, a qual incorpora inércias vinculadas tanto às parcelas rígidas quanto àquelas flexíveis de seu movimento.

Outro aspecto que deve ser levado em conta quando na modelagem da dinâmica de sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis diz respeito aos esforços internos provocados no material de determinado componente do sistema. O trabalho virtual associado aos mesmos pode ser escrito sob a forma:

$$\delta W_s^j = - \int_{V^j} (\boldsymbol{\sigma}^j)^T \delta \boldsymbol{\epsilon}^j d\mathbf{x}^j, \quad (15)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^j$ e $\boldsymbol{\epsilon}^j$ são os vetores que contêm as componentes dos tensores das tensões e das deformações às quais o elemento j do corpo flexível i está sujeito. Para dar continuidade ao desenvolvimento, faz-se necessário expressar $\boldsymbol{\epsilon}^j$ em termos dos deslocamentos devidos à flexibilidade do contínuo $\bar{\mathbf{u}}_f^j$. Considerando pequenas deformações, pode-se estabelecer que:

$$\boldsymbol{\epsilon}^j = \mathbf{D}^j \bar{\mathbf{u}}_f^j, \quad (16)$$

onde $\mathbf{D}^j$ é uma matriz que contém operadores diferenciais. Considerando a Eq. (12), o vetor de deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}^j$ pode ser escrito como a soma de duas parcelas $\bar{\mathbf{u}}_0^j$ e $\bar{\mathbf{u}}_f^j$ analogamente ao apresentado na Eq. (10):

$$\bar{\mathbf{u}}^j = \bar{\mathbf{u}}_0^j + \bar{\mathbf{u}}_f^j. \quad (17)$$

Comparando a Eq. (12) com a Eq. (17), identifica-se que $\bar{\mathbf{u}}_f^j = \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i \mathbf{q}_f^i$. Fazendo uso do anterior e da Eq. (16), o trabalho virtual δW_s^j dado na Eq. (15) pode ser reescrito como:

$$\delta W_s^j = - \int_{V^j} (\boldsymbol{\sigma}^j)^T \delta \boldsymbol{\epsilon}^j d\mathbf{x}^j = - \int_{V^j} (\boldsymbol{\sigma}^j)^T \mathbf{D}^j \mathbf{N}^j \mathbf{B}_2^i d\mathbf{x}^j \delta \mathbf{q}_f^i. \quad (18)$$

Deste ponto em diante, informações relacionadas à lei constitutiva do material necessitam ser levadas em conta para que o desenvolvimento possa continuar. Entretanto, de forma geral, pode-se escrever que:

$$\delta W_s^{ij} = - \int_{V^{ij}} (\boldsymbol{\sigma}^{ij})^T \mathbf{D}^{ij} \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i d\mathbf{x}^{ij} \delta \mathbf{q}_f^i = -(\mathbf{Q}_s^{ij})^T \delta \mathbf{q}_f^i, \quad (19)$$

onde $(\mathbf{Q}_s^{ij})^T = \int_{V^{ij}} (\boldsymbol{\sigma}^{ij})^T \mathbf{D}^{ij} \mathbf{N}^{ij} \mathbf{B}_2^i d\mathbf{x}^{ij}$ é o vetor de carregamentos internos desenvolvidos no material a nível elementar. Dependendo da lei constitutiva do material, este vetor pode ser ou não ser linear com respeito ao vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_f^i$. A contribuição oriunda de todo o corpo flexível devida às forças internas por ele experimentadas pode ser então conseguida pela soma das contribuições individuais de cada um dos elementos finitos:

$$\delta W_s^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} \delta W_s^{ij} = - \left[\sum_{j=1}^{n_e^i} (\mathbf{Q}_s^{ij})^T \right] \delta \mathbf{q}^i = -(\mathbf{Q}_s^i)^T \delta \mathbf{q}^i, \quad (20)$$

na qual $\mathbf{Q}_s^i = \sum_{j=1}^{n_e^i} \mathbf{Q}_s^{ij}$ é o vetor de carregamentos internos associado a todo o corpo flexível i .

Além disso, pode acontecer de forças externas estarem aplicadas ao corpo flexível considerado. Estas podem ser incluídas na formulação quando na consideração de seu trabalho virtual. De maneira geral, pode-se escrever o trabalho virtual dos esforços externos generalizados δW_e^i associados ao corpo i sob a forma:

$$\delta W_e^i = (\mathbf{Q}_e^i)^T \delta \mathbf{q}^i, \quad (21)$$

onde $\mathbf{Q}_e^i$ é o vetor dos esforços externos generalizados.

Outro ponto importante a ser levado em conta quando na modelagem da dinâmica de sistemas que contêm múltiplos corpos é a presença de restrições. Estas podem ser classificadas em holonômicas e não holonômicas, e podem ser devidas à presença de vínculos entre um ou mais componentes do sistema, à especificação de movimentos ou mesmo para que seja possível considerar a presença de contato. Para maiores detalhes a respeito de restrições e suas classificações, recomenda-se ao leitor consultar Meirovitch (1970) e Shabana (2005). Equações algébricas não lineares representando restrições holonômicas podem ser escritas sob a forma seguinte (SHABANA, 2005):

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \quad (22)$$

onde $\mathbf{q} = [(\mathbf{q}^1)^T \quad (\mathbf{q}^2)^T \quad \cdots \quad (\mathbf{q}^{n_b})^T]^T$ é o vetor que contém todos os graus de liberdade rígidos e flexíveis de todos os n_b corpos que constituem o sistema analisado. A matriz Jacobiana das restrições $\mathbf{C}_q$ pode ser obtida se o vetor de restrições $\mathbf{C}$ for diferenciado com respeito ao vetor de graus de liberdade $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{C}_q = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

onde $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T$ e n é o número de coordenadas generalizadas utilizadas para descrição do movimento do sistema por completo. Assume-se, sem perda de generalidade, que $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = [C_1(\mathbf{q}, t) \quad C_2(\mathbf{q}, t) \quad \cdots \quad C_{n_c}(\mathbf{q}, t)]^T$ é composta por n_c ($\leq n$) equações de restrição linearmente independentes. Cabe salientar que o número global de graus de liberdade do sistema é dado pela diferença $n - n_c$.

