

MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE SISTEMAS DINÂMICOS COMBINANDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS E LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA PARA O CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES E RUÍDO

*Bruno Guaraldo Neto; Domingos Alves Rade, Antonio Marcos Gonçalves De Lima
Thiago de Paula Sales, Domingos Alves Rade*

Um dos grandes problemas da Engenharia Mecânica é sem dúvidas a busca por técnicas eficientes que permitam o controle dos níveis de vibração e ruído de sistemas mecânicos em virtude da tendência de realização de estruturas cada vez mais extensas e leves, aumento considerável da velocidade de operação de máquinas, bem como a necessidade de atender as normas ambientais cada vez mais severas. Neste contexto, a fim de eliminar ou atenuar os inúmeros inconvenientes causados pela vibração e ruído de sistemas dinâmicos, inúmeras técnicas de controle têm sido empregadas para tratar o problema de vibrações de sistemas mecânicos, como por exemplo, as técnicas de controle ativo, semi-ativo e passivo. No que diz respeito às técnicas de controle passivo, o uso de materiais capazes de absorver a energia vibratória do sistema e dissipá-la sob a forma de calor tem crescido enormemente com os avanços tecnológicos na área de materiais combinado com o aprimoramento das técnicas experimentais de identificação. Como exemplos, pode-se citar os materiais viscoelásticos que podem ser aplicados sob a forma de dispositivos discretos e tratamentos superficiais (Rao, 2002), e as ligas com memória de forma (Lagoudas, 2008).

Em particular, os materiais viscoelásticos (MV) vêm sendo largamente utilizados para aumentar o amortecimento passivo de estruturas veiculares, aeroespaciais em sistemas robóticos, satélites de comunicação, etc (Rao, 2002, Lima, 2003). A necessidade então, por modelos matemáticos que representassem adequadamente o comportamento desses materiais tem motivado o desenvolvimento de modelos constitutivos capazes de representar adequadamente as propriedades desses materiais. Podem ser citados como exemplo os modelos reológicos simples, como o modelo de Maxwell, Kelvin-Voigt e o de Zener (ou modelo Linear Padrão) e os modelos ditos modernos, como o método do módulo complexo, o modelo dos campos de deslocamentos anelásticos (CDA), o modelo de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) e o modelo das derivadas fracionárias (MDF) proposto por Bagley e Torvik (1983). Recentemente, Schmidt e Gaul (2001), bem como Galucio *et al* (2004) apresentaram uma modelagem do comportamento viscoelástico incorporando o modelo das derivadas fracionária a um modelo de elementos finitos. Cazenove *et al* (2011), por sua vez, investigaram, numérica e experimentalmente o efeito do autoaquecimento de amortecedores viscoelásticos submetidos a carregamentos cíclicos, apresentando resultados que mostraram grandes variações do módulo de armazenamento e do fator de perda do material em virtude do aumento da temperatura interna, resultando em perda de eficiência desses materiais.

Nas últimas duas décadas, um grande esforço de pesquisa tem sido empregado para associar os efeitos de memória de forma e pseudoelasticidade das ligas com memória de forma (LMF), com outros dispositivos destinados ao controle de vibração e ruído de sistemas mecânicos (Sun *et al*, 1995). Williams *et al* (2005) simulou o comportamento dinâmico de um ADV adaptativo combinando LMF para o controle de vibrações de sistemas mecânicos. Thompson *et al* (1994) provou, teórica e experimentalmente, a capacidade das LMF, através do seu comportamento pseudoelástico, em aumentar o amortecimento passivo de estruturas mecânicas utilizando o método da banda de meia potência para determinar a taxa de amortecimento gerado pelo material. Gandhi e Chapius (2002) utilizando fios de LMF pré-tensionados e simetricamente fixados a uma viga sujeita a carregamentos harmônicos, analisam o comportamento histerético do material utilizando a aproximação do módulo complexo.

Neste sentido, dada a importância do uso dos materiais viscoelásticos e das ligas com memória de forma em estruturas mecânicas com vistas ao aumento do amortecimento dessas estruturas, o objetivo principal deste trabalho consiste no estudo e implementação numérico-computacional de procedimentos de modelagem de sistemas dinâmicos incorporando tratamento viscoelástico superficial associado a um tratamento discreto utilizando fios de LMF, de modo a reduzir os níveis de vibração da estrutura.

Para representar o comportamento pseudoelástico das LMF sujeito a carregamentos dinâmicos, será utilizado o modelo simplificado proposto por Lagoudas *et al* (2001). Este modelo dependente da deformação e do histórico de carregamentos, além de assumir um comportamento linear para a variação da tensão e da deformação de transformação, o que resulta em um conjunto de equações lineares que permitem a determinação da resposta dinâmica de uma LMF quando submetido a carregamentos dinâmicos.

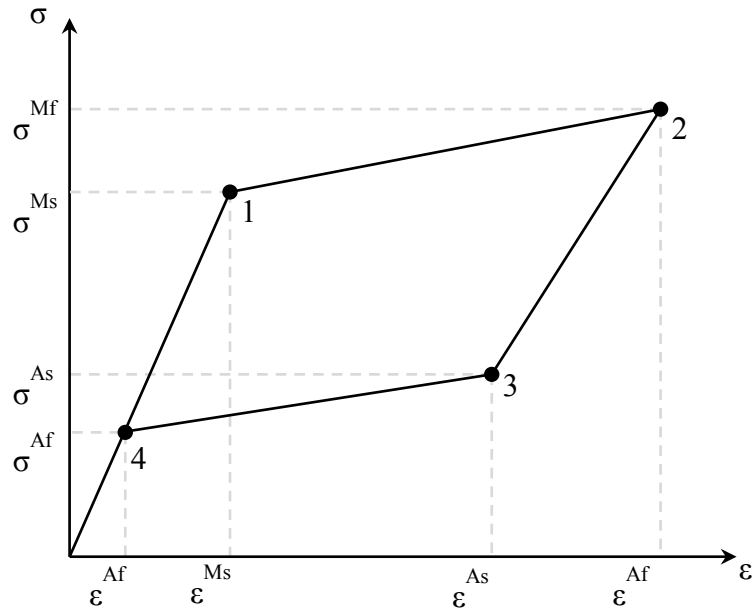


Figura 1 - Diagrama tensão-deformação do efeito pseudoelástico do modelo simplificado de Lagoudas *et al* (2001).

Considerando-se que o material esteja inicialmente no seu estado puramente austenítico e sem qualquer deformação, a região linear elástica (4-1) é regida pelas equações:

$$\varepsilon^t = 0 \quad (1)$$

$$\sigma = E_A(\varepsilon) \quad (2)$$

Para níveis de tensão superiores a σ_{Ms} , o material é induzido a uma transformação direta, austenita-martensita, na qual a deformação de transformação e a tensão variam linearmente até atingir seu valor máximo, Λ . Dessa forma, tem-se:

$$\varepsilon^t = \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{Ms}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{Ms}} \right) \quad (3)$$

$$\sigma = \sigma_{Ms} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}) \quad (4)$$

Após a transformação direta, inicia-se o regime linear de descarregamento (2-3) com o material apresentando uma estrutura cristalina puramente martensítica. Neste fase, tem-se:

$$\varepsilon^t = \Lambda \quad (5)$$

$$\sigma = \sigma_{Mf} + E_M (\varepsilon - \varepsilon_{Mf}) \quad (6)$$

Ao final do descarregamento referente ao ponto 3, inicia-se a transformação reversa, até que seja atingido o ponto 4, no qual o material encontra-se novamente em seu estado puramente austenítico. Para esta região são válidas as seguintes equações:

$$\varepsilon^t = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon_{As} - \varepsilon}{\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Af}} \right) \quad (7)$$

$$\sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{As} - \sigma_{Af}) \quad (8)$$

As equações (1) a (8) são utilizadas para a modelagem do comportamento pseudoelástico da LMF quando submetidas a carregamentos dinâmicos cíclicos que induzem transformações de fase completa, Fig.1. No entanto, dependendo da solicitação imposta à LMF, pode haver apenas uma transformação de fase parcial, como mostra a Fig.2. Dessa forma as equações propostas anteriormente precisam ser modificadas para esta condição (Lagoudas, 2001).

