

SOLUÇÃO MANUFATURADA DE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO UTILIZANDO OS MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS E ESPECTRAL DE FOURIER

Andreia Aoyagui Nascimento, Felipe Pamplona Mariano, Elie Luis Martínez Padilla

RESUMO

No presente trabalho resolve-se numericamente a equação de difusão para a equação da energia em uma barra unidimensional pelo seguinte esquema numérico: método dos volumes finitos e espectral de Fourier. Para a integração temporal utilizou-se o esquema de Euler. O código implementado é validado resolvendo-se a equação de difusão linear com solução manufaturada. Resultados numéricos mostram: primeiramente o bom comportamento para do método espectral com os menores erros em relação ao método de volumes finitos, e a limitação do método de avanço temporal de Euler.

INTRODUÇÃO

O processo para a solução de problemas de engenharia encontra-se a sua disposição três diferentes métodos de solução: método analítico, experimentação em laboratório e métodos numéricos (Maliska, 1995).

Os métodos numéricos apresentam uma grande vantagem com relação aos demais processos de solução de problemas, como: tornar possível a solução de problemas com condições de contorno e geometrias complexas e seu custo é inferior ao experimental.

Na dinâmica dos fluidos computacional utilizam-se várias metodologias para a solução de problemas, dentre elas destacam-se duas: o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método Espectral de Fourier (MEFO).

O MVF consiste em dividir o domínio em um número finito de volumes que corresponderão às células da malha (Patanka, 1980). Em cada volume de controle é então aplicadas às equações com o objetivo de obter equações algébricas lineares, o número de incógnitas corresponderá ao número de volumes da malha vezes o número de variáveis.

O MEFO consiste na solução da equação diferencial utilizando uma somatória dos termos de uma série de Fourier, ou seja, uma integral discreta no domínio (DFT). Assim o problema nesta metodologia apresenta uma transformação de domínios, um domínio físico e um domínio espectral. Sendo que ambas se relacionam através relações de reciprocidade (Bringing, et al., 1995).

O presente trabalho compara os métodos dos volumes finitos e espectral de Fourier, utilizando de um estudo da equação da difusão manufaturada, transiente, periódica, unidimensional, três diferentes incrementos temporais e quatro malhas diferentes.

DESENVOLVIMENTO

Modelo físico

O modelo físico consiste em analisar a distribuição de temperatura em uma barra unidimensional Fig(1), com as propriedades dadas pela seguinte tabela 1:

Tabela 1: Propriedades do solido em análise:

Variáveis	Valores
L	2π [m]
α	$1,0$ [m ² /s]

Onde L é o comprimento da barra, e α é o coeficiente de difusidade térmico

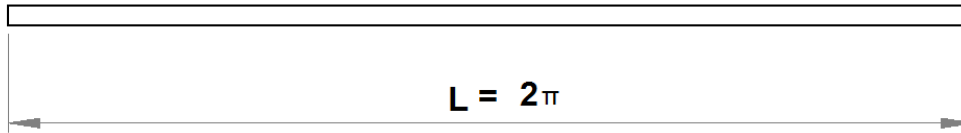


Figura 1 – Dimensão do domínio físico.

Modelo Matemático

O modelo matemático é baseado na equação da difusividade térmica, que assume a seguinte forma:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{dT^2}{dx^2} + B \quad (1)$$

Onde k é o coeficiente de condução térmica, ρ é a densidade do material, e c_p é o coeficiente de calor específico à pressão constante.

Com o objetivo de adimensionalizar a Eq.(1) usou-se:

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (2)$$

Onde o T^* é a temperatura adimensional, T é temperatura de cálculo, $T_0 = 1,0$ e $T_1 = -1,0$ são as temperaturas de referência, dado pelos valores máximos e mínimos da condição inicial.

O tempo é adimensionalizado utilizando do coeficiente difusivo (Incropera, 2008).

$$\tau = \frac{t \alpha}{L^2} \quad (3)$$

E o comprimento da barra é dado como:

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (4)$$

Assim a Eq.(1) é escrita como se segue:

$$\frac{dT^*}{d\tau} = \frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} + B \quad (5)$$

Onde T^* representa a temperatura adimensional, x é o comprimento adimensional e B o termo fonte.

Para completar o modelo matemático são definidas as características do problema i.e., as condições iniciais e as condições de contorno. Na tabela a seguir encontram-se as características do problema:

Tabela 2: Características do proposto:

Condição de contorno	Periódica
Condição de inicial	Sin (x)
Avanço temporal	CFL (número de Courant)

$$CFL = \frac{C \cdot \Delta x^2}{\alpha} \quad (6)$$

Onde C é uma constante, que assume os valores de: 1,0; 0,1; 0,01 e 0,001.