Com o apresentado até agora, equações de Lagrange podem ser utilizadas para que se estabeleçam as equações do movimento de cada um dos corpos flexíveis que constituem o sistema de múltiplos corpos analisado. De acordo com a mecânica analítica, para quando restrições do tipo considerado na Eq. (22) encontram-se presentes no sistema considerado, as equações de Lagrange a serem utilizadas para cada um dos corpos flexíveis são da forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T - \left(\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^i, \quad (24)$$

onde $\mathbf{C}_q$ é a matriz Jacobiana das restrições associada ao corpo flexível i , $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$ é um vetor de multiplicadores de Lagrange utilizados para inclusão das restrições na formulação e $\mathbf{Q}^i$ é o vetor dos esforços generalizados associados ao corpo i . Para se determinar este último vetor, faz-se necessário considerar o trabalho virtual δW^i realizado por todos os esforços que atuam no corpo que não aqueles devidos às forças de inércia. No caso considerado, δW^i é dado por:

$$\delta W^i = \delta W_s^i + \delta W_e^i, \quad (25)$$

com δW_s^i e δW_e^i dados nas Eqs. (20) e (21) apresentadas anteriormente, respectivamente. Fazendo uso das mesmas, resulta que:

$$\delta W^i = \delta W_s^i + \delta W_e^i = -(\mathbf{Q}_s^i)^T \delta \mathbf{q}^i + (\mathbf{Q}_e^i)^T \delta \mathbf{q}^i = (\mathbf{Q}^i)^T \delta \mathbf{q}^i \Rightarrow \mathbf{Q}^i = -\mathbf{Q}_s^i + \mathbf{Q}_e^i. \quad (26)$$

Uma expressão para a energia cinética T^i foi apresentada na Eq. (14), a partir da qual pode-se calcular:

$$\left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \right] \right\}^T; \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T = \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T = \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i. \quad (28)$$

Substituindo as Eqs. (26) – (28) na Eq. (24), resulta que:

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{Q}_s^i + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e^i + \mathbf{Q}_v^i, \quad (29)$$

onde:

$$\mathbf{Q}_v^i = -\dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \right] \right\}^T \quad (30)$$

é o vetor que dá as contribuições devidas às forças de inércia centrífugas e de Coriolis, quadráticas no vetor das velocidades $\dot{\mathbf{q}}^i$.

Estabelecidas as equações do movimento para cada um dos corpos do sistema, um sistema global de equações diferenciais pode ser formado:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_s + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v, \quad (31)$$

onde:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} (\mathbf{q}^1)^T & (\mathbf{q}^2)^T & \dots & (\mathbf{q}^{n_b})^T \end{bmatrix}^T; \quad (32)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}^1, \mathbf{M}^2, \dots, \mathbf{M}^{n_b}); \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_s^1)^T & (\mathbf{Q}_s^2)^T & \dots & (\mathbf{Q}_s^{n_b})^T \end{bmatrix}^T; \quad (34)$$

$$\mathbf{C}_q^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_{q^1}^T)^T & (\mathbf{C}_{q^2}^T)^T & \dots & (\mathbf{C}_{q^{n_b}}^T)^T \end{bmatrix}^T; \quad (35)$$

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_e^1)^T & (\mathbf{Q}_e^2)^T & \dots & (\mathbf{Q}_e^{n_b})^T \end{bmatrix}^T; \quad (36)$$

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_v^1)^T & (\mathbf{Q}_v^2)^T & \dots & (\mathbf{Q}_v^{n_b})^T \end{bmatrix}^T. \quad (37)$$

Para que o sistema de equações diferenciais mostrado na Eq. (31) possa ser resolvido, devem ser consideradas, simultaneamente, aquelas equações de restrição dadas na Eq. (22), uma vez que o tipo de formulação empregado é aumentado pela utilização de multiplicadores de Lagrange. Obtém-se desta forma um sistema de equações formado tanto por equações diferenciais quanto por equações algébricas, para o qual comumente se adota a nomenclatura de sistema de equações algébrico-diferenciais:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_s + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (38)$$

cujas soluções mostra-se desafiadora mesmo do ponto de vista numérico, uma vez que até mesmo as equações diferenciais são não lineares. Ainda, a ordem do sistema completo pode ser problemática e acarretar mau condicionamento de matrizes. Por estes motivos pode-se tornar mandatório o emprego de técnicas de redução de modelos.

A partir do sistema de equações algébrico-diferenciais apresentado na Eq. (38), podem ser realizadas análises transientes e/ou modais do sistema físico de interesse. As primeiras são conseguidas mediante integração numérica das equações do movimento sujeitas àquelas de restrição (FISSETTE, VANEGHEM, 1996; BATHE, BAIG, 2005; BATHE, 2007; BLAJER, 2011). Geralmente eliminam-se os multiplicadores de Lagrange da formulação, transformando o problema algébrico-diferencial num puramente diferencial, ou faz-se uso de métodos de estabilização das restrições (mediante técnicas que fazem uso de projeção) para que estas sejam obedecidas em todo e qualquer instante de tempo considerado; integração direta do sistema mostrado na Eq. (38) também pode ser conduzida, pela utilização de métodos explícitos ou implícitos, mas não se tem garantia de que erros induzidos pelo processo de integração nas restrições não se propaguem. Já análises modais podem ser conduzidas após linearização do sistema algébrico-diferencial que descreve o movimento do sistema que contém múltiplos corpos; mais detalhes a respeito deste procedimento podem ser encontrados nos trabalhos de Escalona e Chamorro (2008) e Masarati (2009).

Serão agora discutidos aspectos relacionados à modelagem de materiais viscoelásticos com a utilização de leis constitutivas que envolvem equações diferenciais de ordem não inteira. De acordo com Galucio, Deü e Ohayon (2004), até início da década de 1980, o Cálculo Fracionário aplicado à modelagem de materiais viscoelásticos era interpretado como um método de ajuste de curvas. Ainda segundo os mesmos autores, Bagley e Torvik (1983) propuseram em seu trabalho uma justificativa para a utilização desta ferramenta matemática num contexto físico-termodinâmico, sendo o modelo fracionário proposto por estes autores para comportamento viscoelástico uma das atuais referências na literatura. Hoje grande parte dos trabalhos dedicados ao tema vem de encontro à implementação de modelos que envolvem derivação de ordem fracionária à formulação por elementos finitos. Para tanto, geralmente faz-se uso de métodos baseados na discretização temporal do operador de derivação fracionária presente na relação tensão-deformação de materiais viscoelásticos.

No âmbito da implementação de modelos de viscoelasticidade envolvendo derivadas fracionárias à formulação de elementos finitos, Schmidt e Gaul (2002) desenvolveram um elemento finito tridimensional que leva em conta as relações constitutivas do material (dadas sob a forma de equações diferenciais fracionárias), sendo estas solucionadas pelo método de discretização de Grünwald-Letnikov. Galucio, Deü e Ohayon (2004) apresentam em seu trabalho outra metodologia de implementação da natureza viscoelástica do material à formulação de elementos finitos e que, em termos computacionais, é relativamente superior à metodologia adotada por Schmidt e Gaul (2002). O modelo viscoelástico unidimensional por eles adotado é da forma:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad (39)$$

onde t denota o tempo, $\sigma(t)$ denota a tensão, $\varepsilon(t)$ denota a deformação, τ é o tempo de relaxação do material, E_0 é seu módulo estático (ou de baixa frequência), e E_∞ é seu módulo dinâmico (ou de alta frequência). Do mesmo, quando na utilização da aproximação de Grünwald-Letnikov (SCHMIDT, GAUL, 2002; GALUCIO, DEÜ, OHAYON, 2004), resulta que $\sigma(t)$ é dada por:

$$\sigma(t) = [E_0 + c(E_\infty - E_0)] \varepsilon(t) + cE_\infty \sum_{k=1}^{N_p} A_{k+1}^{(\alpha)} \bar{\varepsilon}(t - k\Delta t), \quad (40)$$

onde $c = \tau^\alpha [\tau^\alpha + (\Delta t)^\alpha]^{-1}$ é uma constante adimensional, Δt é o passo de tempo adotado na discretização temporal do intervalo $[0, t]$, N_p é o número de pontos do histórico de $\bar{\varepsilon}(t)$ utilizados na discretização para representação do caráter não local do operador de diferenciação fracionária, e $A_{k+1}^{(\alpha)}$ são os coeficientes de Grünwald para uma derivada de ordem α , sendo estes dados por:

$$A_{k+1}^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k + 1)} = \frac{k - \alpha - 1}{k} A_k^{(\alpha)}, \quad (41)$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ denota a função Gamma, com $\alpha > 0$, e $A_1^{(\alpha)} := 1$ para qualquer valor de α . Ainda, tem-se que a deformação anelástica $\bar{\varepsilon}(t)$ é dada por:

$$\bar{\varepsilon}(t) = (1 - c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t) - c \sum_{k=1}^{N_p} A_{k+1}^{(\alpha)} \bar{\varepsilon}(t - k\Delta t). \quad (42)$$