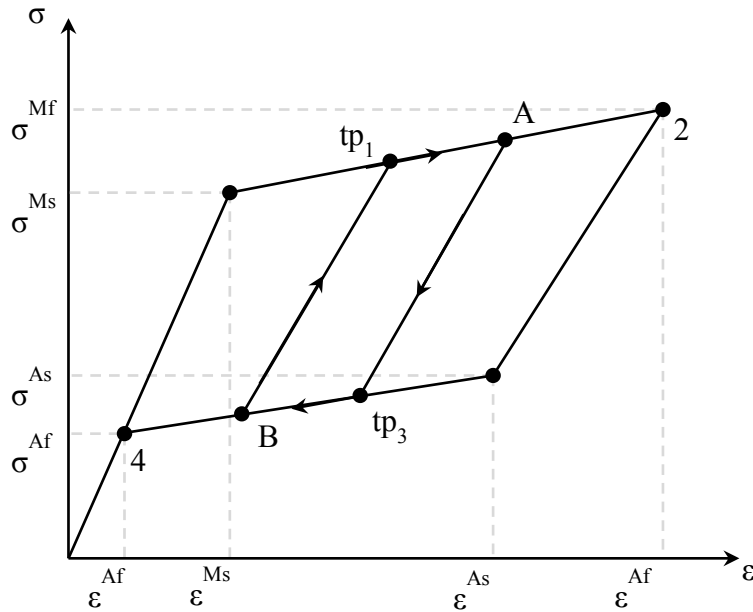


Figura 2 – Diagrama tensão-deformação com transformação de fase parcial (adaptado de Lagoudas *et al*, 2001).

Admitindo que o material inicialmente esteja em seu estado puramente austenítico e sem deformação, o processo de carregamento é linear como descrito anteriormente. No entanto, à medida que o material é carregado na região de transformação, este pode ser descarregado antes de atingir o ponto 2, iniciando um processo de descarregamento linear até atingir a região de transformação reversa, como pode ser observado na região (A-3) da Fig.4. As equações que modelam este comportamento são expressas como segue:

$$E_R = \frac{E_M E_A}{\left(\frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (E_A - E_M) + E_M \right)} \quad (9)$$

$$\sigma = \sigma_{\max} + E_R (\varepsilon - \varepsilon_{\max}) \quad (10)$$

onde $\sigma_{\max}$, $\varepsilon_{\max}$ e $\varepsilon_{\max}^t$ são, respectivamente, a tensão, deformação e deformação de transformação do ponto A (onde se inicia a transformação incompleta do ciclo).

A deformação e a tensão do ponto 3 são calculadas a partir das seguintes equações:

$$\varepsilon_{tp3} = \varepsilon_{As} + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Af}) \quad (11)$$

$$\sigma_{tp3} = \sigma_{As} + \frac{\varepsilon_{\max}^t}{\Lambda} (\sigma_{As} - \sigma_{Af}) \quad (12)$$

Terminado o descarregamento linear, o material se encontra na região de transformação reversa. Este, então, continua sendo descarregado até que seja atingido o ponto 4, e o material retorna às condições iniciais, ou a transformação é novamente interrompida, ponto B, e o material passa a ser carregado linearmente até o ponto 1. As equações que modelam a região de transformação reversa são dadas por:

$$\varepsilon^t = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon}{\varepsilon_{tp3} - \varepsilon_{Af}} \right) \quad (13)$$

$$\sigma = \sigma_{Af} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{tp3} - \sigma_{Af}) \quad (14)$$

Para região (B-1), tem-se:

$$E_F = \frac{E_M E_A}{\left(\frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (E_A - E_M) + E_M \right)} \quad (15)$$

$$\sigma = \sigma_{\min} + E_F (\varepsilon - \varepsilon_{\min}) \quad (16)$$

onde $\sigma_{\min}$, $\varepsilon_{\min}$ e $\varepsilon_{\min}^t$ representam, respectivamente, a tensão, a deformação e a deformação de transformação do ponto B, cuja tensão e a deformação são calculados pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon_{tp1} = \varepsilon_{Ms} + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{Ms}) \quad (17)$$

$$\sigma_{tp1} = \sigma_{Ms} + \frac{\varepsilon_{\min}^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{Ms}) \quad (18)$$

Prosseguindo o carregamento, o material se encontra na região de transformação direta, na qual o material pode atingir o ponto 2, ou interromper o ciclo em um novo ponto. As equações desta região são dadas como:

$$\varepsilon^t = \Lambda - \Lambda \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{tp1}}{\varepsilon_{Mf} - \varepsilon_{tp1}} \right) \quad (19)$$

$$\sigma = \sigma_{tp1} + \frac{\varepsilon^t}{\Lambda} (\sigma_{Mf} - \sigma_{tp1}) \quad (20)$$

Neste trabalho, para modelar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos, será utilizado o modelo das derivadas fracionárias inicialmente proposto por Bagley e Torvik (1983), cuja equação diferencial que relaciona as tensões e deformações para o caso unidimensional pode ser representada como segue:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{d^\alpha \sigma(t)}{dt^\alpha} = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} \quad (21)$$

onde $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ são, respectivamente, a tensão e a deformação, E_0 é o módulo estático do material viscoelástico (módulo a baixa frequência), E_∞ é o módulo dinâmico (módulo a alta frequência) e τ é o tempo de relaxação. Segundo Galucio *et al* (2004) Riemann-Liouville, define o operador derivativo fracionário $d^\alpha f(t)/dt^\alpha$ pela seguinte expressão matemática:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (22)$$

onde $\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ é conhecida como função gama e α é a ordem da derivada temporal fracionária da função $f(t)$ ($0 < \alpha < 1$).

Dentre os modelos que foram desenvolvidos para aproximar o operador fracionário d^α/dt^α , neste trabalho será utilizado o desenvolvimento proposto por Grünwald-Letnikov, sendo válido para todos os valores do operador fracionário α , além de sua fácil implementação numérica:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \approx \left(\frac{t}{N} \right)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_p} A_{j+1}(\alpha) f\left(t - j \frac{t}{N}\right) \quad (23)$$

onde Δt é o intervalo de tempo constante, N é número de divisões do intervalo de derivação, N_p é o número de pontos do histórico de $f(t)$ utilizados na discretização, A_{j+1} denotam os coeficientes de Grünwald, relacionados a ordem diferencial α e que são calculados através da função Gama ou pela seguinte fórmula recursiva:

$$A_{j+1}(\alpha) = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} = A_{j+1}(\alpha) = \frac{j-\alpha-1}{j} A_j \quad (24)$$

No sentido de obter uma equação com apenas um termo fracionário derivativo, Galucio *et al*, (2004) propõem a utilização de uma deformação inelástica $\bar{\varepsilon}$ como segue:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E_\infty} \quad (25)$$

Introduzindo a aproximação de Grünwald, Eq.(23), na expressão (25), notando que $A_1(\alpha) = 1$ para $j = 0$ e $\Delta t = t/N$, esta pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\varepsilon}(t) = (1-c) \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \varepsilon(t) - c \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha) \bar{\varepsilon}(t - j\Delta t) \quad (26)$$

onde $c = \frac{\tau^\alpha}{(\Delta t)^\alpha + \tau^\alpha}$.

Substituindo a Eq.(26) na Eq.(25) pode-se calcular a tensão a que o material viscoelástico está submetido:

$$\sigma(t) = \left[1 + c \left(\frac{E_\infty - E_0}{E_\infty} \right) \right] E_0 \varepsilon(t) + c \frac{E_\infty}{E_0} E_0 \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha) \bar{\varepsilon}(t - j\Delta t) \quad (27)$$

Uma vez determinada a relação tensão-deformação para os materiais viscoelásticos via uso do modelo MDF, o próximo passo é a combinação do MDF com modelo de elementos finitos de sistemas estruturais, como será apresentado em seguida.

Seja a seguinte relação para os campos de deslocamentos obtidos via uso do método dos elementos finitos:

$$\mathbf{u}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(e)}(t) \quad (28)$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ representa o campo de deslocamento ao nível elementar, $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x})$ é uma matriz contendo as funções de interpolação, $\mathbf{q}^{(e)}(t)$ designa o vetor dos graus de liberdade (GDL) nodais, e $\mathbf{x}$ é o vetor das coordenadas espaciais. Desta forma, assumindo pequenos deslocamentos, pode-se obter a seguinte relação entre os campos de deslocamentos mecânicos e as deformações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(e)}(t) \quad (29)$$

onde $\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{x})$ é chamada de matriz de deformação, definida como segue:

$$\mathbf{B}^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}) \quad (30)$$

onde $\mathbf{D}$ é matriz contendo os operadores diferenciais espaciais.

Aplicando o princípio do trabalho virtual realizado pelas forças internas presentes no elemento, onde $\Omega^{(e)}$ denota a região na qual o elemento é definido, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_s^{(e)}(t) &= - \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, t)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(\mathbf{x}, t) d\Omega^{(e)} \\ &= \left[- \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) - c \frac{E_\infty}{E_0} \mathbf{K}^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha) \bar{\mathbf{q}}^{(e)}(t - j\Delta t) \right]^T \delta \mathbf{q}^{(e)}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

onde

$$\mathbf{K}_v^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x})^T \mathbf{D}^T \mathbf{C}^{(e)}(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}) d\Omega^{(e)} \quad (32)$$

Utilizando as equações de Lagrange, pode-se determinar a equação do movimento ao nível elementar:

$$\mathbf{M}_v^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) + \left(1 + c \frac{E_\infty - E_0}{E_0} \right) \mathbf{K}_v^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) = \mathbf{Q}_e^{(e)}(t) - c \frac{E_\infty}{E_0} \mathbf{K}_v^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha) \bar{\mathbf{q}}^{(e)}(t - j\Delta t) \quad (33)$$

onde $\mathbf{M}_v^{(e)}$ denota a matriz de massa elementar, e $\mathbf{Q}_e^{(e)}$ denota a matriz de esforços externos.

