

SOLUÇÃO ESPECTRAL DE FOURIER PARA UMA EDP UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE

Denise Kinoshita; Felipe P. Mariano; Leonardo Q. Moreira; Aristeu da Silveira Neto.

Resumo

No presente trabalho foi feita uma comparação da influência de diferentes esquemas numéricos de integração temporal, com o intuito de verificar a influência desses esquemas quando se utiliza o método espectral de Fourier na solução espacial de uma equação diferencial. No presente trabalho compararam-se os métodos de “Euler”, “Euler implícito” e o “método de Runge-Kutta de 4ª ordem”. Como problema teste adotou-se a equação da difusão, onde os termos que dependem das derivadas espaciais foram resolvidos utilizando o método espectral de Fourier. Os erros foram calculados através do erro máximo (norma L infinita) e da norma L_2 . Foi observada a influência da ordem numérica dos diferentes esquemas e do passo de tempo, Δt , nos testes realizados. Além disso, o erro obtido pelo método de Runge-Kutta é menor, atingindo erros de máquina em todos os testes realizados. Desta forma é possível concluir que ao se utilizar um método de alta acurácia em um espaço espectral, caso do método espectral de Fourier, deve-se também utilizar um método de alta acurácia na discretização temporal. Em seguida, foi feita uma análise comparativa do custo computacional de diferentes transformada de Fourier (*FFT*'s), utilizando três diferentes subrotinas encontradas na literatura: a *FFTe*, a *FFTw* e a *FFTi*. Os resultados mostraram que as *FFTw* e *FFTi* são mais rápidas computacionalmente, obtendo metade do tempo de simulação computacional comparada com a *FFTe* na resolução do mesmo problema.

1. INTRODUÇÃO

A mecânica dos fluidos é uma área de grande importância devido ao vasto número de aplicações industriais e de escoamentos encontrados na natureza. Atualmente, métodos de simulação numérica têm sido utilizados como uma alternativa de desempenho satisfatório na análise de escoamentos.

O uso de códigos computacionais para simulação e estudo dos fenômenos da mecânica dos fluidos e transferência de calor e massa tem ganhado paulatinamente espaço no âmbito acadêmico e industrial. Por outro lado, as técnicas experimentais têm evoluído com o advento de instrumentos não intrusivos, ou seja, instrumentos de dimensões microscópicas e de alta precisão como Laser-Doppler, e o sistema de Velocimetria de Imagem de Partícula, *Particle Image Velocimetry* (PIV). A experimentação tem sido de grande importância, pois tem o objetivo de estudar e quantificar escoamentos de base como camada limite, escoamentos cisalhantes livres (jatos, esteiras e camada de mistura), ou até mesmo escoamentos complexos, que são utilizados no setor industrial, e.g., como projetos de aeronaves, automóveis, edificações, entre outros.

Apesar disto, segundo Mariano (2011), o uso de métodos numéricos reflete em um menor custo relativo ao uso de métodos experimentais, além de proporcionar maior dinâmica no estudo de diversos problemas.

A dinâmica dos fluidos computacional, conhecida como CFD, estuda e utiliza métodos numéricos e computacionais para solução das Equações Diferenciais Parciais (EDP's) associadas à dinâmica dos fluidos.

De acordo com Mariano (2011), as equações de Navier-Stokes são EDP's não-lineares que modelam matematicamente o comportamento dinâmico dos fluidos. As EDP's resolvidas são: equação de transporte da quantidade de movimento linear, massa e energia. Desta forma, segundo Ferziger e Peric (1996), é necessário escolher um método de discretização adequado, ou seja, um método que aproxima as equações diferenciais ao sistema de equações algébricas com variáveis no espaço e no tempo. Existem muitas formas de resolver numericamente essas equações. Dentre elas podem ser citados os métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, métodos espectrais, ou mesmo a combinação entre eles. Dependendo do tipo de escoamento que se queira resolver ou o tipo de fenômeno físico que se queira estudar, um desses métodos melhor se adéqua ao problema desejado.

No presente trabalho, foi utilizado o método espectral de Fourier para resolver uma equação de difusão, devido ao baixo custo computacional, quando comparado com outros métodos de alta acurácia. Assim, na primeira parte do trabalho, foi resolvida uma EDP pelo método espectral de Fourier e a discretização temporal desta foi feita utilizando-se o método de Euler, o método implícito de Euler e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. A análise dos erros foi feita com a comparação destes resultados. Como esperado, observou-se melhores resultados no método de Runge-Kutta, atingindo erro de máquina.