Modelo Numérico

Diante do problema acima, foi proposto primeiramente a solução usando o método de volumes finitos, baseado na integral volumétrica no volume elementar onde as derivadas são aproximadas utilizando de diferenças centradas. Malhas uniformes com: 32, 64, 128 e 256 volumes.

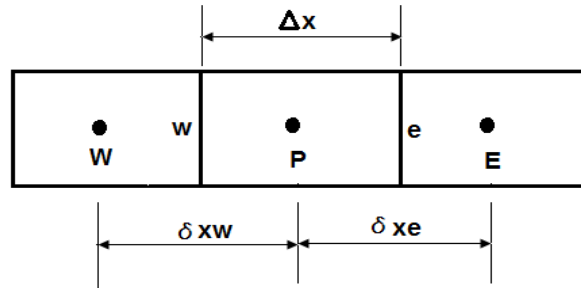


Figura 2 – Esboço das divisões realizadas, com as seguintes variáveis do método de volumes finitos.

A figura 2 apresenta três divisões do domínio, onde W é o centro da célula à oeste do ponto P, ponto na célula de cálculo, E é o ponto no centro da célula à leste do volume P, assim (e) e (w) são posições das faces do volume P. Os δ são as distâncias do centro das células vizinhas, E e W, com o de P e Δ é o comprimento infinitesimal do volumes.

A solução exata imposta para o presente trabalho foi dada por:

$$T^* = \sin(x^*). \cos(\tau) \quad (7)$$

Assim com a finalidade de obter o termo fonte para equação da energia, e assim obter a solução manufaturada, fez-se:

Primeira derivada no tempo:

$$T_{\tau}^{*'} = -\sin(x^*). \sin(\tau) \quad (8)$$

Segunda derivada no espaço:

$$T_x^{*'} = \cos(x^*). \cos(\tau) \quad (9)$$

$$T_x^{*''} = -\sin(x^*). \cos(\tau) \quad (10)$$

Desta maneira substituindo as Eq.(8) e Eq.(10) em Eq.(5) tem-se o termo fonte como se segue:

$$-\sin(x^*) * \sin(\tau) = -\sin(x^*) * \cos(\tau) + B \quad (11)$$

$$B = \sin(x^*) * [-\sin(\tau) + \cos(\tau)] \quad (12)$$

Conseqüentemente a equação com o termo-fonte já discretizada em volumes finitos encontra-se a seguir:

$$\frac{T^{\tau+\Delta\tau} - T^{\tau}}{\Delta\tau} = \left[\left(\frac{T_E^* - T_P^*}{\delta_{xe}} \right) - \left(\frac{T_P^* - T_W^*}{\delta_{xw}} \right) \right] + \sin(x^*) * [-\sin(\tau) + \cos(\tau)] \quad (13)$$

Método Espectral

Uma das metodologias que apresentam uma excelente precisão numérica é a espectral que tem como grande vantagem a utilização da “Fast Fourier Transform” (FFT), algoritmo que calcula as transformadas de Fourier de forma muito eficiente (Bringgs, et al., 1995).

A figura a seguir apresenta como é obtida os valores de qualquer variável em ambos os métodos, Espectral e Volumes Finitos, assim mostrando melhor precisão do primeiro.

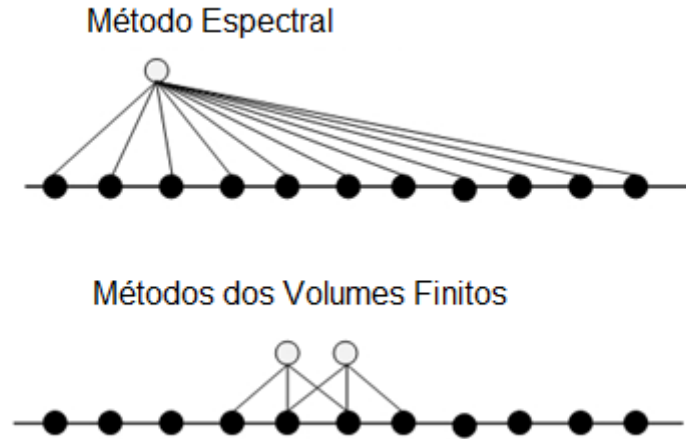


Figura 3 – Representa o modo como é obtido as informações para a célula de calculo para os diferentes métodos (Mariano, 2010).