Uma vez apresentada a técnica de modelagem do efeito viscoelástico em modelos de elementos finitos de forma genérica, o próximo passo é modelagem de uma viga multicamada formada por uma camada viscoelástica entre duas camadas metálicas, baseada no trabalho original de Galucio et al. (2004). Para a modelagem será assumido que todas as camadas estão perfeitamente unidas e sujeitas a um estado plano de tensões. Além disso, a camada viscoelástica é modelada via Teoria de Timoshenko. A Fig. 4 apresenta de forma esquemática a geometria da viga deformada, bem como suas relações cinemáticas, apresentando os campos de deslocamentos de cada camada dados pelas Eqs. (34) e (35).

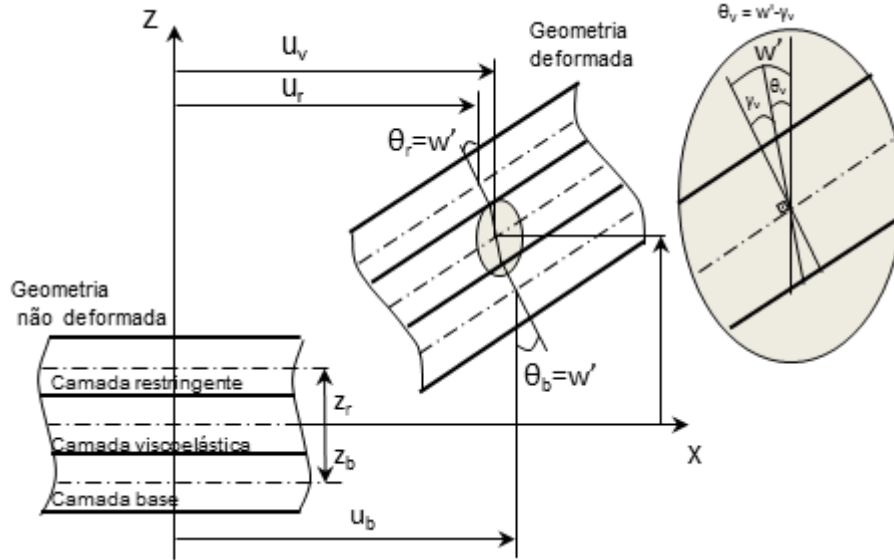


Figura 4 – Ilustração da geometria da viga sanduiche e suas relações cinemáticas (adaptado de Galucio et al (2004))

$$u_{xi}(x,y,z,t) = u_i(x,t) + (z - z_i)\alpha_i(x,t), \quad i = b,v,r \quad (34)$$

$$u_{zi}(x,y,z,t) = w(x,t), \quad i = b,v,r \quad (35)$$

onde os índices b,v e r designam, respectivamente, a estrutura base, o núcleo viscoelástico e a camada restringente. $u_{xi}(x,y,z,t)$ e $u_{zi}(x,y,z,t)$ denotam o deslocamento axial e transversal de cada camada e $u_i(x,t)$, $w_i(x,t)$ e $\alpha_i(x,t)$ denotam o deslocamento axial da linha neutra, a rotação das fibras e o deslocamento transversal de cada camada.

A partir das hipóteses de Euler-Bernoulli para as camadas elásticas e assumindo condições de continuidade entre os campos de deslocamentos entre as camadas, os deslocamentos axiais, u_i , e as rotações, α_i , podem ser determinados. Para a camada viscoelástica, tem-se:

$$u_v(x,t) = \frac{1}{2}[u_r(x,t) + u_b(x,t)] + \frac{h_r - h_b}{4} \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) \quad (36)$$

$$\alpha_v(x,t) = \frac{1}{h_v} \left[u_r(x,t) - u_b(x,t) + \frac{h_r + h_b}{2} \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) \right] \quad (37)$$

onde,

$$\alpha_k(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t} w(x,t), \quad k = b, r \quad (38)$$

Assumindo o estado plano de tensões, as deformações axial e cisalhante de cada camada podem ser obtidas diferenciando os campos de deslocamentos obtidos pelas Eqs. (34) e (35) em relação a x .

$$\varepsilon_{xzi}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_{xi}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_i(x, t) - (z - z_i) \frac{\partial}{\partial x} \alpha_i(x, t), \quad i = b, v, r \quad (39)$$

$$\gamma_{xzi}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} u_{xi}(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial x} u_{zi}(x, y, z, t) = \alpha_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} w(x, t), \quad i = b, v, r \quad (40)$$

A partir das Eqs. (39) e (40) obtêm-se a deformação de membrana ε_{mi} e a deformação de flexão, ε_{bi} para cada camada:

$$\varepsilon_{mi} = \frac{\partial}{\partial x} u_{xi}(x, y, z, t), \quad i = b, v, r \quad (41)$$

$$\varepsilon_{bi} = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_i, \quad i = b, v, r \quad (42)$$

Considerando, então, o vetor contendo os graus de liberdade

$$\mathbf{q}^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^{(e)}(t)^T & \mathbf{q}_2^{(e)}(t)^T \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(e)}(t) &= \begin{bmatrix} u_b^{(e)}(x, t) & w^{(e)}(x, t) & w'^{(e)}(x, t) & u_c^{(e)}(x, t) \end{bmatrix}_{x=0}^T \\ \mathbf{q}_2^{(e)}(t) &= \begin{bmatrix} u_b^{(e)}(x, t) & w^{(e)}(x, t) & w'^{(e)}(x, t) & u_c^{(e)}(x, t) \end{bmatrix}_{x=l^{(e)}}^T \end{aligned} \quad (44)$$

onde $l^{(e)}$ é o comprimento do elemento e $w'^{(e)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} w^{(e)}(x, t)$. Pode-se, então, determinar o vetor de deslocamentos generalizados ao nível elementar como apresentado na Eq. (28), onde, para o caso em específico da viga multicamada, tem-se:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, t) = \begin{bmatrix} u_b^{(e)}(x, t) & w^{(e)}(x, t) & u_r^{(e)}(x, t) \end{bmatrix}^T \quad (45.a)$$

$$\mathbf{H}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} H_{11}^{(e)}(x) & 0 & 0 & 0 & H_{15}^{(e)}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22}^{(e)}(x) & H_{23}^{(e)}(x) & 0 & 0 & H_{26}^{(e)}(x) & H_{27}^{(e)}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{34}^{(e)}(x) & 0 & 0 & 0 & H_{38}^{(e)}(x) \end{bmatrix} \quad (45.b)$$

onde as funções de forma são apresentadas como segue:

$$H_{11}^{(e)}(x) = H_{34}^{(e)}(x) = 1 - \xi, \quad \xi = x/l^{(e)} \quad (45.c)$$

$$H_{15}^{(e)}(x) = H_{38}^{(e)}(x) = \xi \quad (45.d)$$

$$H_{22}^{(e)}(x) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (45.e)$$

$$H_{23}^{(e)}(x) = [\xi - 2\xi^2 + \xi^3]l^{(e)} \quad (45.f)$$

$$H_{26}^{(e)}(x) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (45.g)$$

$$H_{27}^{(e)}(x) = [-\xi^2 + \xi^3]l^{(e)} \quad (45.h)$$

A energia cinética, para um elemento, pode ser calculada por:

$$T^{(e)}(t) = T_b^{(e)}(t) + T_v^{(e)}(t) + T_c^{(e)}(t) \quad (46)$$

onde

$$T_i^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i^{(e)}} \rho_i^{(e)} [\mathbf{v}_i^{(e)}(x, y, z, t)]^T \mathbf{v}_i^{(e)}(x, y, z, t) d\Omega_i^{(e)} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}^{(e)}(t)]^T \mathbf{M}_i^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) \quad i = b, v, r \quad (47)$$

Na Eq. (62), $\mathbf{M}_i^{(e)}$ é a matriz de massa elementar de cada camada e expressa por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^{(e)} = & \int_0^{l^{(e)}} \rho_i^{(e)} A_i^{(e)} \left([\mathbf{H}_{ui}^{(e)}(x)]^T \mathbf{H}_{ui}^{(e)}(x) + [\mathbf{H}_w^{(e)}(x)]^T \mathbf{H}_w^{(e)}(x) \right) dx + \dots \\ & \dots + \int_0^{l^{(e)}} \rho_i^{(e)} I_i^{(e)} [\mathbf{H}_{ai}^{(e)}(x)]^T \mathbf{H}_{ai}^{(e)}(x) dx, \quad i = b, v, r \end{aligned} \quad (48)$$

onde $A_i^{(e)}$ é área da seção transversal e $I_i^{(e)}$ é o momento de inércia, em nível elementar, e que são calculados da seguinte forma::

$$\left[A_i^{(e)}, I_i^{(e)} \right] = \int_{-\frac{1}{2}b_i^{(e)}}^{+\frac{1}{2}b_i^{(e)}} \int_{z_i - \frac{1}{2}h_i^{(e)}}^{z_i + \frac{1}{2}h_i^{(e)}} \left[1, (z - z_i)^2 \right] dz dy \quad (49)$$