Na segunda parte do trabalho, foi feita uma análise comparativa do custo computacional por meio de diferentes transformadas de Fourier, do inglês *Fast Fourier Transform* (FFT's), entre elas estão: *FFTe*, desenvolvida por Daisuke Takahashi; *FFTw*, desenvolvida por Matteo Frigo e Steven G. Johnson que possui suporte técnico da intel Math Kernel Library (MKL) e a *FFTi* desenvolvida pela própria Intel.

2. ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA

O objetivo do presente trabalho foi desenvolver um algoritmo que resolve uma equação diferencial parcial difusiva, Eq. 1, a fim de comparar os erros entre as soluções obtidas numericamente e a solução analítica sintetizada:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

A Fig.1 mostra o domínio de cálculo utilizado, onde pode ser observado um domínio periódico.

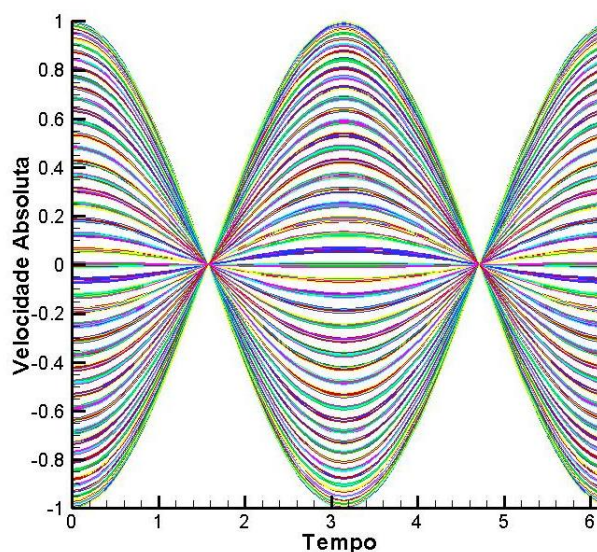


Figura 1: Domínio de cálculo utilizado em função da velocidade absoluta $\vec{u}(\vec{x}, t) = \cos(\vec{x}).sen(t)$.

3. METODOLOGIA

3.1 Método Espectral de Fourier

Os métodos de alta ordem fornecem excelente acurácia, porém possuem desvantagens devido ao alto custo computacional e a necessidade de resolver grandes sistemas lineares.

Os métodos espectrais é uma das alternativas entre as metodologias de alta ordem, particularmente, o método pseudo-espectral de Fourier (MPEF), pois destaca-se devido a alta acurácia, como dito anteriormente, e devido a alta ordem de convergência numérica aliados ao baixo custo computacional, quando comparado com outros métodos de alta ordem. O uso deste método pode alcançar até 10 dígitos de acurácia, enquanto que o método das diferenças finitas ou método dos elementos finitos obtém-se dois ou três dígitos, de acordo com Trefethen (2000).

Neste método é feita a transformação dos campos das variáveis primitivas, como velocidade e pressão, para o espaço espectral de Fourier.

No presente trabalho utiliza-se o método espectral de Fourier, pois como não temos o termo não linear a ser resolvido, não há necessidade de resolver pelo método MPEF. Ao resolver numericamente, as equações de Navier-Stokes com o método espectral de Fourier pode-se usar a Transformada de Fourier Discreta (DFT).

A DFT implica no uso de condições de contorno periódicas, o qual limita o uso da transformada de Fourier para problemas de CFD. Porém, atualmente no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), os pesquisadores vem desenvolvendo uma metodologia híbrida denominada IMERSPEC, que é o MPEF acoplado com o método da Fronteira Imersa (MFI), a fim de resolver problemas com condições de contorno não periódicas. Souza (2005), iniciou no MFlab os estudos sobre o MPEF, na qual aponta as vantagens de se utilizar esta metodologia. O IMERSPEC foi desenvolvido por Mariano *et al.* (2007), Moreira *et al.* (2010) e por Queiroz *et al.* (2011) neste mesmo laboratório, e posteriormente, foi aplicado na simulação de escoamentos sobre corpo imersos por Mariano (2010).

Para aplicar a transformada de Fourier nas equações diferenciais, é utilizado um esquema otimizado denominado *Fast Fourier Transform* (FFT), ou seja, Transformada Rápida de Fourier, desenvolvido por Cooley e Tukey (1965) apud Briggs e Henson (1995), as quais as variáveis de interesse passam por um processo de transformação linear. A FFT trabalha com o procedimento denominado rotação de bit, tornando o cálculo das transformadas de Fourier, muito mais eficiente, pois o número de operações computacionais reduzem de $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$, onde N é o número de pontos na malha discretizada.