Assim, a equação da energia, com o termo fonte é escrita na metodologia Espectral como se segue:

$$\frac{\widehat{T}^{*\tau+d\tau} - \widehat{T}^{*\tau}}{\Delta\tau} = i^2 k^2 \widehat{T}^{*\tau} + \widehat{B} \quad (14)$$

Onde $\widehat{T}^*$ representa a temperatura transformada, k o número de ondas do espectro, α o coeficiente condutivo e $\widehat{B}$ o termo-fonte transformado, que apresenta a mesma expressão do método anterior.

Para solução, desta utilizou-se a FFTW, o avanço temporal Euler com CFL variando de 1,0 a 0,001 em uma razão de 10, e malha 32, 64, 128 e 256.

RESULTADOS

Os resultados são apresentados através da comparação da norma L_2 dada por:

$$L_2 = \frac{\sqrt{\sum (T_{calculado} - T_{teórico})^2}}{\text{Número de pontos}} \quad (15)$$

Para os casos simulados a primeira imagem é à condição inicial (linha tracejada) e a linha cheia representa a barra, assim a temperatura variando com o $\sin(x)$ apresenta-se uma amplitude de 1,0 e -1,0 [u.T.].

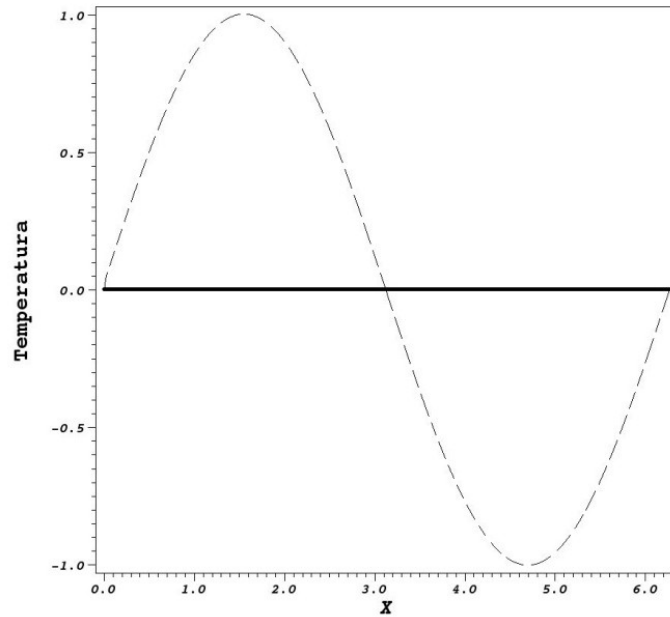


Figura 4 - Distribuição inicial de temperatura para o domínio de 2π .

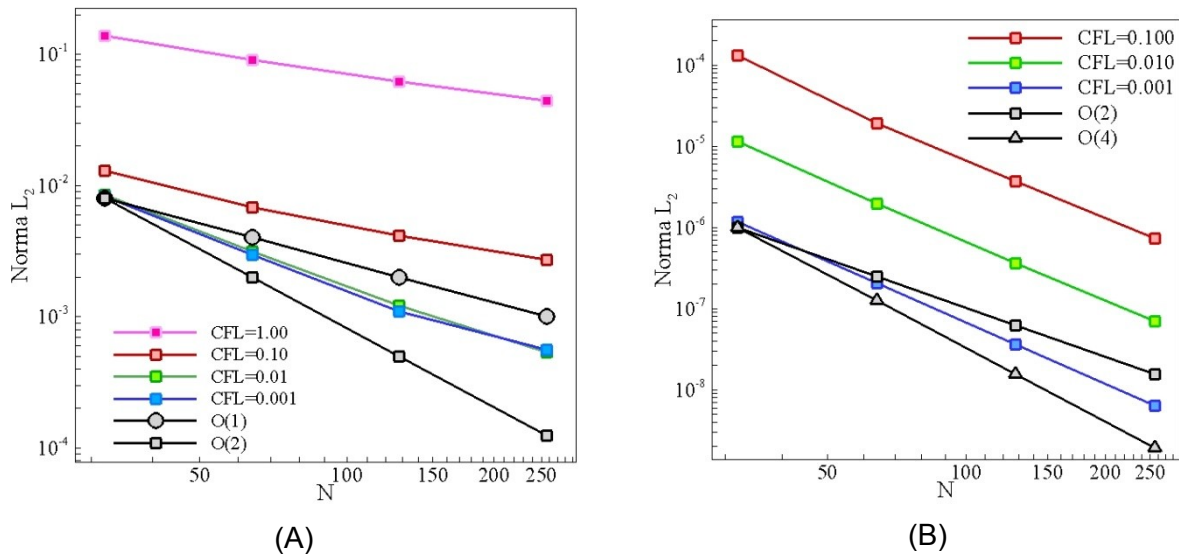


Figura 5 - Análise de convergência espacial comparando diferentes CFL (A) método de Volumes finitos; (B) método Espectral

A figura 5 mostra a norma L_2 para ambas as metodologias em estudo, com as malhas de 32, 64, 128 e 256, bem como para os CFL de 1,0; 0,1; 0,01 e 0.001.

