

Desenvolvimento Pseudo-Espectral de Fourier para Escoamentos Bifásicos

Mariana Fernandes dos Santos Villela; Felipe Pamplona Mariano; Aristeu da Silveira Neto.

A simulação numérica de escoamentos bifásicos requer alta acurácia e alta robustez para se obter maiores detalhes do escoamento. Requer-se, ainda, baixo custo computacional, pois de modo geral, as simulações deste tipo de problema necessitam de um elevado refinamento de malha ou possuem um grande estêncil de discretização, o que as tornam computacionalmente onerosas. Diante disso, no presente trabalho apresenta-se uma nova metodologia, resultado da hibridação da metodologia pseudo-espectral de Fourier com a metodologia da fronteira imersa. Resultados preliminares para ascensão de uma bolha cilíndrica são apresentados.

Os problemas aqui estudados são baseados na metodologia da fronteira imersa acoplado com o método pseudo-espectral de Fourier (CANUTO *et al.*, 2007). O acoplamento foi proposto por Mariano *et al.*, (2010). No caso da fronteira imersa (Fig. 1), o fluido como um todo, é representado em um domínio ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$). A interface Γ é denominada domínio lagrangiano, a qual pode se deslocar e deformar. Os subdomínios Ω_1 (fase contínua) e Ω_2 (fase dispersa) representam a parte externa e interna da interface, respectivamente. As equações de Navier-Stokes são usadas para modelar e descrever a dinâmica do fluido no domínio Ω e a formulação lagrangiana modela a dinâmica da interface Γ .

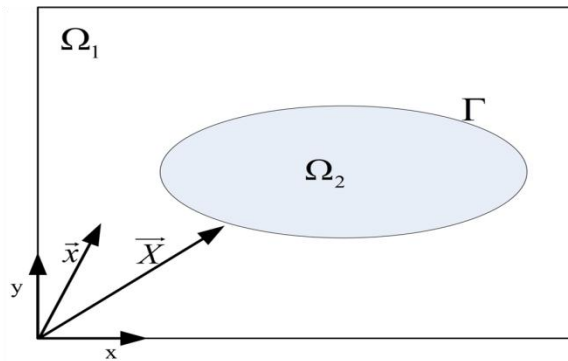


Figura 1: Representação dos domínios euleriano e lagrangiano.

A formulação matemática para escoamentos incompressíveis, isotérmicos e com a presença de dois fluidos newtonianos imiscíveis com propriedades físicas distintas é representada pelas eqs. 1 e 2, as quais são as equações da continuidade e de balanço de quantidade de movimento linear, respectivamente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial u_l u_k}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \right] \right\} + \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) g_l + \frac{1}{\rho} f_l, \quad (2)$$

onde ρ e μ são, a massa específica e a viscosidade do fluido, u_l é a componente l do vetor velocidade, p é o campo de pressão, f_l é a componente l do vetor campo de força de interface que atua sobre o escoamento, g_l é a componente l do vetor da aceleração gravitacional, $\rho_0 = (1 - \alpha)\rho_c + \alpha\rho_d$, α é a fração volumétrica entre as fases contínua e dispersa e $l = 1, 2$, para problemas bidimensionais.

O termo fonte $f(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma} F_l(\vec{X}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) d x_l$ permite a comunicação entre as equações de Navier-Stokes resolvidas no domínio euleriano e as equações para o movimento da interface resolvidas no domínio lagrangiano. Dessa forma, o termo fonte euleriano é diferente de zero sobre a interface e nulo fora da interface. Este comportamento é representado matematicamente pela função delta de Dirac (δ). No cálculo de f_l , $F_l(\vec{X}, t) = \sigma \kappa n_l$ é a componente l de $\vec{F}$ calculada sobre os pontos lagrangianos, σ é a força superficial, κ e n_l são, respectivamente, a curvatura e a componente l da normal à interface, o vetor X_l é a posição dos pontos sobre a interface, conforme mostrado na Fig. 1.

A partir da definição das transformadas de Fourier e suas propriedades obtém-se as equações de Navier-Stokes e da continuidade (Eqs. 1 e 2), transformadas para o espaço espectral de Fourier (VILLELA, 2011) (Eqs. 3 e 4).

$$ik_l \widehat{u}_l = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_l}{\partial t} = \wp_{lm} \left[-\widehat{TNL}_m + \widehat{DIF}_m + \widehat{GRAV}_m + \frac{1}{\rho} * \widehat{f}_m \right], \quad (4)$$

onde $\widehat{TNL}_m$ é o termo $ik_k (\widehat{u}_l \widehat{u}_k)$, $\widehat{DIF}_l$ é o termo $\frac{1}{\rho} * ik_k * [\hat{\mu} * (ik_k \widehat{u}_l + ik_l \widehat{u}_k)]$ e $\widehat{GRAV}_l$ é o termo $\frac{1}{\rho} * (\rho - \rho_0) g_l$.

Nota-se pela Eq. 4 a independência do termo de pressão, o qual foi substituído pela projeção, $\wp$, dos termos fonte, advectivo, difusivo e de empuxo. Comparando com esquemas clássicos, esse procedimento equivale a substituir a solução de uma equação de Poisson por um produto vetor-matriz que, em termos numéricos, é mais viável. Em termos físicos, ambos têm a mesma função, a qual é garantir a conservação de massa. Apesar do campo de pressão não aparecer nas equações de Navier-Stokes, ele pode ser recuperado por pós-processamento através de algumas manipulações matemáticas, conforme apresentado por Villela, (2011).