Desta forma, devido ao baixo custo computacional torna-se atrativa a utilização do método espectral de Fourier para resolver as equações diferenciais parciais.

As Eqs. 2 e 3 mostram, respectivamente, as transformadas: direta no espaço de Fourier, espaço espectral, e a inversa de Fourier, espaço físico, de uma função qualquer:

$$\hat{\phi}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}, t) e^{-i2\pi\vec{k}\vec{x}} d\vec{x} \quad (2)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\vec{k}, t) e^{i2\pi\vec{k}\vec{x}} d\vec{k} \quad (3)$$

onde $\hat{\phi}(\vec{k}, t)$ são os coeficientes de Fourier da transformada da função $\phi(\vec{x}, t)$, i é o número imaginário dado por $\sqrt{-1}$ e $\vec{k}$ é o vetor número de onda, apresentado na Eq. 6, que é parâmetro de transformação espacial de Fourier. O campo transformado, $\hat{\phi}(\vec{k}, t)$, está no chamado espaço de Fourier ou espaço espectral (simbolizado por ^). Em contrapartida, o campo não transformado está no espaço físico.

Segundo Moreira (2011), a grande vantagem dessa transformação é que algumas operações matemáticas são simplificadas no domínio espectral, por exemplo, a operação de derivada. Além disso, outra vantagem é que, normalmente, uma equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária. Por outro lado, outras operações tornam-se mais complicadas, como o produto entre duas funções.

A versão discreta da transformada de Fourier é denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT), e é definida pela Eq. (4), por Briggs e Henson (1995):

$$\hat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} \quad (4)$$

onde ϕ_n é o campo de velocidade discretizado com N nós de colocação, os quais representam os nós da malha; n fornece a posição x_n dos nós de colocação, $x_n = n.\Delta x$; Δx é o espaçamento entre dois nós de colocação; $\bar{k}$ é o número de onda.

A Eq. 4 é a aproximação numérica da transformada de Fourier, a qual é aplicada sobre os nós de colocação de um domínio discretizado. Deve-se notar que para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada necessariamente deve ser periódica, ou seja:

$$\phi(\bar{x}, t) = \phi(\bar{x} + L, t) \quad (5)$$

onde L é o comprimento do domínio na direção considerada. As rotinas DFT impõem automaticamente a condição de periodicidade. Esta propriedade é a grande restrição da metodologia espectral de Fourier limitando o seu uso a problemas com condições de contorno periódicas. Entretanto, com a fusão do MFI com a MPEF, busca-se resolver esta restrição.

Para resolver a Eq. 4, utiliza-se o algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1965), denominada transformada rápida de Fourier - FFT. Encontram-se disponíveis várias sub-rotinas que calculam a FFT. No presente trabalho, foi utilizada a versão 4.0 da sub-rotina FFTe de Takahashi (2006).

Para a implementação do método espectral, é necessário calcular os números de onda, que são usados na resolução das equações transformadas. Para utilizar a FFTe, os vetores número de onda são calculados da seguinte forma:

$$k(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_x}(n-1) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_x}(n-1-N) & \frac{N}{2} + 2 \leq n \leq N \end{cases} \quad (6)$$

onde k é o vetor número de onda, N é o número de nós de colocação numa dada direção, L é o comprimento físico do domínio nessa dada direção e n é a posição no vetor em uma dada direção do domínio.

4. CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO PELO MÉTODO DAS SOLUÇÕES MANUFATURADAS

Seja, a Eq. (7):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \mathbf{f}(x, t) \quad (7)$$

onde, $\mathbf{f}(x, t)$ representa o termo fonte, que impõe a solução pelo método das soluções manufaturadas, para satisfazer as restrições da DFT. Assim, é proposta uma velocidade $\mathbf{u}$ periódica na direção horizontal:

$$\mathbf{u}(x, t) = \cos(x) \cdot \text{sen}(t) \quad (8)$$

Logo a Eq. (7) se torna,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \cos(x) \cdot [\cos(t) + \alpha \text{sen}(t)] \quad (9)$$

Ao aplicar a transformada de Fourier em ambos os lados da equação Eq. 9 obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \cos(\hat{x}) \cdot [\cos(t) + \alpha \sin(t)] \quad (10)$$

Aplicando as propriedades da transformada de Fourier, o termo $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se torna $(ik)^2 \hat{u}$, onde $i = \sqrt{-1}$, logo:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\alpha k^2 \hat{u} + \cos(\hat{x}) \cdot [\cos(t) + \alpha \sin(t)] \quad (11)$$

O termo $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ pode ser tratado com métodos usuais de tratamento para derivadas temporais. Neste trabalho utilizou-se o método de Euler, Euler implícito e Runge-Kutta clássico de 4ª ordem.