Dessa forma, tem-se

$$T^{(e)}(t) = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}^{(e)}(t)]^T \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) \quad (50)$$

onde $\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{M}_b^{(e)} + \mathbf{M}_v^{(e)} + \mathbf{M}_r^{(e)}$ é chamada de matriz de massa elementar

No sentido de determinar as matrizes de rigidez do sistema em análise é utilizado o princípio do trabalho virtual para as forças internas do sistema, o qual é expresso da seguinte forma:

$$\delta W_s^{(e)}(t) = \delta W_{sb}^{(e)}(t) + \delta W_{sv}^{(e)}(t) + \delta W_{sr}^{(e)}(t), \quad (51)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta W_{sk}^{(e)}(t) &= - \int_{\Omega_k^{(e)}} \sigma_{xxk}^{(e)}(x, y, z, t) \delta \varepsilon_{xxk}^{(e)}(x, y, z, t) d\Omega_k^{(e)} \\ &= - \int_{\Omega_k^{(e)}} [E_{xxk}^{(e)} \varepsilon_{xxk}^{(e)}(x, y, z, t)] \delta \varepsilon_{xxk}^{(e)}(x, y, z, t) d\Omega_k^{(e)} \\ &= [-\mathbf{K}_k^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t)]^T \delta \mathbf{q}^{(e)}(t), \quad k = b, r \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{sv}^{(e)}(t) &= - \int_{\Omega_v^{(e)}} \sigma_{xxv}^{(e)}(x, y, z, t) \delta \varepsilon_{xxv}^{(e)}(x, y, z, t) d\Omega_v^{(e)} - \int_{\Omega_v^{(e)}} \sigma_{xzv}^{(e)}(x, y, z, t) \delta \gamma_{xzv}^{(e)}(x, y, z, t) d\Omega_v^{(e)} \\ &= \left[- \left(1 + c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)} - E_0^{(e)}}{E_0^{(e)}} \right) \mathbf{K}_v^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) - c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)}}{E_0^{(e)}} \mathbf{K}_v^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}^{(e)} (\alpha^{(e)})^j \bar{\mathbf{q}}^{(e)}(t - j\Delta t) \right]^T \delta \mathbf{q}^{(e)}(t). \end{aligned} \quad (53)$$

As matrizes de rigidez das camadas elásticas, $\mathbf{K}_b^{(e)}$, $\mathbf{K}_r^{(e)}$ e da camada viscoelástica $\mathbf{K}_v^{(e)}$ são expressas por:

$$\mathbf{K}_k^{(e)} = \int_0^{l^{(e)}} E_{xxk}^{(e)} \left(A_k^{(e)} [\mathbf{B}_{mk}^{(e)}(x)]^T \mathbf{B}_{mk}^{(e)}(x) + I_k^{(e)} [\mathbf{B}_{bk}^{(e)}(x)]^T \mathbf{B}_{bk}^{(e)}(x) \right) dx \quad k = b, r \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_v^{(e)} = & \int_0^{l^{(e)}} E_{xxv}^{(e)} \left(A_v^{(e)} [\mathbf{B}_{mv}^{(e)}(x)]^T \mathbf{B}_{mv}^{(e)}(x) + I_v^{(e)} [\mathbf{B}_{bv}^{(e)}(x)]^T \mathbf{B}_{bv}^{(e)}(x) \right) dx + \dots \\ & \dots + \int_0^{l^{(e)}} k_v^{(e)} E_{xzv}^{(e)} A_v^{(e)} [\mathbf{B}_{sv}^{(e)}(x)]^T \mathbf{B}_{sv}^{(e)}(x) dx \end{aligned} \quad (55)$$

Deve-se destacar que para computar as Eqs. (55) e (53), foi utilizado o modelo das derivadas fracionárias proposto por Bagley e Torvik (1983).

As expressões matemáticas utilizadas para calcular as tensões presentes na camada viscoelástica, são expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xxv}^{(e)}(x, y, z, t) = & \left(1 + c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)} - E_0^{(e)}}{E_0^{(e)}} \right) E_{xxv}^{(e)} \varepsilon_{xxv}^{(e)}(x, y, z, t) + \dots \\ & \dots + c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)}}{E_0^{(e)}} E_{xxv}^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha^{(e)}) \bar{\varepsilon}_{xxv}^{(e)}(x, y, z, t - j\Delta t) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xzv}^{(e)}(x, y, z, t) = & \left(1 + c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)} - E_0^{(e)}}{E_0^{(e)}} \right) E_{xzv}^{(e)} \gamma_{xzv}^{(e)}(x, y, z, t) + \dots \\ & \dots + c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)}}{E_0^{(e)}} E_{xzv}^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha^{(e)}) \bar{\gamma}_{xzv}^{(e)}(x, y, z, t - j\Delta t) . \end{aligned} \quad (57)$$

Utilizando as Eq.(52) e (53) o trabalho virtual das forças internas, Eq.(51), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\delta W_s^{(e)}(t) = \left[-\bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) - c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)}}{E_0^{(e)}} \mathbf{K}_v^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha^{(e)}) \bar{\mathbf{q}}^{(e)}(t - j\Delta t) \right]^T \delta \mathbf{q}^{(e)}(t) \quad (58)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \mathbf{K}_b^{(e)} + \left(1 + c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)} - E_0^{(e)}}{E_0^{(e)}} \right) \mathbf{K}_v^{(e)} + \mathbf{K}_c^{(e)}$ é a matriz de rigidez elementar, parcialmente modificada pela constante $c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)} - E_0^{(e)}}{E_0^{(e)}}$ para contemplar o efeito do material viscoelástico.

Com o intuito de determinar a equação do movimento para a viga multicamadas, faz-se uso do Princípio Variacional de Hamilton ou, de forma equivalente, das equações de Lagrange. Assim, utilizando as equações de Lagrange, na forma de

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right]^T - \left[\frac{\partial T^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} \right]^T = \mathbf{Q}^{(e)} \quad (59)$$

onde $\mathbf{Q}^{(e)}$ é um vetor que contem as forças generalizadas elementares do sistema dadas por:

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \mathbf{Q}_e^{(e)}(t) - \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) - c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)}}{E_0^{(e)}} \mathbf{K}_v^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha^{(e)}) \bar{\mathbf{q}}^{(e)}(t - j\Delta t) \quad (60)$$

e $\mathbf{Q}_e^{(e)}(t)$ é o vetor das forças externas generalizadas. Desta forma, chega-se à equação do movimento ao nível elementar:

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)}(t) + \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) = \mathbf{Q}_e^{(e)}(t) - c^{(e)} \frac{E_\infty^{(e)}}{E_0^{(e)}} \mathbf{K}_v^{(e)} \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha^{(e)}) \bar{\mathbf{q}}^{(e)}(t - j\Delta t) . \quad (61)$$

Utilizando os procedimentos clássicos de montagem das matrizes globais via elementos finitos, pode-se obter equação do movimento ao nível global como segue:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}_e(t) - c \frac{E_\infty}{E_0} \mathbf{K}_v \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha) \bar{\mathbf{q}}(t - j\Delta t) \quad (62)$$

Uma vez apresentado o modelo de elementos finitos para um sistema multicamadas, contendo uma camada de material viscoelástico, fios de LMF serão incorporados simetricamente ao sistema apresentado anteriormente. Nesse sentido, antes de introduzir o comportamento dinâmico dos fios de LMF no modelo de elementos finitos do sistema multicamadas, serão apresentadas relações geométricas entre os parâmetros x_{SMA} , h_{SMA} , θ_{SMA} e L_{SMA}^{PT} . Uma vez que os fios de LMF são fixados apenas à camada base e de forma simétrica, a Fig.5 ilustra apenas esta camada contendo um fio de LMF, visando facilitar a entendimento da configuração do sistema.