A relação dada na Eq. (40) pode ser estendida para casos multidimensionais quando na consideração dos vetores de tensões $\boldsymbol{\sigma}(t)$ e de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, bem como da matriz $\mathbf{E}_0$ das propriedades associadas ao material viscoelástico para baixas frequências. Admitindo que o mesmo seja isotrópico e que seu coeficiente de Poisson ν não varie com a frequência, resulta que:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{1}{E_0} [E_0 + c(E_\infty - E_0)] \mathbf{E}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(t) + c \frac{E_\infty}{E_0} \mathbf{E}_0 \sum_{k=1}^{N_p} A_{k+1}^{(\alpha)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t - k\Delta t). \quad (43)$$

O fator $\mathbf{E}_0/E_0$ introduzido na Eq. (43) anterior garante que os comportamentos corretos do material sejam levados em conta quando na análise de situações em que sua deformação envolva simultaneamente componentes axiais e cisalhantes, por exemplo.

Para mostrar como a Eq. (43) pode ser aplicada no contexto de modelagem por elementos finitos, considera-se aqui o caso em que a formulação do problema considerado é desenvolvida quando tomando por base interpolação de deslocamentos. Neste caso, o vetor de deslocamentos generalizados $\mathbf{u}^j(\mathbf{x}^j, t)$ de um elemento finito j utilizado na malha de um meio contínuo pode ser calculado a partir de:

$$\mathbf{u}^j(\mathbf{x}^j, t) = \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j) \mathbf{q}^j(t), \quad (44)$$

onde $\mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j)$ é a matriz das funções de forma ou de interpolação associadas ao elemento j , dependente do vetor posição $\mathbf{x}^j$, e $\mathbf{q}^j(t)$ é o vetor que contém seus graus de liberdade. As deformações que atuam no interior do volume do elemento podem ser computadas se aplicando um operador diferencial $\mathbf{D}^j$ à Eq. (44), o que acarreta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}^j, t) = \mathbf{D}^j \mathbf{u}^j(\mathbf{x}^j, t) = \mathbf{D}^j \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j) \mathbf{q}^j(t). \quad (45)$$

Fazendo uso da Eq. (43), o vetor das tensões no interior do elemento é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^j(\mathbf{x}^j, t) = \frac{1}{E_0^j} [E_0^j + c^j (E_\infty^j - E_0^j)] \mathbf{E}_0^j \boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}^j, t) + c^j \frac{E_\infty^j}{E_0^j} \mathbf{E}_0^j \sum_{k=1}^{N_p} A_{k+1}^{(\alpha^j)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^j(\mathbf{x}^j, t - k\Delta t), \quad (46)$$

onde o vetor de deformações anelásticas $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^j(\mathbf{x}^j, t)$ pode ser calculado de maneira análoga a $\boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}^j, t)$ modificando-se a Eq. (45):

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^j(\mathbf{x}^j, t) = \mathbf{D}^j \bar{\mathbf{u}}^j(\mathbf{x}^j, t) = \mathbf{D}^j \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j) \bar{\mathbf{q}}^j(t), \quad (47)$$

sendo $\bar{\mathbf{q}}^j(t)$ um vetor de graus de liberdade anelásticos associados ao elemento finito considerado. Substituindo as Eqs. (45) e (47) na Eq. (46), resulta para o vetor das tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}^j(\mathbf{x}^j, t) = \frac{1}{E_0^j} [E_0^j + c^j (E_\infty^j - E_0^j)] \mathbf{E}_0^j \mathbf{D}^j \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j) \mathbf{q}^j(t) + c^j \frac{E_\infty^j}{E_0^j} \mathbf{E}_0^j \mathbf{D}^j \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j) \sum_{k=1}^{N_p} A_{k+1}^{(\alpha^j)} \bar{\mathbf{q}}^j(t - k\Delta t). \quad (48)$$

Para inclusão das forças internas na formulação por elementos finitos, considera-se o trabalho virtual devido aos esforços internos que surgem no material devido às sollicitações externas, dado por:

$$\delta W_s^j = - \int_{V^j} [\boldsymbol{\sigma}^j(\mathbf{x}^j, t)]^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^j(\mathbf{x}^j, t) d\mathbf{x}^j. \quad (49)$$

Introduzindo na equação anterior as Eqs. (45) e (48), resulta, após desenvolvimento:

$$\delta W_s^j = - \frac{1}{E_0^j} [E_0^j + c^j (E_\infty^j - E_0^j)] [\mathbf{q}^j(t)]^T (\mathbf{K}^j)^T \delta \mathbf{q}^j(t) - c^j \frac{E_\infty^j}{E_0^j} \sum_{k=1}^{N_p} A_{k+1}^{(\alpha^j)} [\bar{\mathbf{q}}^j(t - k\Delta t)]^T (\mathbf{K}^j)^T \delta \mathbf{q}^j(t), \quad (50)$$

onde:

$$\mathbf{K}^j = \int_{V^j} [\mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j)]^T (\mathbf{D}^j)^T \mathbf{E}_0^j \mathbf{D}^j \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j) d\mathbf{x}^j \quad (51)$$

é reconhecida como a matriz de rigidez para baixas frequências do material viscoelástico.

Estabelecida a Eq. (50) e sabendo que a energia cinética associada à formulação por elementos finitos é dada por:

$$T^j = \frac{1}{2} \int_{V^j} \rho^j [\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^j, t)]^T \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^j, t) d\mathbf{x}^j = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}^j(t)]^T (\mathbf{M}^j)^T \dot{\mathbf{q}}^j(t), \quad (52)$$

onde ρ^j é a densidade do material e $\mathbf{M}^j$ é a matriz de massa elementar, sendo ela dada por:

$$\mathbf{M}^j = \int_{V^j} \rho^j [\mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j)]^T \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^j) d\mathbf{x}^j, \quad (53)$$

pela aplicação das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^j}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \right)^T - \left(\frac{\partial T^j}{\partial \mathbf{q}^j} \right)^T = \mathbf{Q}^j, \quad (54)$$

onde $\mathbf{Q}^j$ é o vetor dos carregamentos generalizados, resultam as seguintes equações a nível elementar:

$$\mathbf{M}^j \ddot{\mathbf{q}}(t) + \frac{1}{E_0^j} [E_0^j + c^j (E_\infty^j - E_0^j)] \mathbf{K}^j \mathbf{q}^j(t) = \mathbf{Q}_e^j(t) - c^j \frac{E_\infty^j}{E_0^j} \mathbf{K}^j \sum_{k=1}^{N_p} A_{k+1}^{(\alpha^j)} \bar{\mathbf{q}}^j(t - k\Delta t), \quad (55)$$

onde $\mathbf{Q}_e^j(t)$ é o vetor de carregamentos generalizados externos.