5. RESULTADOS

O domínio mostrado, na Fig. 1, foi dividido em N pontos, onde N é o número de nós de colocação numa dada direção, neste caso, na direção horizontal x , onde estes pontos variaram de $N = 16$ à $N = 256$. Além disso, foi testado o coeficiente de difusividade, α , que é a constante da Eq. 7 e o δt , com o intuito de verificar a influência nos resultados da simulação.

Desta forma, foi realizada uma sequência de testes a fim de verificar os desvios entre o campo de velocidade calculado e o seu valor analítico, como mostra a Tab. 1:

Tabela 1: Testes realizados para cada método de discretização.

$\alpha = 0,05$ e $\delta t = 10^{-6}$	$N = 64$ e $\delta t = 10^{-6}$	$N = 64$ e $\alpha = 0,05$
$N = 16$	$\alpha = 0,01$	$\delta t = 10^{-6}$
$N = 32$	$\alpha = 0,05$	$\delta t = 10^{-5}$
$N = 64$	$\alpha = 0,1$	$\delta t = 10^{-4}$
$N = 128$	$\alpha = 0,5$	$\delta t = 10^{-3}$
$N = 256$	$\alpha = 1,0$	$\delta t = 10^{-2}$

Os erros obtidos foram calculados de duas maneiras: erro máximo L_∞ e norma L_2 , onde os cálculos são dados pelas Eq. 12 e Eq. 13, respectivamente.

$$L_\infty = \max |u_e - u_a| \quad (12)$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum (u_e - u_a)^2}{N}} \quad (13)$$

onde u_a é o valor analítico da velocidade horizontal Eq. 8, e u_e é o valor calculado da velocidade horizontal utilizando a Eq. 11 e N é o número de nós de colocação.

A Fig. 3 mostra a evolução temporal das normas L_∞ e L_2 para a simulação com $\alpha = 0,05$, $N = 64$ e $\delta t = 10^{-6}$.

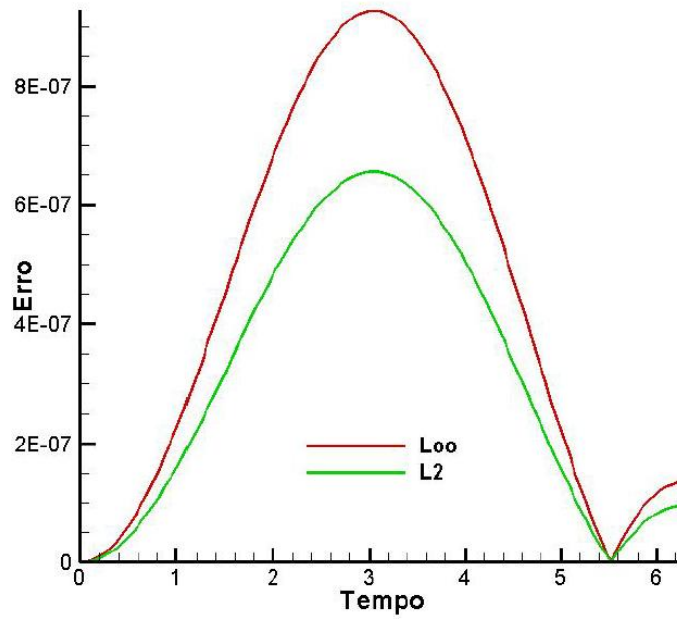


Figura 3: Evolução temporal das normas: L_∞ e L_2 , para o método de Euler Implícito com $\alpha = 0,05$, $N = 64$ e $\delta t = 10^{-6}$.

Outra análise foi feita comparando o método de Euler e o método de Euler implícito, para $\delta t = 10^{-6}$ e $\alpha = 0,05$, de acordo com a Fig. 4 não existe muita diferença entre eles.