Para trabalhar com a transformada de Fourier numericamente utiliza-se a transformada discreta de Fourier (DFT). Assim, resolve-se, de forma eficiente e precisa, a DFT e a DFTI (transformada discreta inversa de Fourier), o que torna atrativo resolver equações diferenciais parciais utilizando a metodologia espectral de Fourier.

Quando se trabalha com as equações de Navier-stokes no espaço espectral de Fourier, a resolução do termo não-linear requer a solução de uma integral de convolução. Resolver esta integral se torna numericamente inviável, o que requer o uso do método pseudo-espectral de Fourier e, seu algoritmo básico, pode ser encontrado em Canuto, *et al.* (2007). O avanço temporal é feito utilizando-se o método Runge Kutta otimizado (RK46), o qual é um método de quarta ordem e seis estágios de avanço explícito no tempo (ALLAMPALLI *et al.*, 2009).

O processo de filtragem é necessário devido à presença de descontinuidades, as quais geram o fenômeno de Gibbs. Os campos filtrados no presente trabalho é o campo de força euleriano, campo de pressão e a função indicadora. O filtro utilizado é denominado *Raised Cosine* (CANUTO, *et al.*, 2007).

Na Fig. 2 tem-se a ascensão de uma bolha em que a geometria desta não se altera ao longo do tempo. O domínio é dado por $\Omega = [0; 4\pi] \times [0; 12\pi]$, a tensão superficial (σ) é $1,0 [N/m]$, o diâmetro da bolha d_d é $0,7\pi [m]$, a malha é de 128×384 nós de colocação e um $\Delta t = 0,0001[s]$. As coordenadas x e y foram adimensionalizados a partir do diâmetro da bolha e o tempo utilizado é um tempo adimensional dado por $t^* = \frac{t}{\sqrt{d_d/g}}$.

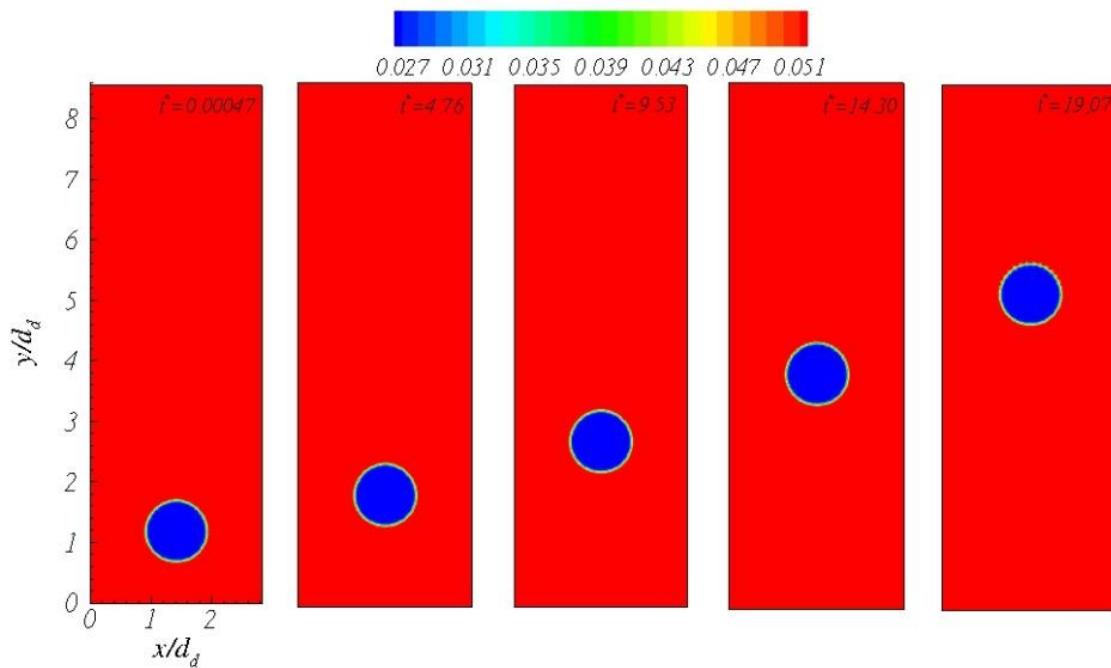


Figura 2: Evolução temporal do campo de massa específica.

A bolha permanece circular, como esperado, para os parâmetros adotados (CLIFT *et al.*, 1978). Este resultado obtido está qualitativamente coerente com a física que envolve o problema. Além disso, o salto de pressão, calculado numericamente, assume o valor de $p^*\left(\frac{x}{d_d} = 0,5\right) - p^*\left(\frac{x}{d_d} = 3\right) = 1,9823$. Analiticamente, o salto de pressão $\Delta p = \frac{2\sigma}{d_d} = 1,9999$, o que implica em um erro de 0,83%.

REFERÊNCIAS

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. **Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics**, Springer Verlag, New York, 2007.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A.; SILVA, C. B.; PEREIRA, J. C. F. **A new incompressible Navier-Stokes combining Fourier pseudo-spectral and immersed-boundary method**, Computer Modeling in Engineering Science, 59, 2010, 181-216.

VILLELA, M.F.S. **Modelagem Matemática de Escoamentos Bifásicos usando o Método Espectral de Fourier**, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de engenharia Mecânica, Uberlândia, 2011.

NÓS, R. L. **Simulações de escoamentos tridimensionais bifásicos empregando métodos adaptativos e modelos de campo de fase**, Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

ALLAMPALLI, V.; HIXON, R.; NALLASAMY, M.; SAWYER, S. **High-accuracy large-step explicit runge kutta (hale -rk) schemes for computational aeroacoustics**, Journal of Computational Physics, v. 228, 2009.

CLIFT, R.; GRACE, J. R.; WEBER, M. E. **Bubbles, Drops and Particles**, London: Academic Press, 1978.