



20º POSMEC

SIMPÓSIO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Desenvolvimento de técnica para solução de problema inverso fundamentada no uso de função transferência analítica

Autor:

Ana Paula FERNANDES

Orientador:

Gilmar GUIMARÃES

Co-orientador:

Marcelo Braga dos SANTOS

O principal objetivo da pesquisa é o desenvolvimento de ferramentas matemáticas para a aplicação na solução de problemas inversos em engenharia. Especificamente o interesse é voltado ao desenvolvimento de técnicas inversas que incorporem soluções analíticas de problemas de condução de calor tridimensionais (3D) e transientes, e que resultem em um algoritmo inverso robusto, de baixo custo computacional e de alta competitividade com as técnicas existentes.

Em problemas diretos de condução de calor se o fluxo de calor (a causa) é conhecido o campo de temperatura (o efeito) pode então ser determinado. Em contrapartida, em um problema inverso estima-se a causa a partir do conhecimento do efeito. Como exemplo, o uso de temperaturas experimentais permitem a obtenção da solução do problema inversos em condução de calor, que pode ser: a obtenção das propriedades térmicas, obtenção do fluxo de calor superficial, obtenção da fonte de calor interna ou ainda a obtenção da temperatura superficial numa face sem acesso direto.

Em sistemas dinâmicos três são as variáveis a serem estudadas, a excitação, a função transferência do sistema e a resposta, desta forma os problemas são resolvidos conhecendo-se sempre duas variáveis e estimando a terceira; os problemas inversos são aqueles em que a partir do conhecimento do sistema e de sua resposta (efeito) estima-se a excitação (causa).

Apresenta-se neste trabalho a identificação da função transferência e de problemas diretos e inversos de condução de calor a serem inicialmente abordados para a fundamentação desta técnica.

Funções transferência são usadas para caracterizar a relação entre a entrada e saída (Fig. 1(a)) de um sistema dinâmico, que é descrito por um conjunto de equações diferenciais lineares.

Usando o operador linear transformada de Laplace, tem-se então a representação desta relação entrada/saída do sistema. Isto é, para um sistema dinâmico qualquer (Fig. 1(b)), a relação entre entrada e saída no domínio da variável complexa s é dada pela Eq. (1).

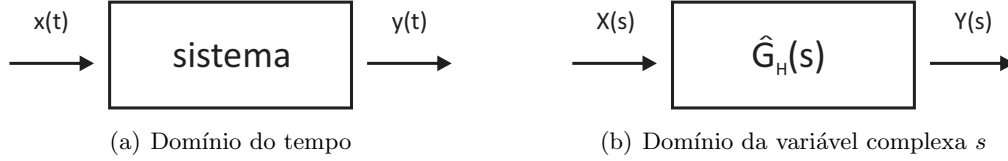


Figura 1: Sistema dinâmico de uma entrada e uma saída

$$Y(s) = \hat{G}_H(s)X(s) \quad (1)$$

Aplicando o teorema da convolução à Eq. (1), a entrada do sistema, $y(t)$, é dada pela integral de convolução, isto é,

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[\hat{G}_H(s)X(s)] = G_H(t) * x(t) \Rightarrow y(t) = \int_0^t G_H(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (2)$$

O propósito, portanto, é a obtenção analítica da função transferência (G_H) para posteriormente aplicá-la à solução analítica de problemas direto, onde a entrada $x(t)$ e função transferência $G_H(t)$ do sistema são conhecidas. Um segundo objetivo é sua aplicação às soluções analíticas de problemas inversos, onde, neste caso a saída $y(t)$ e a inversa da função transferência $G_H^{-1}(t)$ do sistema são conhecidas.

Para a análise da obtenção da função transferência analítica, será abordado o problema unidimensional (1D) de condução de calor definido por uma placa plana submetida a um fluxo de calor e isolada na superfície oposta, referenciado por X22 Beck *et al.* (1992). Trata-se, neste caso, de um dos problemas clássicos em condução de calor, que tem largo uso na obtenção de propriedades termofísicas.