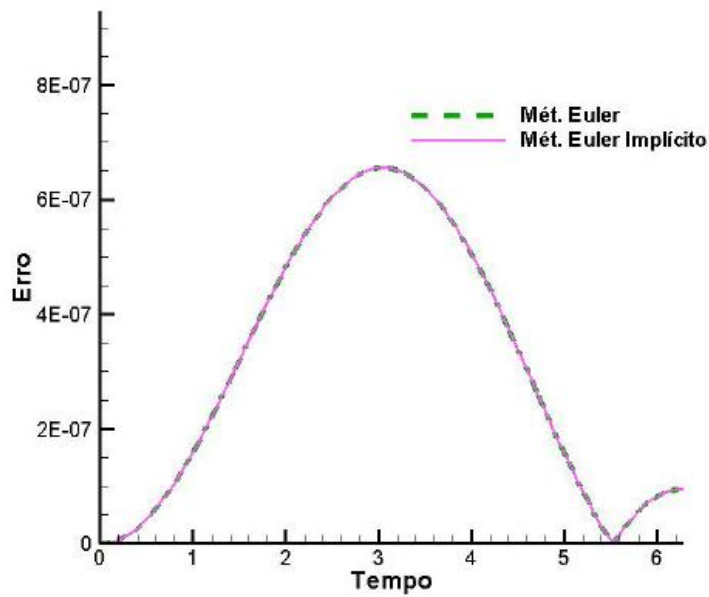


Figura 4: Comparação dos erros pela norma L_2 , para o método de Euler e Euler implícito e $N = 64$, $\alpha = 0,05$ e $\delta t = 10^{-6}$.

A Fig. 5 mostra uma comparação feita entre os alfas com $\delta t = 10^{-6}$ e $N = 64$, para o método de Euler Implícito. Pode ser observado que quanto maior o valor do α menor o erro obtido.

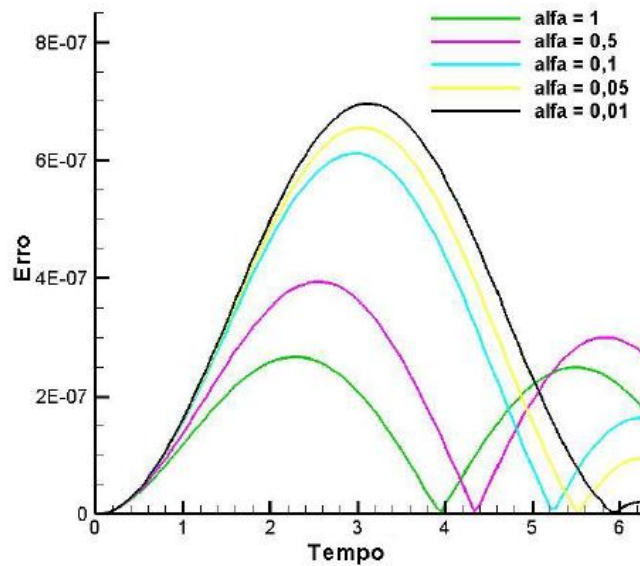


Figura 5: Comparação entre os diferentes coeficientes de difusividade, α para o método de Euler implícito com $N = 64$ e $\Delta t = 10^{-6}$.

Quando se compara com o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para o $\Delta t = 10^{-6}$ e $\alpha = 0,05$, a diferença do erro com o método de Euler é visivelmente significativa, para ambos os erros calculados: absoluto L_∞ e norma L_2 , como mostrada na Fig. 6. Vale lembrar que foi utilizada dupla precisão nos cálculos, desta forma, os erros observados estão na ordem de erro de truncamento de máquina, como esperado para o método espectral de Fourier.

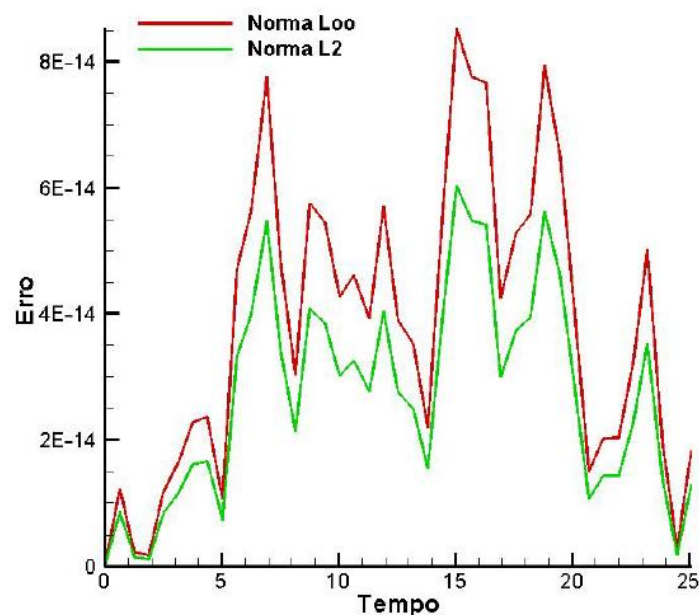


Figura 6: Comparação entre os erros: absoluto L_∞ e norma L_2 , pelo método de Runge-Kutta e $\Delta t = 10^{-6}$.