Proporcionado um pouco da fundamentação teórica associada ao trabalho desenvolvido, são apresentados na sequência resultados obtidos a partir da simulação numérica de um sistema que contém múltiplos corpos flexíveis particular: um mecanismo de quatro barras plano. A geometria do problema é ilustrada esquematicamente na Fig. 8, e a Tab. 1 traz os dados dos materiais e da geometria de cada uma das barras, inclusive para a configuração em que um tratamento superficial restrito com material viscoelástico é utilizado visando o controle de vibrações naquela barra 4. Salienta-se que o tratamento se dá, quando realizado, ao longo de todo seu comprimento. Quanto à barra 1, a mesma apresenta um comprimento de 0,600 m. As barras 1 e 2 são consideradas como sendo rígidas, enquanto que aquelas 3 e 4 são admitidas flexíveis.

Simulações transientes e análises modais foram conduzidas para o sistema que contém múltiplos corpos considerado. Ambos os tipos de análise foram conduzidos em ambiente MATLAB® e por intermédio do software comercial ANSYS®.

As análises transientes realizadas consideraram o intervalo temporal [0,1] s o qual foi discretizado com passos de tempo constantes de $\Delta t = 0,0001$ s. No programa desenvolvido em ambiente MATLAB®, para modelagem da flexibilidade das barras 3 e 4 fez-se uso de elementos finitos do tipo viga caracterizados por dois nós e com três graus de liberdade por nó (duas translações e uma rotação). Para os mesmos, hipóteses de Euler-Bernoulli são adotadas para movimentos transversais e hipóteses de barra são adotadas para movimentos longitudinais. Ainda, um elemento finito de viga sanduíche com três camadas (viga base, camada viscoelástica e camada restrigente) apresentando dois nós e quatro graus de liberdade por nó (três translações e uma rotação) foi utilizado para modelagem do tratamento superficial restrito com material viscoelástico. Quando na construção do modelo de elementos finitos para a viga sanduíche mencionada, hipóteses de Euler-Bernoulli são admitidas para a viga base e para a camada restrigente, enquanto que aquelas associadas à viga de Timoshenko são adotadas para a camada viscoelástica (consultar GALUCIO, DEÜ e OHAYON, 2004, para mais detalhes). Quanto à discretização, foram utilizados 30 e 50 elementos finitos para as barras 3 e 4, respectivamente.

Quanto ao código utilizado para simulação do mecanismo de quatro barras considerado na Fig. 8 no software ANSYS®, elementos do tipo BEAM3 com não linearidade geométrica foram considerados para as barras 3 e 4, e utilizados em mesmo número que no algoritmo desenvolvido em linguagem MATLAB®.

Vários cenários de simulação foram considerados. Estes são caracterizados pelas informações dadas a seguir:

- Cenário 1:** neste caso é admitida temperatura de operação constante em 27 °C e velocidades de rotação da barra 2 constantes nos valores de 200, 300, 400 e 500 RPM; são consideradas as situações em que a barra 4 apresenta e não apresenta tratamento viscoelástico; dados do material viscoelástico para a temperatura considerada são mostrados na Tab. 1;
- Cenário 2:** a velocidade de rotação da barra 2 assume um valor único de 400 RPM e várias temperaturas de operação são consideradas, nos valores de 0, 20, 40 e 60 °C; é de interesse neste caso apenas a situação em que a barra 4 apresenta tratamento viscoelástico superficial restrito, já que se deseja avaliar a influência do parâmetro admitido como variável sobre a eficiência do material viscoelástico em cumprir o objetivo de con-

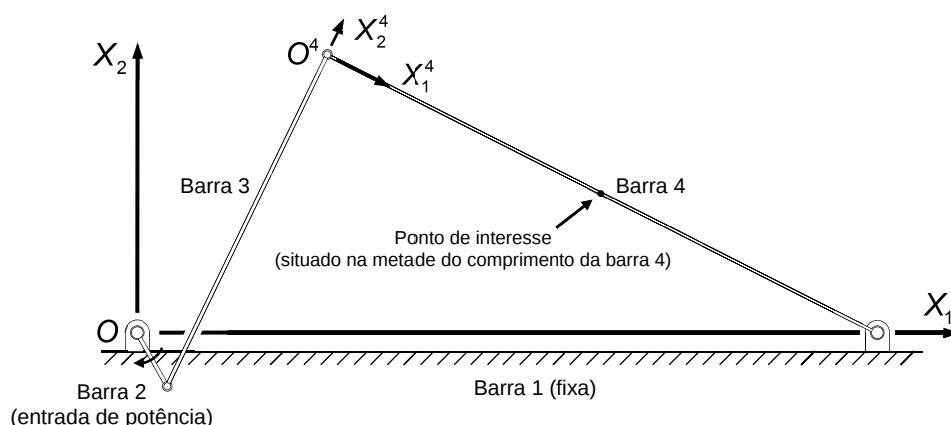


Figura 8: Representação esquemática do mecanismo de quatro barras plano considerado.
 OX_1X_2 : Referencial global; $O^4X_1^4X_2^4$: Referencial flutuante associado à barra 4.

Tabela 1: Características associadas às barras 2, 3 e 4 do mecanismo considerado.

Característica		Barra 2	Barra 3	Barra 4
Geometria	Viga base			
	Comprimento [m]	0,050	0,300	0,500
	Espessura [m]	0,003175	0,003175	0,00238125
	Largura [m]	0,01905	0,01905	0,0254
	Camada viscoelástica			
	Comprimento [m]	–	–	0,500
	Espessura [m]	–	–	0,0005
	Largura [m]	–	–	0,0254
	Camada restrigente			
	Comprimento [m]	–	–	0,500
	Espessura [m]	–	–	0,001
	Largura [m]	–	–	0,0254
Material	Viga base	Alumínio	Alumínio	Alumínio
	Módulo de elasticidade longitudinal [Pa]	$70,3 \times 10^9$	$70,3 \times 10^9$	$70,3 \times 10^9$
	Massa específica [kg/m ³]	2690	2690	2690
	Camada viscoelástica	Nenhum	Nenhum	ISD112 à 27 °C ⁽¹⁾
	Módulo de elasticidade long. estático [Pa]	–	–	$1,5 \times 10^6$
	Módulo de elasticidade long. a altas freq. [Pa]	–	–	$69,9495 \times 10^6$
	Tempo de relaxação [s]	–	–	$1,4052 \times 10^{-5}$
	α (ordem de derivação fracionária)	–	–	0,7915
	Coefficiente de Poisson	–	–	0,5
	Massa específica [kg/m ³]	–	–	1600
	Camada restrigente	Nenhum	Nenhum	Alumínio
	Módulo de elasticidade longitudinal [Pa]	–	–	$70,3 \times 10^9$
	Massa específica [kg/m ³]	–	–	2690

⁽¹⁾ Os parâmetros dados para este material viscoelástico foram identificados por Galucio, Deü e Ohayon (2004).

trole passivo de vibrações; salienta-se que os dados para o material viscoelástico considerado foram obtidos para cada uma das temperaturas consideradas a partir de um procedimento de otimização considerando curvas “experimentais” (equações retiradas da literatura, DA SILVA, 2003) associadas ao mesmo;

- c) **Cenário 3:** a velocidade de rotação da barra 2 assume um valor único de 400 RPM, a temperatura de operação vale 28 °C e várias espessuras do tratamento viscoelástico assumindo os valores de 0,5, 1,0, 1,5 e 2,0 mm são consideradas; neste caso também se deseja avaliar a influência do parâmetro admitido como variável sobre a eficiência do material viscoelástico em cumprir o objetivo de controle passivo de vibrações.