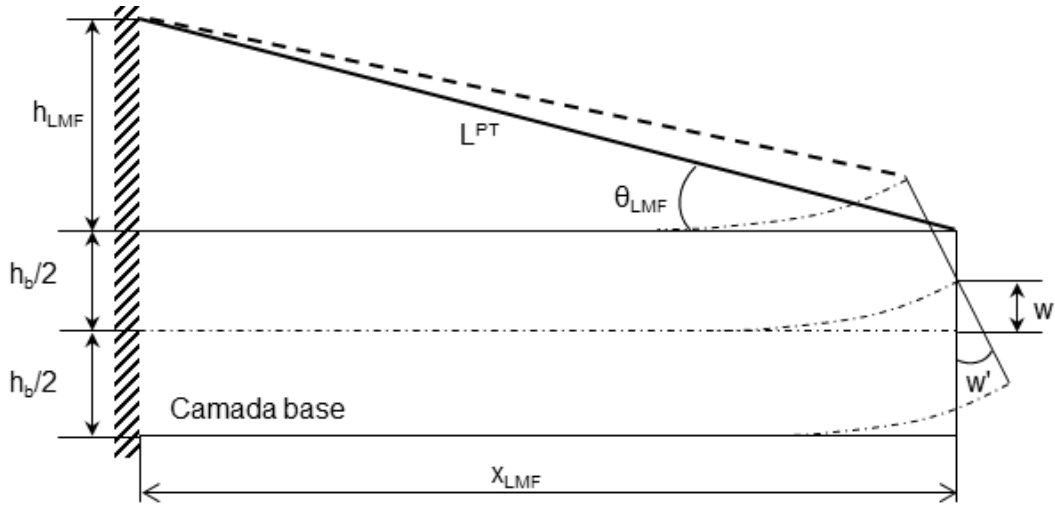


Figura 5 – Representação esquemática da fixação do fio de LMF na configuração deformada (—) e não deformada (---) à viga base (adaptado de Gandhi (2002)).

Dessa forma os parâmetros do sistema apresentados na Fig. 5, podem ser relacionados da seguinte forma:

$$(L_{LMF}^{PT})^2 = x_{LMF}^2 + h_{LMF}^2 ; \quad \theta_{LMF} = \tan^{-1} \frac{h_{LMF}}{x_{LMF}} = \cos^{-1} \frac{x_{LMF}}{L_{LMF}^{PT}} = \sin^{-1} \frac{h_{LMF}}{L_{LMF}^{PT}} . \quad (63)$$

Analisando as equações que calculam o nível de tensão nas LMF, considerando a possibilidade da realização de ciclos incompletos, Eq.(10), (14), (16) e (18), uma equação constitutiva pode ser proposta como segue:

$$\sigma_{LMF} = E_{região} \varepsilon_{LMF} + \sigma_{região} \quad (64)$$

onde $E_{região}$ é a inclinação das retas que formam o diagrama tensão-deformação ilustrado na Fig.3 e $\sigma_{região}$ pode ser obtido da seguinte forma:

$$\sigma_{região} = \sigma_i - E_{região} \varepsilon_i ; \quad i = \max, tp_3, \min, tp_1 \quad (65)$$

onde os índices $i = \max, tp_3, \min, tp_1$, caracterizam a região no diagrama tensão-deformação na qual o material se encontra: descarregamento elástico, transformação reversa, carregamento elástico e transformação direta, respectivamente.

Considerando uma configuração deformada do sistema ilustrado na Fig. 5, tem-se:

$$[(L_{LMF}^{PT})_1 + (\Delta L_{LMF}^{PT})_1]^2 = [x_{LMF} + (u_b)_k - \frac{h_b}{2} (w')_k]^2 + [h_{LMF} - (w)_k]^2 \quad (66)$$

$$[(L_{LMF}^{PT})_2 + (\Delta L_{LMF}^{PT})_2]^2 = [x_{LMF} + (u_b)_k + \frac{h_b}{2} (w')_k]^2 + [h_{LMF} + (w)_k]^2 \quad (67)$$

para os fios 1 e 2, respectivamente. Nas Eqs.(66) e (67) $(u_b)_k$, $(w)_k$ e $(w')_b$ são os graus de liberdade do k-ésimo nó utilizado na discretização da viga. A posição na qual os fios são fixados à camada base da viga é representada por x_{LMF} e $(L_{LMF}^{PT})_i$ e $(\Delta L_{LMF}^{PT})_i$, $i=1,2$, são os comprimentos dos fios pré-tensionados e a variação destes comprimentos em relação a configuração pré-tensionada, respectivamente. Uma vez que foram assumidos pequenos deslocamentos para a determinação do modelo de elementos finitos para a viga multicamadas citada anteriormente, pode-se negligenciar termos de ordem superiores quando as Eq.(66) e (67) forem expandidas. Dessa forma, para cada fio, tem-se:

$$(L_{LMF}^{PT})_1^2 + 2(L_{LMF}^{PT})_1(\Delta L_{LMF}^{PT})_1 = \overbrace{x_{LMF}^2 + h_{LMF}^2}^{(L_{LMF}^{PT})_1^2} + 2x_{LMF}(u_b)_k - h_b x_{LMF}(w')_k - 2h_{LMF}(w)_k \quad (68)$$

$$\Rightarrow (\Delta L_{LMF}^{PT})_1 = \cos \theta_{LMF}(u_b)_k - \frac{h_b}{2} \cos \theta_{LMF}(w')_k - \sin \theta_{LMF}(w)_k ;$$

$$(L_{LMF}^{PT})_2^2 + 2(L_{LMF}^{PT})_2(\Delta L_{LMF}^{PT})_2 = \overbrace{x_{LMF}^2 + h_{LMF}^2}^{(L_{LMF}^{PT})_2^2} + 2x_{LMF}(u_b)_k + h_b x_{LMF}(w')_k + 2h_{LMF}(w)_k \quad (69)$$

$$\Rightarrow (\Delta L_{LMF}^{PT})_2 = \cos \theta_{LMF}(u_b)_k + \frac{h_b}{2} \cos \theta_{LMF}(w')_k + \sin \theta_{LMF}(w)_k ,$$

onde $x_{LMF}/(L_{LMF}^{PT})_i = \cos \theta_{LMF}$ e $h_{LMF}/(L_{LMF}^{PT})_i = \sin \theta_{LMF}$, $i=1,2$ a partir da configuração pré-tensionada.

As deformações geradas nos fios podem ser obtidas utilizando a seguinte expressão:

$$(\varepsilon_{LMF})_i = \frac{(L_{LMF})_i - (L_{LMF}^{ND})_i}{(L_{LMF}^{ND})_i} = \frac{(L_{LMF})_i - (L_{LMF}^{PT})_i + (L_{LMF}^{PT})_i - (L_{LMF}^{ND})_i}{(L_{LMF}^{ND})_i} = \frac{(\Delta L_{LMF}^{PT})_i}{(L_{LMF}^{ND})_i} + (\varepsilon_{LMF}^{PT})_i \quad i=1,2 \quad (70)$$

onde o sobrescrito ND denota a condição não deformada dos fios de LMF.

Assim, considerando o comprimento dos fios antes da aplicação da pré-carga, como comprimento de referência, $(L_{LMF})_i$ é o comprimento atual dos fios e $(\varepsilon_{LMF}^{PT})_i$ é a deformação gerada em cada fio devido ao pré-tensionamento dos fios, e que podem ser calculadas por:

$$(\varepsilon_{LMF}^{PT})_i = (L_{LMF}^{ND})_i^{-1}[(L_{LMF}^{PT})_i - (L_{LMF}^{ND})_i], \quad i=1,2. \quad (71)$$

Considerando as Eqs.(68) a (70), tem-se:

$$(\varepsilon_{LMF})_1 = \frac{1}{(L_{LMF}^{ND})_1} \cos \theta_{LMF}(u_b)_k - \frac{h_b}{2(L_{LMF}^{ND})_1} \cos \theta_{LMF}(w')_k - \frac{1}{(L_{LMF}^{ND})_1} \sin \theta_{LMF}(w)_k + (\varepsilon_{LMF}^{PT})_1 ; \quad (71)$$

$$(\varepsilon_{LMF})_2 = \frac{1}{(L_{LMF}^{ND})_2} \cos \theta_{LMF}(u_b)_k + \frac{h_b}{2(L_{LMF}^{ND})_2} \cos \theta_{LMF}(w')_k + \frac{1}{(L_{LMF}^{ND})_2} \sin \theta_{LMF}(w)_k + (\varepsilon_{LMF}^{PT})_2 . \quad (72)$$

As forças geradas pelos fios de LMF, devido às deformações da viga multicamadas podem ser obtidas relacionando a Eq.(64) com as Eqs.(71) e (72):

$$\begin{aligned} (F_{LMF})_1 &= (A_{LMF})_1(\sigma_{LMF})_1 \\ &= \frac{(E_{região})_1(A_{LMF})_1}{(L_{LMF}^{ND})_1} \left[\cos \theta_{LMF}(u_b)_k - \frac{h_b}{2} \cos \theta_{LMF}(w')_k - \sin \theta_{LMF}(w)_k \right] + \dots \\ &\quad \dots + (E_{região})_1(A_{LMF})_1(\varepsilon_{LMF}^{PT})_1 + (A_{LMF})_1(\sigma_{região})_1 \\ &= \frac{(E_{região})_1(A_{LMF})_1}{(L_{LMF}^{ND})_1} \left[\cos \theta_{LMF} \quad -\sin \theta_{LMF} \quad -\frac{h_b}{2} \cos \theta_{LMF} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} u_b & w & w' & u_c \end{bmatrix}_k^T + \dots \\ &\quad \dots + (E_{região})_1(A_{LMF})_1(\varepsilon_{LMF}^{PT})_1 + (A_{LMF})_1(\sigma_{região})_1 ; \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
(F_{LMF})_2 &= (A_{LMF})_2 (\sigma_{LMF})_2 \\
&= \frac{(E_{região})_2 (A_{LMF})_2}{(L_{LMF}^{ND})_2} \left[\cos \theta_{LMF} (u_b)_k + \frac{h_b}{2} \cos \theta_{LMF} (w')_k + \sin \theta_{LMF} (w)_k \right] + \dots \\
&\quad \dots + (E_{região})_2 (A_{LMF})_2 (\varepsilon_{LMF}^{PT})_2 + (A_{LMF})_2 (\sigma_{região})_2 \\
&= \frac{(E_{região})_2 (A_{LMF})_2}{(L_{LMF}^{ND})_2} \begin{bmatrix} \cos \theta_{LMF} & \sin \theta_{LMF} & \frac{h_b}{2} \cos \theta_{LMF} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b & w & w' & u_c \end{bmatrix}_k^T + \dots \\
&\quad \dots + (E_{região})_2 (A_{LMF})_2 (\varepsilon_{LMF}^{PT})_2 + (A_{LMF})_2 (\sigma_{região})_2 .
\end{aligned} \tag{74}$$