Observa-se que em (B) a ausência da curva da norma L_2 para o CFL de 1,0; pois a solução neste caso divergiu como é esperado para o método de Euler, devido ao elevado CFL ultrapassar os limites de estabilidade do método (Canuto, et al., 2006).

Em (A) os resultados mostram que o erro, do método de volumes finitos apresentam uma redução próxima da teórica $O(1)$, primeira ordem, enquanto que em (B) a redução praticamente linear do erro, aproximando do erro teórico de segunda ordem $O(2)$.

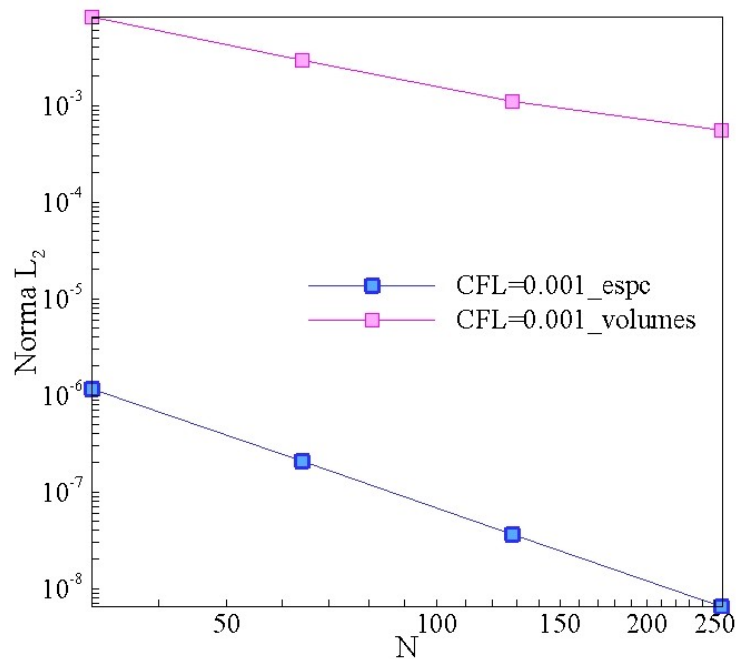


Figura 6 – Comparação da norma L_2 para ambos os métodos utilizando o mesmo CFL 0,001.

A figura 6 mostra a norma L_2 para todas as malhas simuladas, para o CFL mais baixo, observa-se, a melhor aproximação da solução do problema é utilizando o método espectral.

Apesar do erro variar na ordem de $\pm 10^{-3}$ para o método de volumes finitos e entre $\pm 10^{-6}$ à $\pm 10^{-8}$, para a método espectral, é perceptível observar na Fig.5 que a metodologia espectral apresenta um decaimento maior comparando com a metodologia de volumes finitos, isto se dá ao fato que o método de volumes finitos utiliza uma interpolação da propriedade (temperatura) na face do volume, assim considerando que a mesma permanece constante no interior de cada volume, e para o método espectral para o cálculo da propriedade em cada divisão da malha utiliza de todos os pontos de colocação do domínio.

REFERÊNCIAS

1. **Briggs William L. and Henson Van Emden** THE DFT : an owner's manual for the discrete Fourier transform [Book]. - [s.l.] : SIAM, 1995.
2. **Canuto C. [et al.]** Spectral Methods Fundamentals in Single Domains [Book]. - [s.l.] : Spring, 2006.
3. **Incropera Frank** Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa [Book]. - [s.l.] : Ltc, 2008. - Vols. ISBN 9788521615842, 6 ed.
4. **Maliska clovis R.** TRANSFERENCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS FLUIDO COMPUTACIONAL [Book]. - RIO DE JANEIRO : LTC, 1995.
5. **Mariano Felipe Pamplona** Solução numérica das equações de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias de fronteira imersa e pseudo-espectral de Fourier [Report]. - Uberlandia : UFU, 2010.
6. **Patanka S.V.** Numerical Heat Transfer and Fluid flow [Book]. - Taylor e Francoi : TAYLOR & FRANCIS BOOKS LTD, 1980. - Vols. ISBN 0891165223, 1 ed.