Além disso, em todas as situações foram admitidas velocidades iniciais nulas, presença de efeitos gravitacionais e que a barra 2 encontrava-se na posição horizontal ocupando a parcela do plano

analisado em que $X_1 \geq 0$ para o instante em que $t = 0$ s.

Simulações no software ANSYS® foram realizadas apenas para o Cenário 1 apresentado anteriormente e para aquela situação em que tratamento superficial restrito com material viscoelástico não se encontrava presente na barra 4. Estas foram executadas com o intuito de validar o código computacional desenvolvido em ambiente MATLAB®. As Figs. 9 a 12 mostram os deslocamentos nas direções de X_1 e X_2 obtidos para o ponto de interesse considerado na Fig. 8 para esta situação. Como deslocamento denomina-se aqui a diferença $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_p|_{t=0}$, onde $\mathbf{r}_p$ denota o vetor posição avaliado para o ponto de interesse considerado, o qual pode ser obtido em etapa de pós-processamento fazendo correto uso da Eq. (13). Destaca-se aqui a ótima concordância de resultados para os casos em que a velocidade angular da barra 2, ω_2 , assume os valores de 200, 300 e 400 RPM, considerados, até certo ponto, baixos. Para a situação em que ω_2 vale 500 RPM, entretanto, diferenças significativas começam a se mostrar presentes, as quais são creditas a uma predição errônea por parte da teoria linear (para deformações) utilizada no código desenvolvido em linguagem MATLAB®. No mesmo não são considerados, por exemplo, enrijecimento centrífugo, acoplamento entre deformações longitudinais e transversais, e grandes deformações. Na Fig. 13 pode se comprovar um aumento excessivo nos valores experimentados pelo deslocamento transversal nodal associado ao ponto de interesse, o que dá suporte à ideia de que não linearidades geométricas podem se encontrar presentes nas situações em que a velocidade angular da barra 2 assume valores maiores.

Para o caso em que a barra 4 apresenta tratamento viscoelástico superficial restrito, ainda com respeito ao Cenário 1 de simulação apresentado anteriormente, a Fig. 14 mostra o deslocamento transversal nodal associado ao ponto de interesse indicado na Fig. 8. Comparando com a Fig. 13, pode se comprovar uma grande redução de movimentos relacionados à vibração do corpo considerado, oriundos de sua flexibilidade, de maneira tal que para este caso os resultados podem se mostrar confiáveis mesmo para a velocidade angular mais elevada de 500 RPM.

Os resultados associados às simulações inclusas no Cenário 2 são mostrados na Fig. 15. Esta mostra o deslocamento transversal nodal associado àquele ponto de interesse considerado na Fig. 8 em função do tempo e para os valores considerados de temperatura. Como pode se inferir a partir da Fig. 15, para temperaturas mais baixas, inferiores a 20 °C, um nível de amortecimento menor resulta comparativamente àquele associado a temperaturas intermediárias (que se encontram na faixa de 20 a 30 °C). O amortecimento é ainda menor para temperaturas mais elevadas, superiores a 30°C, mesmo quando comparado a situações de temperaturas baixas. Ainda, fica evidente também uma diminuição da rigidez associada ao material viscoelástico ISD112 da fabricante 3M® com o aumento de temperatura, já que amplitudes maiores resultam para temperaturas superiores. Estes comportamentos estão de acordo com as curvas “experimentais” adotadas para otimização dos parâmetros associados ao modelo fracionário adotado para a lei constitutiva viscoelástica, não mostradas aqui, mas disponíveis no trabalho de Da Silva (2003).

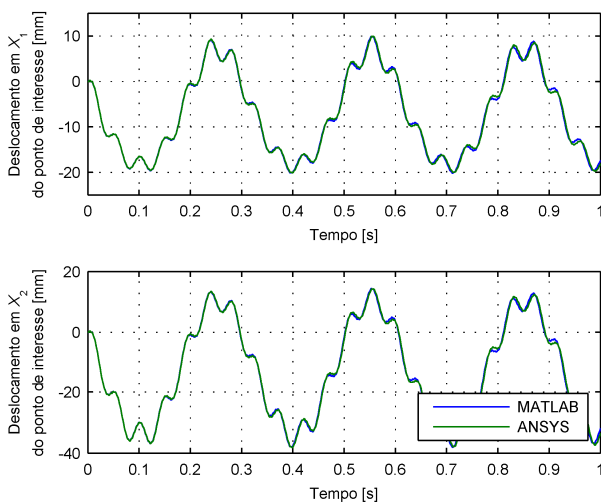


Figura 9: Deslocamentos associados ao ponto de interesse para o caso em que $\omega_2 = 200$ RPM.

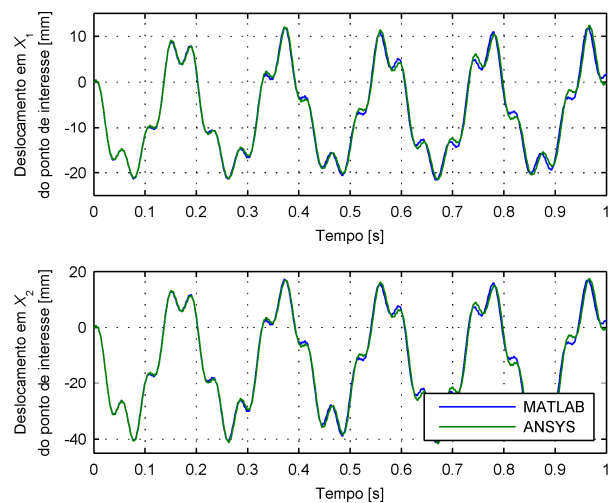


Figura 10: Deslocamentos associados ao ponto de interesse para o caso em que $\omega_2 = 300$ RPM.