Das Eqs.(73) e (74) e da Fig. 5, pode-se obter o vetor de carregamento nodal:

$$\mathbf{Q}_{LMF} = \begin{bmatrix} (N_{LMF})_{ub} \\ (N_{LMF})_w \\ (M_{LMF})_{w'} \\ (N_{LMF})_{uc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(F_{LMF})_1 \cos \theta_{LMF} - (F_{LMF})_2 \cos \theta_{LMF} \\ (F_{LMF})_1 \sin \theta_{LMF} - (F_{LMF})_2 \sin \theta_{LMF} \\ \frac{h_b}{2} (F_{LMF})_1 \cos \theta_{LMF} - \frac{h_b}{2} (F_{LMF})_2 \cos \theta_{LMF} \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{75}$$

Após a introdução das Eqs.(73) e (74) em (75), pode-se determinar a seguinte expressão para o carregamento nos fios de LMF:

$$\mathbf{Q}_{LMF} = \mathbf{K}_{LMF} \mathbf{q}_k(t) + \bar{\mathbf{Q}}_{LMF}(t) \tag{76}$$

onde

$$\mathbf{K}_{LMF} = \begin{bmatrix} -\mathcal{K}_+ \cos^2 \theta_{LMF} & \frac{1}{2} \mathcal{K}_- \sin 2\theta_{LMF} & \frac{h_b}{2} \mathcal{K}_- \cos^2 \theta_{LMF} & 0 \\ \frac{1}{2} \mathcal{K}_- \sin 2\theta_{LMF} & -\mathcal{K}_+ \sin^2 \theta_{LMF} & -\frac{h_b}{4} \mathcal{K}_+ \sin 2\theta_{LMF} & 0 \\ \frac{h_b}{2} \mathcal{K}_- \cos^2 \theta_{LMF} & -\frac{h_b}{4} \mathcal{K}_+ \sin 2\theta_{LMF} & -\frac{h_b^2}{4} \mathcal{K}_+ \cos^2 \theta_{LMF} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \tag{77}$$

$$\mathcal{K}_+ = \frac{(E_{região})_1 (A_{LMF})_1}{(L_{LMF}^{ND})_1} + \frac{(E_{região})_2 (A_{LMF})_2}{(L_{LMF}^{ND})_2} ; \tag{78}$$

$$\mathcal{K}_- = \frac{(E_{região})_1 (A_{LMF})_1}{(L_{LMF}^{ND})_1} - \frac{(E_{região})_2 (A_{LMF})_2}{(L_{LMF}^{ND})_2} ; \tag{79}$$

$$\mathbf{q}_k(t) = \begin{bmatrix} (u_b)_k & (w)_k & (w')_k & (u_c)_k \end{bmatrix}^T ; \tag{80}$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{LMF}(t) = \begin{bmatrix} -[(A_{LMF})_1 \mathcal{S}_1 + (A_{LMF})_2 \mathcal{S}_2] \cos \theta_{LMF} \\ [(A_{LMF})_1 \mathcal{S}_1 - (A_{LMF})_2 \mathcal{S}_2] \sin \theta_{LMF} \\ \frac{h_b}{2} [(A_{LMF})_1 \mathcal{S}_1 - (A_{LMF})_2 \mathcal{S}_2] \cos \theta_{LMF} \\ 0 \end{bmatrix} ; \tag{81}$$

$$\mathcal{S}_1 = (E_{região})_1 (\varepsilon_{LMF}^{PT})_1 + (\sigma_{região})_1 ; \tag{82}$$

$$\mathcal{S}_2 = (E_{região})_2 (\varepsilon_{LMF}^{PT})_2 + (\sigma_{região})_2 . \tag{83}$$

Uma vez determinado o vetor de carregamentos, $\mathbf{Q}_{LMF}$, este é incluído nas equações dinâmicas de movimento globais da viga sanduiche (62) e assim é obtida a equação do movimento do sistema contendo tratamento viscoelástico e ligas com memória de forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\bar{\mathbf{K}} - \mathbf{K}_{LMF}^{(exp)})\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}_e(t) + \bar{\mathbf{Q}}_{LMF}^{(exp)}(t) - c \frac{E_p}{E_0} \mathbf{K}_v \sum_{j=1}^{N_p} A_{j+1}(\alpha) \bar{\mathbf{q}}(t - j\Delta t), \quad (84)$$

A partir da equação global do sistema determinada, Eq.(84), com o objetivo de ilustrar os procedimentos de modelagem descritos anteriormente, resultados de simulações numéricas do sistema ilustrado na Fig.6 são apresentados de modo a permitir a avaliar o desempenho da associação entre o material viscoelástico e os fios de LMF, no sentido de reduzir dos níveis do sistema devido a presença de carregamentos dinâmicos.

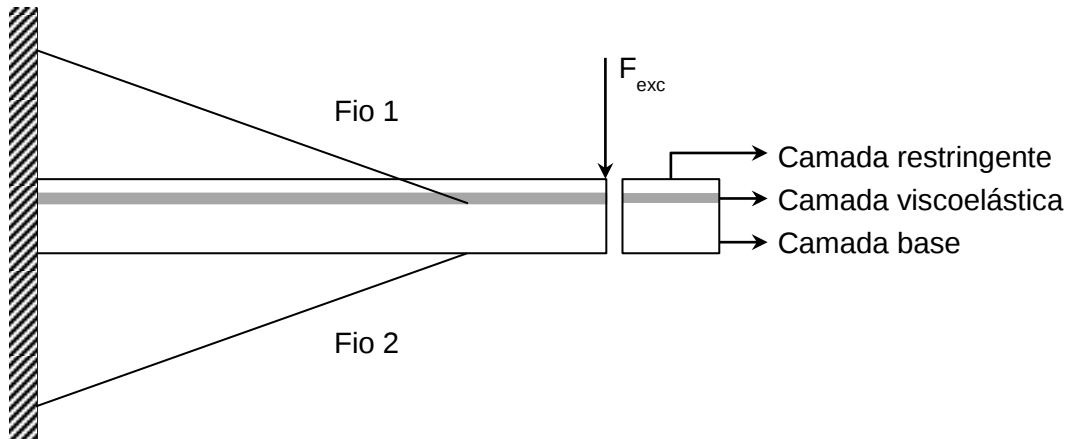


Figura 6 – Representação esquemática de uma viga sanduiche engastada-livre contendo dois fios de LMF simetricamente fixados (adaptado de Gandhi e Chapuis, (2002)).

Para analisar eficiência do sistema proposto, ilustrado pela Fig.6, utilizou-se uma força de excitação harmônica, $F_{ext} = F_0 \sin \omega t$, cuja frequência de excitação corresponde a primeira frequência natural da camada base da viga sanduiche. Os fios de LMF, por sua vez, foram submetidos a uma pré-carga durante sua fixação à camada base da viga, visando, dessa forma, o aumento do ciclo histerético dos fios de LMF, e assim dissipar uma maior quantidade do sistema. Os dados relacionados à geometria e aos materiais do sistema são apresentados na Tab.1.

