

Métodos Espectrais e Métodos de Captura de Interface para Escoamentos Bifásicos

Felipe Pamplona Mariano; Mariana Fernandes S. Villela; Aristeu da Silveira Neto

O objetivo deste trabalho é utilizar a metodologia espectral com transformada de Fourier, juntamente com suas propriedades e, a partir disso, obter a solução da equação de Burgers, a qual é importante como uma simplificação das Equações Navier-Stokes e além de ser uma das poucas equações diferenciais parciais não lineares que apresenta solução analítica (CANUTO, 1988). Para resolução desta equação foi utilizado o método analítico, o método pseudo-espectral e o método das diferenças finitas centradas de segunda ordem. Estas soluções servem para analisar a influência de diferentes esquemas de avanço temporal.

Esta análise é importante para mostrar a eficiência do método pseudo-espectral quando se depara com problemas periódicos, tanto no aspecto de precisão como também no tempo de simulação. Além disso, este estudo introduz a modelagem matemática de escoamentos bifásicos utilizando métodos espectrais de Fourier.

A equação de Burgers, (BURGERS,1948),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

tem solução analítica (CANUTO,1988) dada por:

$$u(x, t) = -2\nu \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x - ct, t + 1)}{\phi(x - ct, t + 1)}, \quad (2)$$

$$\phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[x-(2n+1)\pi]^2}{4\nu t}}, \quad (3)$$

onde, ν é a viscosidade cinemática, x é a posição no eixo das abscissa, c é a velocidade de fase, t é o tempo e n é o contador do somatório.

O gráfico da solução da Eq. 1 é dado pela Fig. 1.

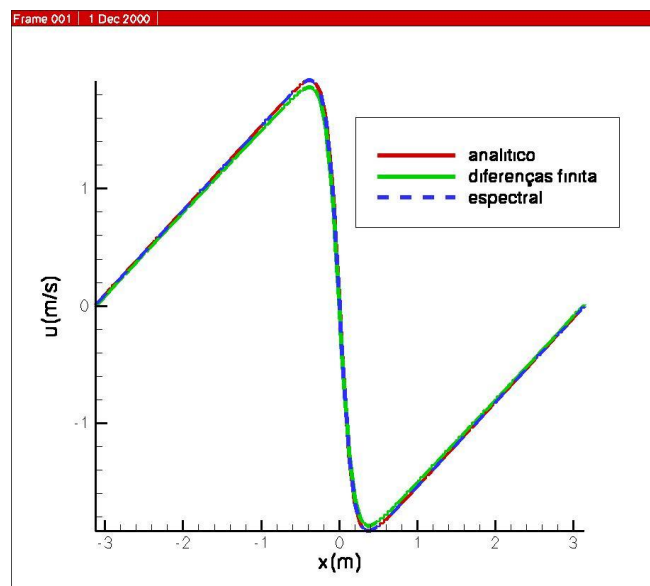


Figura1: Solução da Eq. 1 na forma analítica, pseudo-espectral e diferenças finitas

Para análise do avanço temporal da Eq. 1 utilizando o método espectral, tem-se diferentes metodologias tais como Runge Kutta, Euler, Runge Kutta otimizado e Euler implicitando o termo difusivo, as quais têm o objetivo de encontrar o método mais preciso e mais barato.

Assim, a Fig. 2 mostra os diferentes avanços temporais:

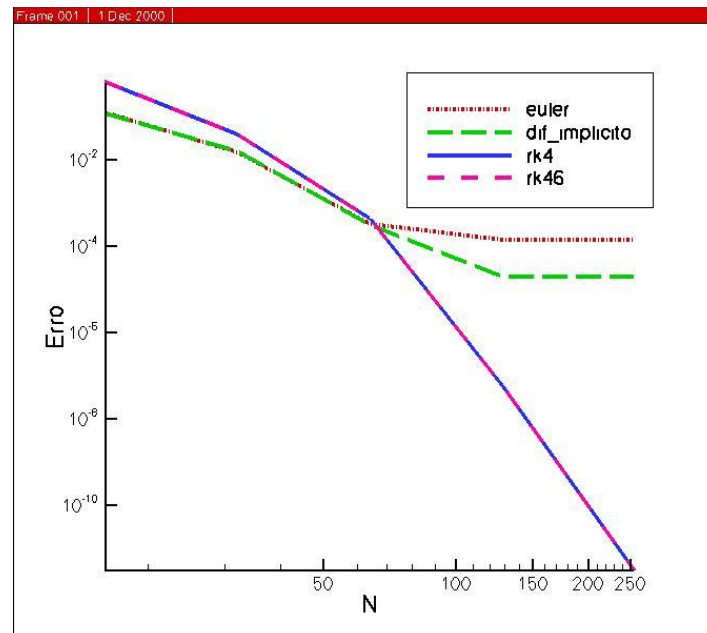


Figura2: Gráfico erro máximo $\times n$ para diferentes avanços temporais

Este resultado foi obtido encontrando o erro máximo para cada número de ponto das diferentes metodologias. Devido à alta precisão espacial dada pelo método espectral é necessário utilizar um esquema de avanço temporal compatível, ou seja, de alta ordem. Na Fig. 2 pode-se observar que as curvas apresentadas pelos esquemas de baixa ordem o erro mantém-se elevado mesmo com o refinamento da malha, enquanto que nas metodologias de alta ordem temporal consegue-se uma convergência espectral.

REFERÊNCIAS

- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E. The DFT. Philadelphia: SIAM, 1995. 434 p.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M.Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T.A. **Spectral methods**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006. 567 p. (Springer Series in Computational Physics).
- Mariano, F.P. **Simulação de escoamentos não periódicos utilizando as metodologias pseudo-espectral e da fronteira-imersa acopladas**. Uberlândia. Dissertação (Mestrado em engenharia mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia.
- Mariano, F.P. **Modelagem matemática de escoamentos sobre geometria complexas utilizando o método pseudo-espectral de Fourier acoplado do método da Fronteira imersa**. Uberlândia. Qualificação para obtenção do título em doutor em engenharia mecânica – Universidade Federal de Uberlândia.
- Miranda, F.C. **Introdução à Dinâmica dos Fluidos Computacional**. Uberlândia. Trabalho de iniciação científica – Universidade de Uberlândia