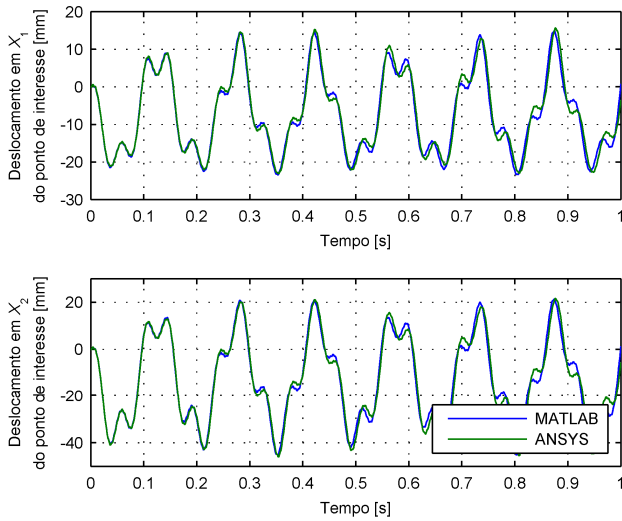


Figura 11: Deslocamentos associados ao ponto de interesse para o caso em que $\omega_2 = 400$ RPM.

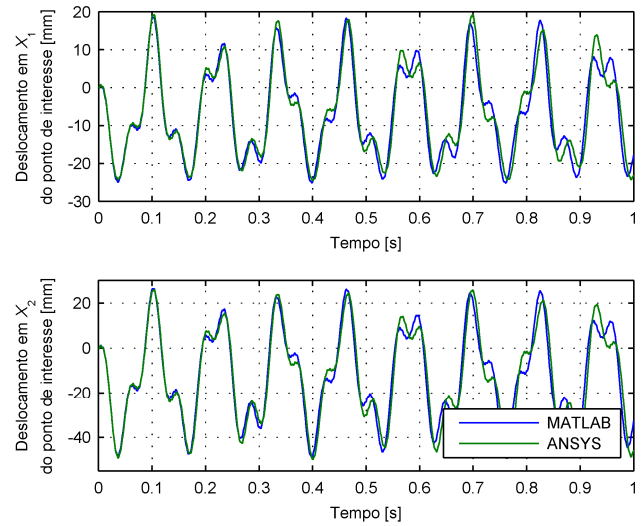


Figura 12: Deslocamentos associados ao ponto de interesse para o caso em que $\omega_2 = 500$ RPM.

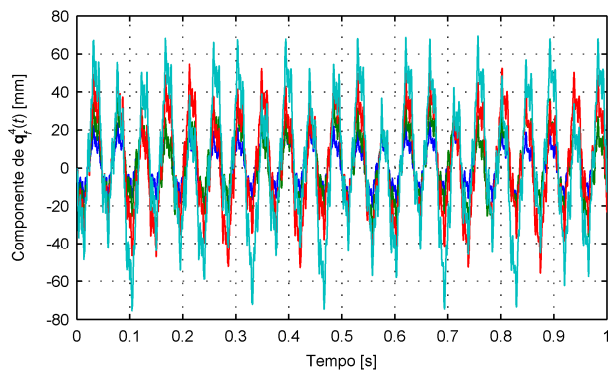


Figura 13: Deslocamento transversal nodal associado ao ponto de interesse para vários valores de ω_2 (barra 4 sem tratamento viscoelástico superficial restrito).

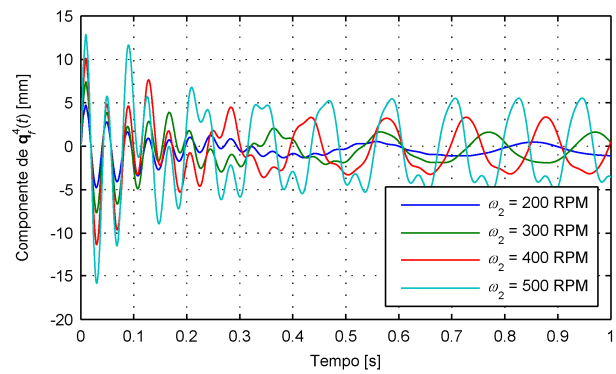


Figura 14: Deslocamento transversal nodal associado ao ponto de interesse para vários valores de ω_2 (barra 4 com tratamento viscoelástico superficial restrito).

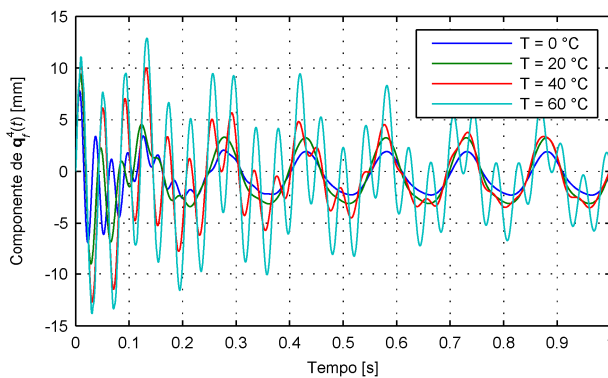


Figura 15: Deslocamento transversal nodal associado ao ponto de interesse em função da temperatura (barra 4 com tratamento viscoelástico superficial restrito).

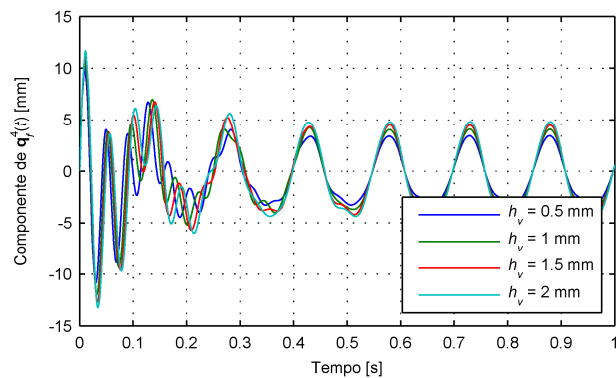


Figura 16: Deslocamento transversal nodal associado ao ponto de interesse em função da espessura da camada viscoelástica (barra 4 com tratamento superficial restrito).

Os resultados oriundos do Cenário 3 de simulação são por fim mostrados na Fig. 16. Como pode se constatar a partir desta, um aumento da espessura leva a um aumento no nível de amortecimento proporcionado pelo material. Contudo, maiores amplitudes de movimento resultam devido ao aumento de massa, ainda que este seja pequeno.

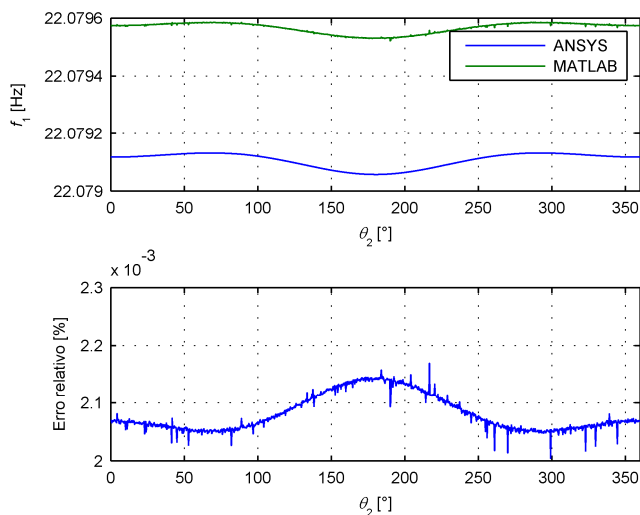


Figura 17: Primeira frequência natural f_1 em função de θ_2 .