Outra análise foi feita variando o Δt , a Fig. 7 mostra o erro para o método de Runge-Kutta. Em todos os casos os erros de arredondamento são obtidos. Porém, pode ser observado que para menores valores de Δt , o erro é maior. Este fenômeno é explicado devido à necessidade de realização de um número maior de passos de tempo para percorrer um mesmo intervalo de tempo. Desta forma fazem-se mais cálculos próximos aos erros de máquina, dos quais não se tem controle, o que faz com que o erro se acumule.

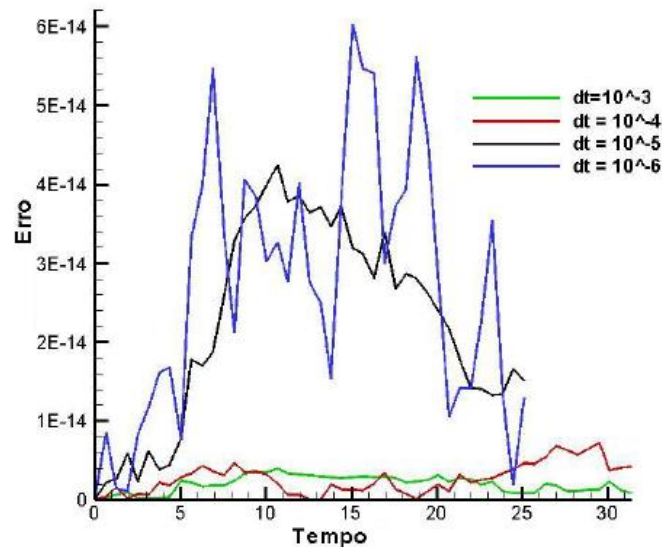


Figura 7: Variação do δt na norma L_2 , pelo método de Euler Implícito com $N = 64$ e $\alpha = 0,05$.

Fazendo a mesma análise para o caso do método de Euler Implícito foi observado que, para menores valores de δt , menor é o erro, diferente do caso do método de Runge-Kutta, devido ao fato de não ter alcançado o erro de máquina.

Outro teste realizado foi a análise do número de nós de colocação (N), para o método de Runge-Kutta, o método de Euler e o método de Euler Implícito, em ambos os casos não houve discrepâncias nos erros com o refinamento da malha.

Tabela 2: Análise do erro para verificar qual δt máximo cada método suporta.

δt	Erros L_∞		
	Mét. Euler Implícito	Mét. Euler	Mét. Runge-Kutta
10^{-06}	10^{-07}	10^{-07}	10^{-14}
10^{-05}	10^{-06}	10^{-06}	10^{-14}
10^{-04}	10^{-05}	10^{-05}	10^{-14}
10^{-03}	10^{-04}	10^{-04}	10^{-15}
10^{-02}	10^{-03}	10^{-03}	10^{-12}
10^{-01}	10^{-02}	10^{+19}	10^{-08}
1	10^{-01}		10^{+13}
2	10^{-01}		
10^{+01}	1,5		
10^{+03}	5,0		

Para finalizar esta primeira parte, uma comparação foi feita a fim de verificar qual o δt máximo cada um dos métodos suportam. Para isto, o δt foi aumentado devagar e verificado até onde cada método suporta sem divergir. A Tab. 2 nos mostra estes resultados.

Analisando a Tab. 2 pode ser verificado que: com o método de Euler o programa diverge com $\delta t = 0,1$ [s], enquanto que o método de Runge-Kutta diverge com $\delta t = 1,0$ [s]. Já o método de Euler Implícito, não diverge, mesmo para um intervalo de discretização de tempo bem elevados. Isto pode ser explicado, pois os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis.

5.1 Uso e análise comparativa de diferentes FFT's

Nesta segunda parte do trabalho teve-se como objetivo, avaliar o custo computacional de diferentes algoritmos de FFT's. Através da Fig. 8 (Frigo e Johnson, 2009), foi possível observar a eficiência computacional de outras FFT's, além daquela utilizada atualmente no MFLab, desta forma, isto motivou verificar o custo computacional de outras FFT's.