FIOS DE LMF					
Ângulo de fixação θ dos fios	19.1 [°]	E_a	70e9 [Pa]		
Comprimento dos fios	0.128 [m]	E_m	30e9 [Pa]		
Diâmetro dos fios	0.0011 [m]	C	7e6 [Pa/°C]		
Temperatura de operação	315 [K]	$[M_{f0} \ M_{s0} \ A_{s0} \ A_{f0}]$	[274 292 296 315] [K]		
		Λ	0.05		
VIGA SANDUICHE					
		Camada base	Camada Viscoelástica	Camada restringente	
			26°C	42°C	
Geometria	Comprimento [m]:	0.41	0.41	0.41	0.41
	Largura [m]:	0.0484	0.0484	0.0484	0.0484
	Espessura [m]	5.05×10^{-3}	0.5×10^{-3}	0.5×10^{-3}	1×10^{-3}
Material	Densidade volumétrica [kg/m³]:	2690	1600	1600	2690
	Módulo de Young [Pa]	-	-	-	70.3×10^9
	Módulo de Young Estático [Pa] :	70.3×10^9	1.28×10^6	1.29×10^6	-
	Tempo de Relaxação [s]	-	5.94×10^{-4}	4.07×10^{-4}	-
	α (ordem derivativa fracionária):	-	0.67440	0.6898	-
	Coefficiente de Poisson	-	-	-	0.5

Utilizando o método de integração numérica implícito de Newmark para resolver a equação global do movimento do sistema proposto, Eq.(84), foram obtidas as respostas dinâmicas para as seguintes configurações do sistema ilustrado na Fig.6, considerando-se as condições de carregamento $F_0 = 10N$ e $\omega = 155.87 \text{ rad/s}$: inicialmente, foi obtida a resposta da viga sem nenhum tipo de tratamento; em seguida, a viga foi tratada com fios de LMF aplicados de forma discreta como apresentado na Fig. 6; posteriormente, foram retirados os fios de LMF e aplicou tratamento viscoelástico superficial com camada restrita passiva; por fim, foram obtidas as respostas da viga incluindo os tratamentos viscoelástico e fios de LMF.

A Fig. 7 ilustra o aumento gradativo das amplitudes de deslocamento da viga sem nenhum tratamento com o aumento do tempo devido ao carregamento dinâmico. Já a Fig. 8 representa a resposta dinâmica do sistema contendo ligas de LMF. Nota-se a eficiência do LMF em reduzir as amplitudes de deslocamento da viga devido ao efeito pseudoelástico do mesmo. A Fig.9 apresenta o comportamento histerético do LMF, o qual representa a energia dissipada do material para cada ciclo de vibração.

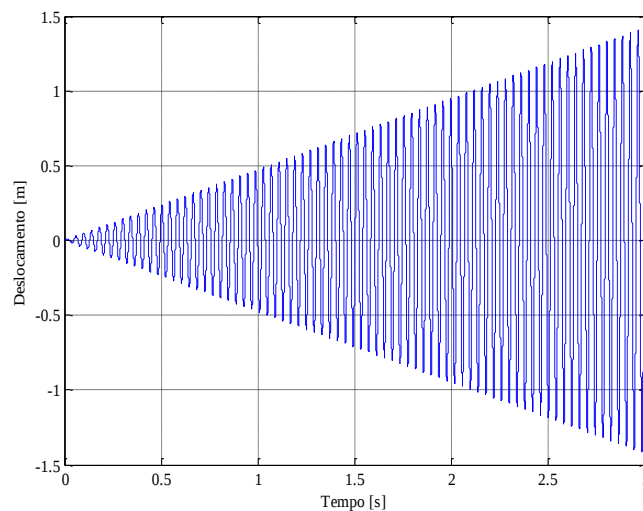


Figura 7 – Viga submetida a carregamento dinâmico.

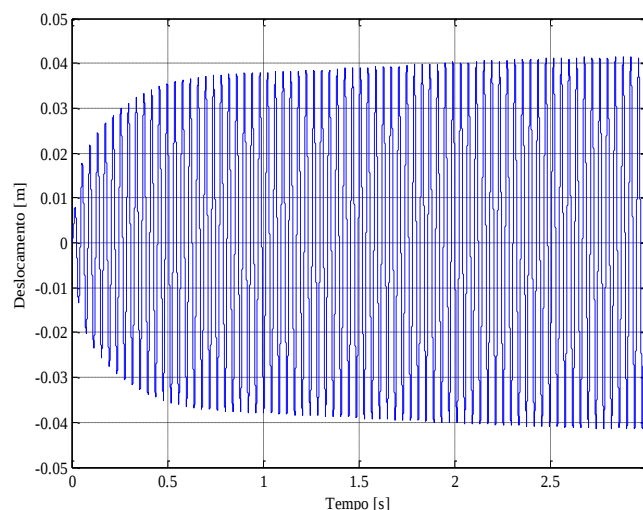


Figura 8 – Resposta dinâmica da viga com fios de LMF.

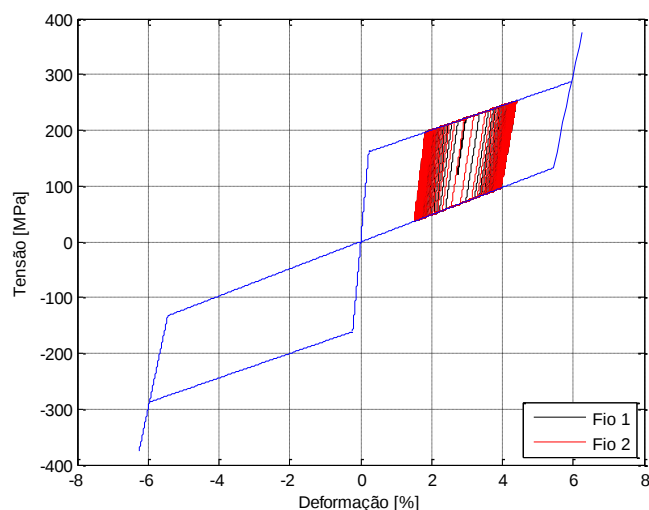


Figura 9 – Diagrama tensão-deformação do LMF aplicado à viga.

A Fig.10 mostra as respostas da viga sem tratamento e contendo tratamento viscoelástico superficial para duas temperaturas de operação diferentes. Nota-se uma maior eficiência do material viscoelástico a baixas temperaturas para a faixa de frequência de operação.

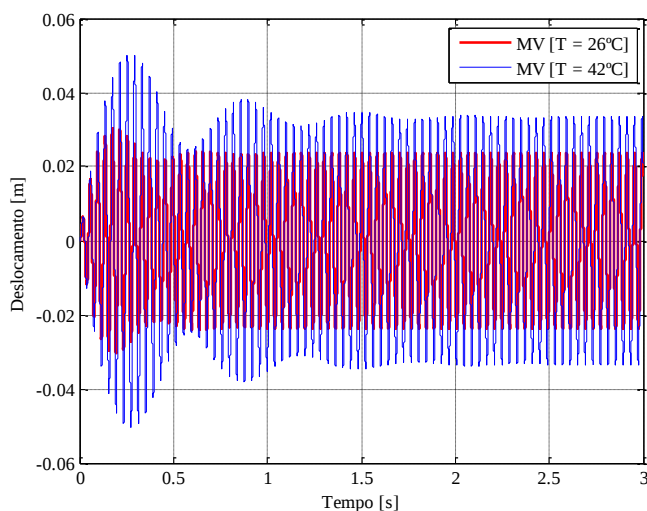


Figura 10 – Resposta dinâmica de uma viga sanduiche à 26 ° e 42°C.

A Fig.11 representa a resposta dinâmica do sistema materiais viscoelásticos e ligas de LMF para a temperatura de operação de 42 °C, e a Fig. 12 mostra a resposta histerética dos fios de LMF.

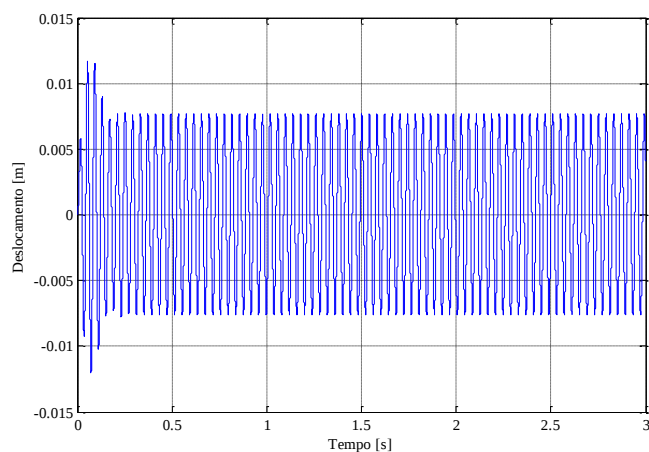


Figura 11- Resposta dinâmica da viga contendo material viscoelástico e fios de LMF para a temperatura de 42 °C.

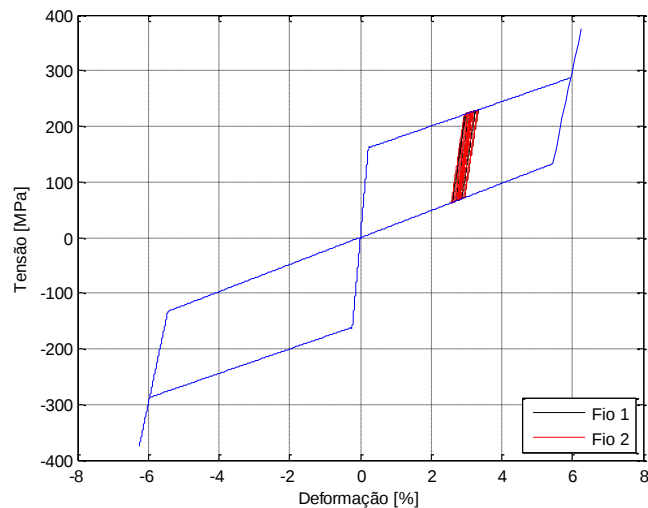


Figura 12 – Diagrama tensão-deformação dos fios de LMF a 42°C.