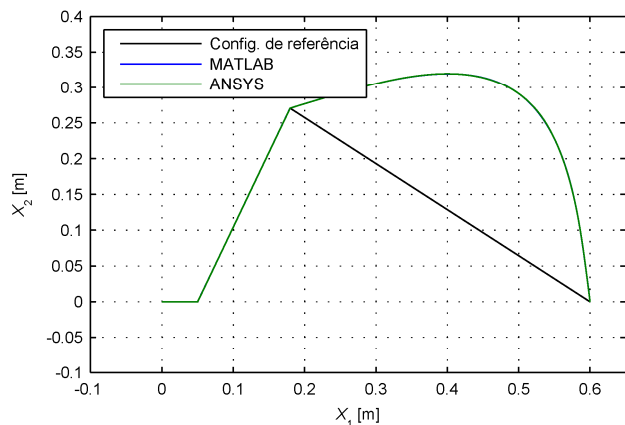


Figura 18: Forma modal associada à frequência natural $f_1 \approx 27,08$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$.

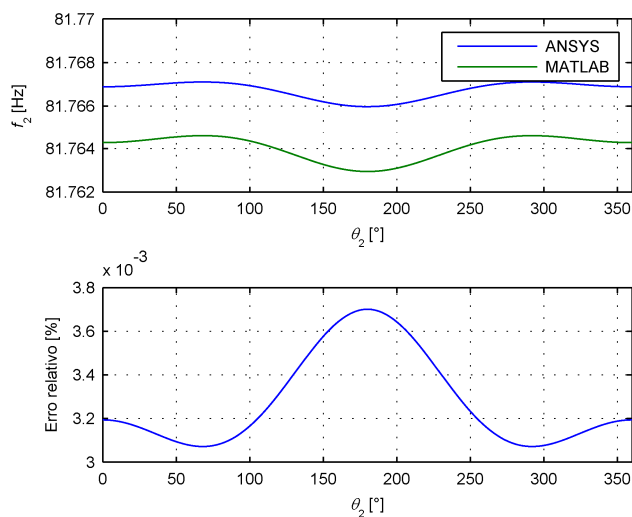


Figura 19: Segunda frequência natural f_2 em função de θ_2 .

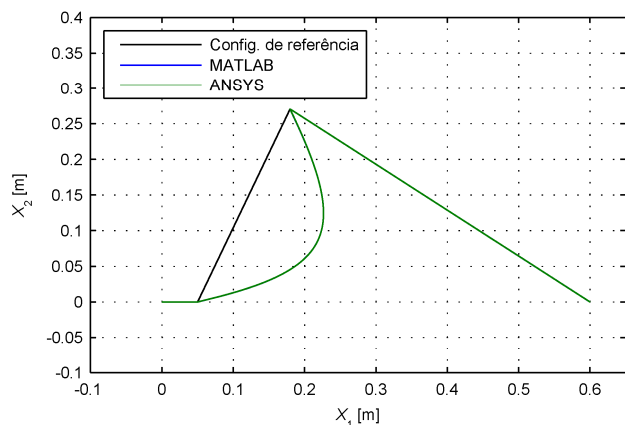


Figura 20: Forma modal associada à frequência natural $f_2 \approx 81,76$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$.

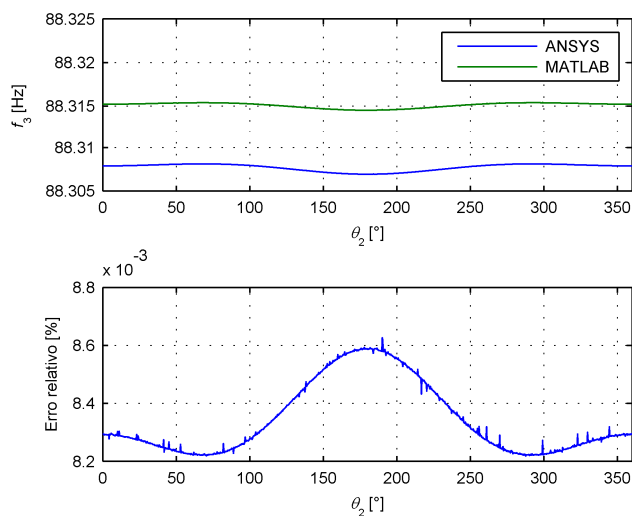


Figura 21: Terceira frequência natural f_3 em função de θ_2 .

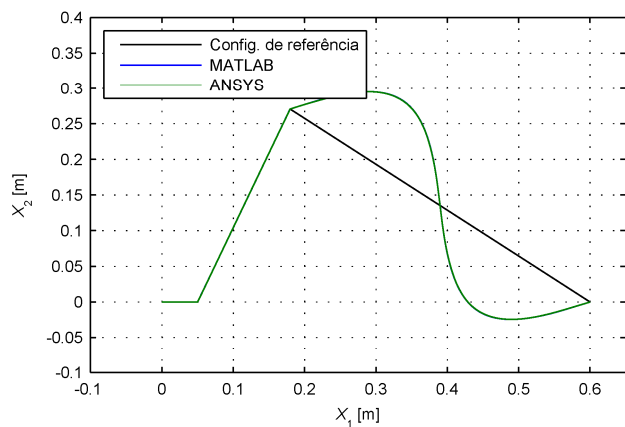


Figura 22: Forma modal associada à frequência natural $f_3 \approx 88,31$ Hz para $\theta_2 = 0^\circ$.

Análises modais foram conduzidas para o mecanismo de quatro barras flexível considerado para várias configurações do sistema, estas determinadas pela posição angular da barra 2, denotada por θ_2 . Fez-se uso tanto do software ANSYS® como de algoritmo desenvolvido em ambiente MATLAB®. As três primeiras frequências naturais e as correspondentes formas modais (para $\theta_2 = 0^\circ$) obtidas de acordo com ambas as abordagens são mostradas nas Figs. 17 a 22 em função da configuração dada por θ_2 . Quanto aos erros relativos apresentados nas Figs. 17, 19 e 21, os mesmos foram calculados segundo: Erro relativo [%] = $|f_{\text{MATLAB}} - f_{\text{ANSYS}}| f_{\text{ANSYS}}^{-1} \times 100\%$.

Este artigo apresentou a fundamentação teórica de tópicos associados ao trabalho que vem sendo desenvolvido a nível de mestrado pelo autor, assim como resultados oriundos de simulações numéricas. Enfoque foi dado ao procedimento de modelagem de sistemas que contêm múltiplos corpos flexíveis pela técnica que faz uso de referenciais flutuantes em conjunto com o método dos elementos finitos. Também foi considerado um modelo fracionário para o comportamento de materiais viscoelásticos, bem como o procedimento para sua aplicação quando na utilização de modelagem numérica através de elementos finitos. Resultados oriundos de simulações numéricas realizadas em ambiente MATLAB® e através do software ANSYS® quando na consideração de um mecanismo de quatro barras flexível plano permitiram a validação do código desenvolvido, o qual foi então utilizado para averiguação da aplicabilidade de materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações em sistemas mecânicos que apresentam múltiplos corpos flexíveis. Esta se mostrou possível por possibilitar redução significativa nos níveis de vibração associados aos movimentos analisados. Inferências paramétricas envolvendo a temperatura de operação do sistema considerado e a espessura do tratamento viscoelástico superficial foram também conduzidas e permitiram comprovar numericamente alterações esperadas qualitativamente para a resposta do mecanismo. Trabalhos futuros envolvem a validação experimental dos resultados apresentados pela utilização da bancada experimental mostrada na Fig. 23.