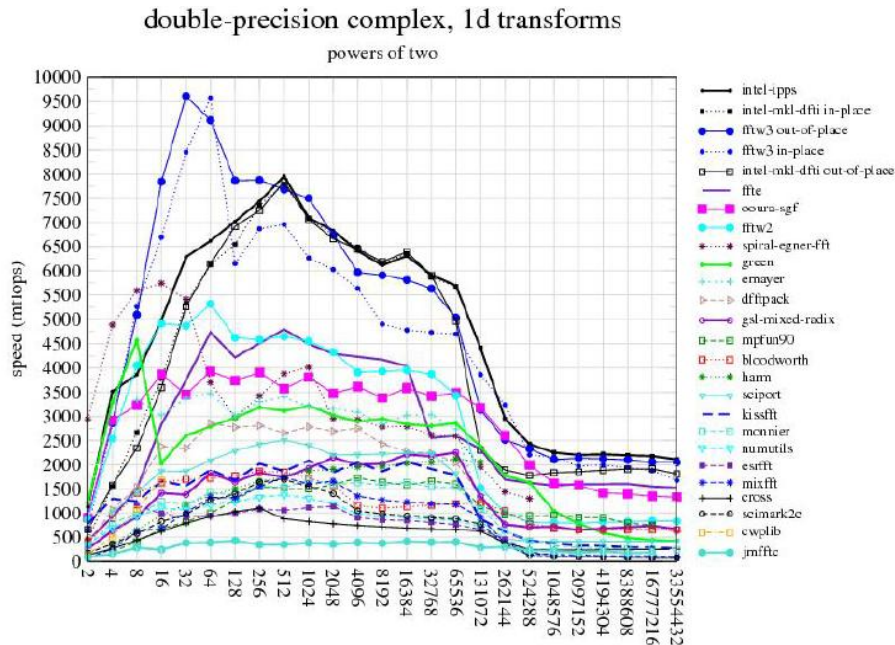


Figura 8: Avaliação da velocidade computacional de diferentes FFT's com o aumento dos nós de colocação N, figura retirada de: [http:// www.fftw.org/speed/CoreDuo-3.0GHz-icc64/](http://www.fftw.org/speed/CoreDuo-3.0GHz-icc64/).

As FFT's utilizadas para se fazer as comparações foram: FFTe, desenvolvido por Daisuke Takahashi (atualmente utilizada no MFLab), FFTw, desenvolvido por Matteo Frigo e Steven G. Johnson que possui suporte técnico da intel Math Kernel Library (MKL) e a FFTi desenvolvido pela própria Intel.

Para a implementação das transformadas FFTw e FFTi no programa desenvolvido para o presente trabalho, foi realizado um estudo dessas subrotinas pelo suporte técnico dado pela Intel, com o objetivo de implementar estas subrotinas no código computacional.

A maneira mais eficiente de verificar o custo computacional das FFT's foi realizar a transformada direta e inversa de Fourier para uma função simples sem qualquer interferência do tempo ou de outras variáveis. Para isto, foi utilizada a função dada pela Eq. 14:

$$f(x) = \text{sen}(x) \quad (14)$$

Desta forma, foi realizados testes de transformação para o espaço espectral e, logo em seguida, uma transformação para o espaço físico, ou seja, foi utilizada a transformada direta (Eq. 2) e inversa de Fourier (Eq. 3) várias vezes, a fim de estimar o tempo computacional médio.

A Tab.3 mostra o custo computacional, utilizando dupla precisão, quando se faz a transformada de ida e de volta.

Tabela 3: Custo computacional das FFT's testadas, com o aumento da quantidade de nós de colocação N .