Analizando os resultados numéricos obtidos anteriormente, pode-se concluir sobre a influência das condições de operação e ambientais sobre o desempenho tanto dos materiais viscoelásticos, quanto das ligas com memória de forma, no que diz respeito à redução dos níveis de vibração da viga. Em particular, a Fig.8 mostra a redução das amplitudes da viga apenas pela presença dos fios de LMF. A grande quantidade de energia dissipada do sistema pode ser avaliada pela análise da Fig.9, onde notam-se grandes ciclos de histerese presentes no diagrama tensão-deformação. Além disso, as respostas obtidas para a viga sanduíche mostram a grande eficiência dos materiais viscoelásticos em aumentar o amortecimento de estruturas mecânicas, no entanto, a influência da temperatura mostrou-se um parâmetro determinante sobre o desempenho desses materiais. Para a temperatura de 26°C, a maior amplitude obtida pela viga, na região de comportamento transiente do sistema, atinge níveis compatíveis com as considerações assumidas de pequenos deslocamentos, ao contrário do que ocorre quando o sistema é simulado a temperatura de 42°C, quando o sistema tem seus níveis de amplitudes amplificados, tanto em regime transiente, quanto em regime permanente.

A proposta, então, em associar o efeito pseudoelástico das LMF, e do comportamento dissipativo dos materiais viscoelástico para a redução das vibrações de sistemas dinâmicos, mostrou-se bastante eficiente. A Fig.12 mostra uma comparação direta entre os resultados numéricos obtidos para cada situação analisada, com exceção da resposta da viga sem tratamento.

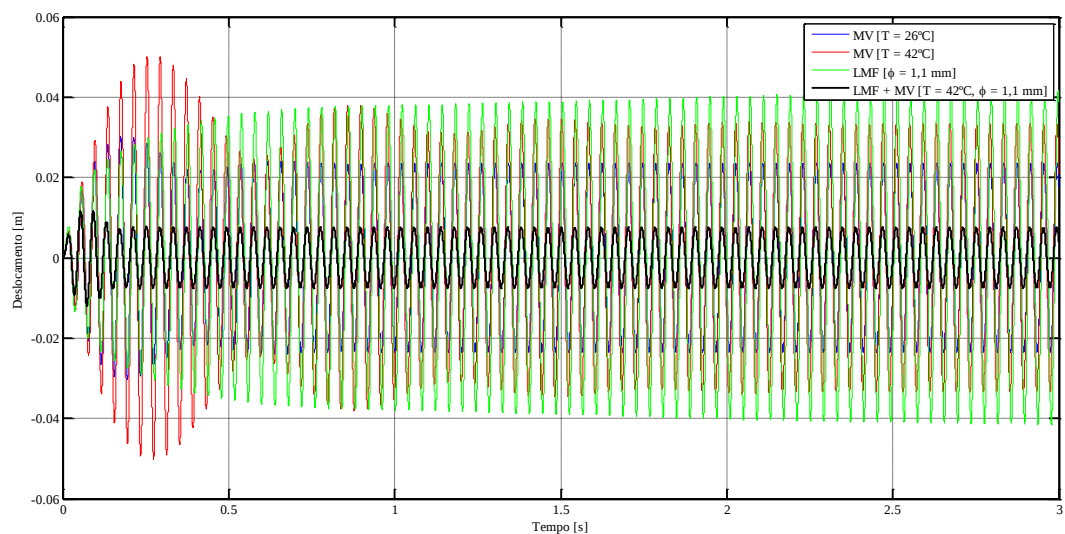


Figura 12- Comparação das respostas dinâmicas para diferentes configurações simuladas.

Em comparação com os demais resultados obtidos, o efeito dissipativo da associação entre LMF e material viscoelástico permitiu uma grande redução das amplitudes de vibração do sistema da ordem de 81%, 77% e 67% em relação à utilização apenas dos fios de LMF, ou somente do material viscoelástico a 42°C e 26°C, respectivamente.

Em comparação com a Fig.9, o ciclo de histerese apresentado na Fig.13, apresenta menor área no diagrama tensão-deformação, resultando, assim, em menor dissipação de energia por parte dos fios de LMF. Esse comportamento, já esperado, ocorreu devido ao efeito dissipativo do material viscoelástico em reduzir os níveis de vibração da viga, induzindo, dessa forma, menos deformação dos fios de LMF. Uma vez que o modelo proposto por Lagoudas *et al* (2004) é fortemente dependente da deformação induzida ao material, com menores níveis de amplitudes o material apresenta menores ciclos de histerese e dessa forma, dissipando menor quantidade de energia. O material viscoelástico por sua vez, é dependente da temperatura, assim, não sendo influenciado pela presença dos fios de LMF, desempenhou sua função sem perda de eficiência. Nesse contexto, pode-se concluir que o excelente desempenho da associação entre esses materiais utilizados nesse trabalho se deve ao fato dos efeitos dissipativos se somarem, a porção dissipada pelo material viscoelástico e a porção dissipada gerada pelos fios de LMF.

De forma geral esse trabalho apresentou uma metodologia para simulação numérica de um sistema incorporando fios de LMF a uma viga contendo tratamento viscoelástico superficial com camada restrita passiva. Através do método dos elementos finitos, simulou-se o comportamento do material viscoelástico utilizando o modelo derivativo fracionário, MDF, e o efeito pseudoelástico das LMF utilizando via utilização do modelo simplificado de Lagoudas *et al* (2004). Os resultados obtidos pelas simulações numéricas confirmaram que a combinação das ligas LMF e com os materiais viscoelásticos constitui-se numa estratégia bastante interessante para o aumento do amortecimento passivo de sistemas dinâmicos e a consequente redução dos níveis de vibração e ruído de sistemas.

REFERÊNCIAS

Bagley, R. L., Torvik, P. J. **Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures**, AIAA Journal, 21(5), 1983, p. 741-748.

de Cazenove, J. ; Rade, D.A. ; de Lima, A.M.G. ; Araújo, C.A. . **A numerical and experimental investigation on self-heating effects in viscoelastic dampers**. Mechanical Systems and Signal Processing **JCR**, v. 1. 2011. p. 1.

de Lima, A. M. G. **Procedimentos de Modelagem Numérica e Avaliação Experimental de Elementos Viscoelásticos Aplicados ao Controle Passivo de Vibrações Mecânicas**. Dissertação (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia. 2003. 148 p.

Galucio, G. A., Deü, J.-F., Ohayon, R. **Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators**, Computational Mechanics, 33(4), 2004, p. 282-291.

GANDHI F.; CHAPIUS, G. **Passive Damping Augmentation Of A Vibrating Beam Using Pseudoelastic Shape Memory Alloy Wires**. Journal of Sound and Vibration v 250. 2002. 519-539 p

LAGOUDAS, D., C. **Shape Memory Alloys – Modeling and Engineering Applications**, New York: Springer Science + Business Media, 2008. 435p.

LAGOUDAS, D., C.; MAYES, J., J.; KHAN, M., M; **Simplified Shape Memory Alloy (SMA) Model for Vibration Isolation**, Texas, Aerospace Engineering Department, 2001. 10 p.

NASHIF, A., D.; JONES, D., I., G.; HENDERSON, J., P, **Vibration Damping**, John Wiley & Sons. 1985.

Rao, M. D., 2003. **Recent Applications of Viscoelastic Damping for Noise Control in Automobiles and Commercial Airplanes**, Journal of Sound and Vibration. v 262. 2003 457–474 p.

Sales, T.P. ; RADE, D A ; de Lima, A.M.G. . **Passive Vibration Control of Flexible Multibody Systems using Constrained Viscoelastic Layers**. In: International Conference on Structural Engineering Dynamics (ICEDyn2011), 2011, Tavira. International Conference on Structural Engineering Dynamics (ICEDyn2011), 2011

Schmidt, A., Gaul, L., **Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives**, Journal of Nonlinear Dynamics. v 29. 2002. 37-55 p.

SUN, J., Q.; JOLLY, M., R.; NORRIS, M., A. Passive, Adaptive and Active Tuned Vibration Absorbers – A Survey. **Journal of Mechanical Design**. v. 117. 1995. 234-242 p.

THOMSON, P; BALAS, G., J.; LEO, P., H. The Use of Shape Memory Alloys for Passive Structural Damping. Smart Materials and Structures. v 4. 1995. 36-41 p.

WILLIAMS K.; CHIU, G., T., C.; BERNHARD, R. **Adaptive-Passive Absorbers Using Shape Memory Alloys**. Journal of Sound and Vibration. v. 288. 2005. 1131-1155 p.