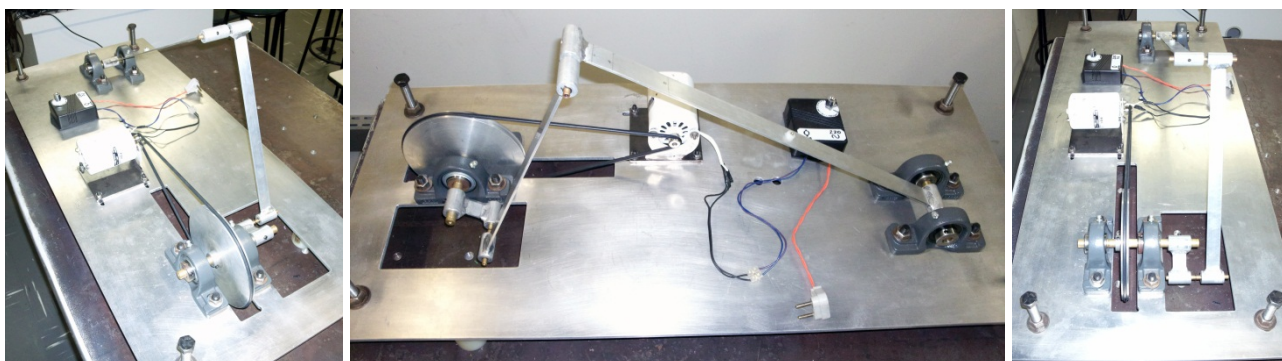


Figura 23: Bancada experimental a ser utilizada para validação dos modelos numérico-computacionais desenvolvidos em ambiente MATLAB®.

REFERÊNCIAS

- 3M, **Fita VHB™**, 2011. Disponível em:
 < http://solutions.3m.com.br/3MContentRetrievalAPI/BlobServlet?locale=pt_BR&lmd=1272258332000&assetId=1258562946625&assetType=MMM_Image&blobAttribute=ImageFile >.
 Acesso em: 05 ago. 2011.
- BAGLEY, R. L., "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity", **Journal of Rheology**, v. 27, n. 3, pp. 201-210, 1983.
- BAGLEY, R. L., TORVIK, P. J., "A generalized derivative model for an elastomer damper", **Shock and Vibration Bull.**, v. 49, n. 2, pp. 135-143, 1979.
- BAGLEY, R. L., TORVIK, P. J., "Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures", **AIAA Journal**, v. 21, n. 5, pp. 741-748, 1983.
- BAGLEY, R. L., TORVIK, P. J., "Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures", **AIAA Journal**, v. 23, n. 6, pp. 918-925, 1985.
- BATHE, K.-J., **Finite Element Procedures**, Klaus-Jürgen Bathe, 2007, 1037 pp..
- BATHE, K.-J., BAIG, M. M. I., "On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics", **Computers and Structures**, v. 83, pp. 2513-2524, 2005.

- BAUCHAU, O. A., **Flexible Multibody Dynamics**, Springer: Springer, 2011, 728 pp..
- BLAJER, W., "Methods for constraint violation suppression in the numerical simulation of constrained multibody systems – A comparative study", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 200, pp. 1568-1576, 2011.
- CALDWELL, D. B., "Viscoelastic damping devices proving effective in tall buildings", **AISC Engineering Journal**, v. 23, n. 4, pp. 148-150, 1986.
- CASCIATI, F., MAGONETTE, G., MARAZZI, F., **Technology of semiactive devices and applications in vibration mitigation**, Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2006, 245 pp..
- DA SILVA, L. A., **Internal variable and temperature modeling behavior of viscoelastic structures - a control analysis**, 2003, 204 pp., Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- DE SILVA, C. W. (ed.), **Vibration damping, control and design**, Boca Raton: CRC Press, 2007.
- ESCALONA, J. L., CHAMORRO, R., "Stability analysis of vehicles on circular motions using multibody dynamics", **Nonlinear Dyn.**, v. 53, pp. 237-250, 2008.
- FISSETTE, P., VANEGHEM, B., "Numerical integration of multibody system dynamic equations using the coordinate partitioning method in an implicit Newmark scheme", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 135, pp. 85-105, 1996.
- GALUCIO, A. C., DEÜ, J.-F., OHAYON, R., "Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators", **Computational Mechanics**, v. 33, pp. 282-291, 2004.
- GOLLA, D. F., HUGHES, P. C., "Dynamics of viscoelastic structures – a time-domain, finite element formulation", **Journal of Applied Mechanics**, v. 52, n. 4, pp. 897-906, 1985.
- GUERREIRO, L., **Dinâmica e engenharia sísmica**, Ciclo de Conferências do Fórum Civil, Instituto Superior Técnico, 10 de maio de 2007.
- LESIEUTRE, G. A., "Finite element for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties", **International Journal of Solids and Structures**, v. 29, n. 12, pp. 1567-1579, 1992.
- LESIEUTRE, G. A., LEE, U., "A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelasticities", **Smart Mater. Struct.**, v. 5, n. 5, pp. 615-627, 1996.
- LIMA, A. M. G. de, **Modelagem numérica e avaliação experimental de materiais viscoelásticos aplicados ao controle passivo de vibrações mecânicas**, 2003, 122 f., Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- LIMA, A. M. G. de, **Modelagem e otimização robusta de sistemas mecânicos em presença de amortecimento viscoelástico**, 2007, 175 f., Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- MASARATI, P., "Direct eigenanalysis of constrained system dynamics", **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics**, v. 223, pp. 335-342, 2009.
- MCTAVISH, D. J., HUGHES, P. C., "Modeling of linear viscoelastic space structures", **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 115, n. 1, pp. 103-113, 1993.
- MEIROVITCH, L., **Methods of analytical dynamics**, New York: McGrawHill Inc., 1970, 524 pp..
- NASHIF, A. D., JONES, D. I. G., HENDERSON, J. P., **Vibration damping**, John Wiley & Sons Inc., 1985, 480 pp..
- SCHIEHLEN, W., "Computational dynamics: theory and applications of multibody systems", **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 25, pp. 566-594, 2006.
- SCHMIDT, A., GAUL, L., "Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives", **Nonlinear Dynamics**, v. 29, pp. 37-55, 2002.
- SHABANA, A. A., "Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments", **Multibody System Dynamics**, v. 1, pp. 189-222, 1997.
- SHABANA, A. A., **Dynamics of multibody systems**, 3rd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 2005, 374 pp..
- VIBTECH. **Produtos – Elastômero**. Disponível em:
 < <http://www.vibtech.com.br/canais/hp/categorias.asp?codCategoria=7> >. Acesso em: 05 ago. 2011.
- WASFY, T. M., NOOR, A. K., "Computational strategies for flexible multibody systems", **Applied Mechanics Reviews**, v. 56, n. 6, pp. 553-613, 2003.