N	Custo computacional [s]		
	FFTe	FFTw	FFTi
8	0.0042	0.0041	0.0045
16	0.0046	0.0042	0.0045
32	0.0047	0.0044	0.0033
64	0.005	0.0041	0.0045
128	0.0078	0.0049	0.0048
256	0.0106	0.0077	0.0096
512	0.0121	0.0121	0.011
1024	0.0181	0.0126	0.013
2048	0.0206	0.0148	0.0154
4096	0.0318	0.0223	0.0224
8192	0.0583	0.0342	0.0346
16384	0.1027	0.062	0.0573
32768	0.1865	0.1058	0.1046
65536	0.367	0.2048	0.1999
131072	0.7243	0.3959	0.3875
262144	1.4153	0.7711	0.759
524288	2.8444	1.5294	1.5072
1048576	5.6225	2.9835	3.1817
2097152	12.219	6.439	6.54
4194304	24.617	13.024	13.17
8388608	49.128	26.182	32.887
16777216	99.961	54.142	55.152

Pode ser observado que o tempo computacional gasto, pelas FFTw e FFTi para resolver a função dada pela Eq. 14, foi aproximadamente 50% menor que o custo computacional obtido pela FFTe, para um número de nós de colocação elevado, $N > 131.072$. Além disso, os resultados do custo computacional obtido pela FFTw e FFTi foi praticamente o mesmo.

A análise da acurácia das FFT's também foi verificada. Para este caso, foi implementado as subrotinas das FFTw e FFTi no código da EDP difusiva, o qual foi utilizado para fazer os testes a primeira etapa. Logo, a EDP utilizada foi dada pela Eq. 7. O tempo total de simulação foi de 100 [s] para todos os casos, assim como o $\Delta t = 10^{-5}$ [s], com dupla precisão em todos os testes.

Para todas as FFT's utilizadas foi alcançado o erro de truncamento de máquina, o que mostra a eficiência das FFTw e FFTi.

6. CONCLUSÃO

No presente trabalho foi feito um estudo da análise dos erros utilizando o método de Euler, Euler Implícito e Runge-Kutta para a resolução de uma EDP através do método espectral de Fourier. Os resultados foram obtidos calculando os erros máximo L_∞ e a norma L_2 . A análise entre os métodos de discretização temporal mostrou que o método de Runge-Kutta é o mais eficiente, com erro de máquina obtido para todos os casos testados.

Além disso, foi verificado qual o valor máximo de Δt que cada método suporta sem divergir. O método de Euler divergiu com $\Delta t = 0,1$ [s], o método de Runge-Kutta com $\Delta t = 1$ [s] e o método de Euler Implícito não diverge, mesmo para um elevado Δt .

Na segunda parte do trabalho, a análise de tempo computacional foi realizada a fim de verificar a eficiência de outras FFT's, além da FFTe que é a utilizada atualmente no MFLab. Os resultados mostraram que o uso das FFTw e FFTi são mais rápidas computacionalmente, com metade do tempo computacional gasto pela FFTe. Além disso, os erros dado pela norma L_∞ e L_2 mostraram a mesma acurácia para todas as FFT's testadas. Porém, testes adicionais são necessários para verificar se vale, realmente, a pena a mudança de FFT.

7. REFERÊNCIAS

BRIGGS, W.; HENSON, V. **The DFT**. Philadelphia: SIAM, 1995.

COOLEY, T. W.; TUKEY, J. W. **An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series**. Mathematics of Computation, v. 19, p. 297{301, 1965.

FERZIGER, J.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. New York: Springer, 1996.

FRIGO M.; JHONSON S. G.; **FFTW**. 2009. Disponível em: <http://www.fftw.org/speed/CoreDuo-3.0GHz-icc64/>. Acesso em: 14 out. 2011.

MARIANO, F. P. **Simulação de escoamentos não-periódicos utilizando as metodologias pseudo-espectral de Fourier e da fronteira imersa acopladas**. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

MARIANO, F. P. **Solução numérica das equações de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias fronteira imersa e pseudo-espectral de Fourier**. 175 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; SILVEIRA-NETO, A.; SILVA, C. B. da; PEREIRA, J. C. F. **A new incompressible Navier-Stokes solver combining Fourier pseudo-spectral and immersed boundary method**. Computer Modeling in Engineering Science, v. 59, p. 181-216, 2010.

MOREIRA, L. Q. **Modelagem matemática de jatos em desenvolvimento espacial usando a metodologia pseudo-espectral de Fourier**. 202 f. Tese (Doutorado) -Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.

MOREIRA, L. Q.; MARIANO, F. P.; SILVEIRA-NETO, A. **The importance of adequate turbulence modeling in fluid flows**. Computer Modeling in Engineering Science, v. 75, n° 2, p. 113-140, 2011.

SOUZA, A. M. **Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares livres**. 180 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.

TAKAHASHI, D. **A hybrid MPI/OpenMP implementation of a parallel 3-D FFT on SMP clusters**. Lecture Notes in Computer Science, v. 3911, p. 970{977, 2006.

TREFETHEN, L. **Spectral methods in Matlab**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.