Este problema é descrito pela equação de difusão

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3a)$$

Sujeita às condições de contorno

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t); \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3b)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (3c)$$

A equação-solução integral baseada em funções de Green do problema (3a)-(3c) é dada por

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t G_{X22}(x, t|x', t - \tau) \frac{q(\tau)}{k} \Big|_{x'=0} d\tau \quad (4)$$

A função $G_{X22}(x, t|x', t - \tau)$ que representa a função de Green, pode ser obtida por Beck, Blackwell & Clair (1995) e é dada por

$$G_{X22}(x, t) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (5)$$

sendo $m = 1, 2, 3, \dots, M$, a quantidade de iterações (autovalores) necessárias para a convergência da série, dado um erro ε desejado e suficiente.

A técnica proposta para a obtenção analítica da função transferência baseia-se na teoria de sistemas dinâmicos de uma entrada e uma saída. Isto é, para qualquer entrada $x(t)$, a saída $y(t)$ é dada pela seguinte expressão, denominada de integral de convolução:

$$y(t) = G_H(t) * x(t) = \int_0^t G_H(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (6)$$

onde a função transferência, $G_H(t)$, é igual a 0 para $\tau < 0$.

Popõe-se como sinal de entrada a função impulso unitário ou Delta de Dirac, $x(t) = \delta(t)$, da propriedade de convolução ($G_H * \delta = G_H$), conclui-se que a função transferência é obtida diretamente, sem a necessidade de sua integração temporal.

O problema de condução de calor 1D ($X22$) e a teoria de sistema dinâmico de uma entrada e uma saída podem ser relacionados a partir das Eqs. (4) e (6), comparando-as conclui-se que a função transferência, G_H , é dada por

$$G_H(x, t) = \frac{\alpha}{k} G_{X22}(x, t|x', t) \Big|_{x'=0} = \frac{\alpha}{k} \frac{1}{L} + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

A distribuição de temperatura, isto é, o problema direto, é obtida a partir da Eq. (7).

$$T(x, t) = \int_0^t \left[\frac{\alpha}{k} \frac{1}{L} + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] q(\tau) d\tau \quad (8)$$

Do problema direto, tem-se a seguinte relação

$$T(x, t) = G_H(t) * q(t) \Rightarrow L[T(x, t)] = L[G_H(t) * q(t)] \Rightarrow \hat{T}(s) = \hat{G}_H(s) \cdot \hat{q}(s) \quad (9)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, tem-se que

$$L^{-1}[\hat{q}(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{\hat{G}_H(s)} \cdot \hat{T}(s)\right] \Rightarrow q(t) = \frac{1}{G_H(t)} * T(x, t) \Rightarrow q(t) = G_H^{-1}(t) * T(x, t) \quad (10)$$

Portanto a solução do problema inverso se reduz à estimativa do fluxo de calor, $q(t)$. Considera-se como entrada do sistema a temperatura $T(x, t)$ medida experimentalmente, e como função transferência o inverso da função $\hat{G}_H(t) = \frac{1}{\hat{G}_H(t)}$, como é mostrado na Fig. 2.

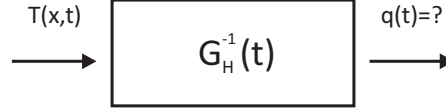


Figura 2: Problema inverso de condução de calor.

Propõem-se, assim, a obtenção do fluxo de calor de forma analítica usando-se o mesmo procedimento aplicado ao problema direto, ou seja, a solução do problema inverso trata-se da obtenção da solução da integral de convolução definida por

$$q(t) = G_H^{-1}(t) * T(x, t) = \int_0^t G_H^{-1}(t - \tau) T(x, \tau) d\tau \quad (11)$$

Ou para o caso em estudo,

$$q(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{\frac{\alpha}{k} \frac{1}{L} + \frac{\alpha}{k} \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)} \right] T(x, \tau) d\tau \quad (12)$$

Referências

- BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. R. S. *Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems*. New York, NY: Wiley-Interscience, 1995.
- BECK, J. V. *et al.* *Heat Conduction Using Green's Function*. Washington, DC: Hemisphere Publishing, 1992.