



## AVALIAÇÃO DOS CONTROLADORES DE VIBRAÇÃO DE ORDEM FRACIONÁRIA

| Edson Borges Ávila, Thiago de Paula Sales, Domingos Alves Rade

A motivação fundamental para a utilização prática do Cálculo Fracionário é a possibilidade de uma modelagem mais precisa dos fenômenos físicos, em detrimento de uma maior complexidade analítica e numérica em comparação com as ferramentas tradicionais de Cálculo.

Neste contexto, o presente trabalho tem o objetivo de analisar os fundamentos do Cálculo Fracionário e para ilustrar a sua aplicação ao campo de controle ativo de sistemas dinâmicos. Isso é feito mediante a apresentação da generalização tradicional dos controladores ativos e realizando uma implementação de um controlador fracionário para um sistema mecânico de vibração não amortecido. Além disso, outro objetivo principal deste trabalho é investigar a influência dos parâmetros do controlador sobre a resposta do sistema. Algumas obras de referência nesta área são os de Hartley e Lorenzo (2002), Podlubny (1994), Dorcak (1994) e al Podlubny al. (1997).

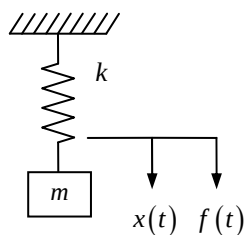


Figura 1. Sistema vibratório de 1 grau de liberdade a ser controlado.

Considere o sistema mecânico não-amortecido apresentado na Fig. 1 e descrito pela equação diferencial:

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = f(t),$$

onde  $m$  representa a massa do sistema,  $k$  sua rigidez,  $x(t)$  o deslocamento de sua massa e  $f(t)$  uma força externa à massa aplicada. Deseja-se controlar ativamente o movimento vibratório da massa por intermédio de uma força de controle que atuará sobre o sistema e que é dada por  $f_c(t) = g D^\alpha x(t)$ ,  $0 < \alpha < 2$ .

Por utilização de um método indireto de aproximação numérica do operador derivativo fracionário, calcular a resposta do sistema para entradas do tipo degrau unitário, isto é,  $f(t) = 1 \text{ N}$  para  $t \geq 0$  e  $f(t) = 0 \text{ N}$  para  $t < 0$ . Para a massa e para a rigidez do sistema foram utilizados 0,5 kg e 500 N/m, respectivamente. Vários valores de  $g$  e  $\alpha$  foram utilizados para avaliar a influência destes parâmetros sobre a resposta do sistema.

Como resultados de simulação foram obtidos gráficos dinâmicos do deslocamento da massa do sistema vibratório  $x(t)$ . As Figs. 2 a 5 apresentam o comportamento da resposta para valores de  $\alpha$  constantes e vários valores de  $g$  enquanto que as Figs. 6 a 9 apresentam o comportamento da resposta para valores de  $g$  constantes e vários valores de  $\alpha$ .

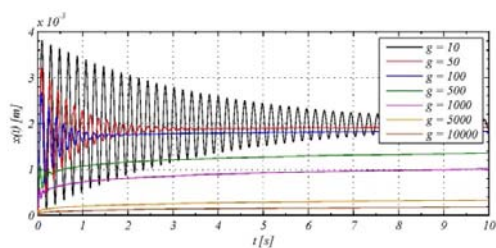


Figura 2. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $\alpha = 0,25$ .

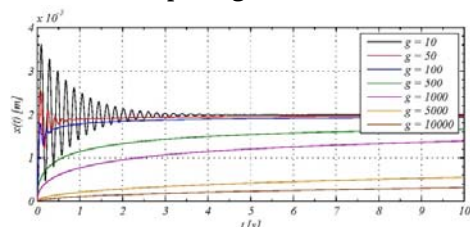


Figura 3. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $\alpha = 0,5$ .

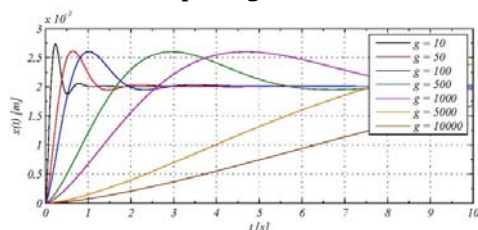


Figura 4. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $\alpha = 1,5$ .

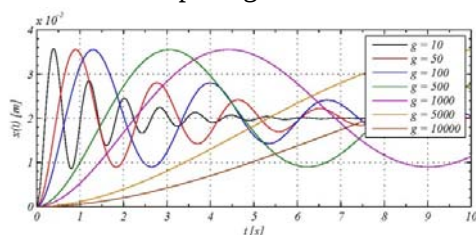


Figura 5. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $\alpha = 1,875$ .

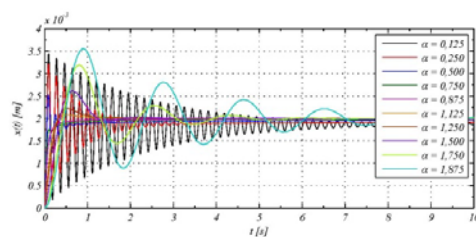


Figura 6. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $g = 50$ .

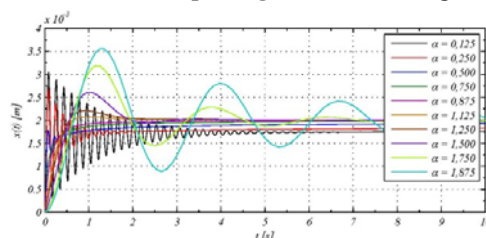


Figura 7. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $g = 100$ .

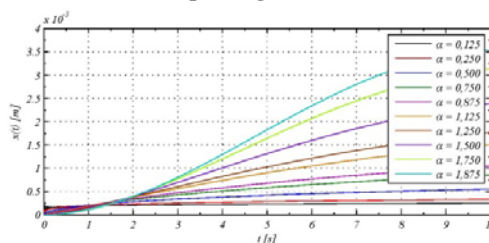


Figura 8. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $g = 5000$ .

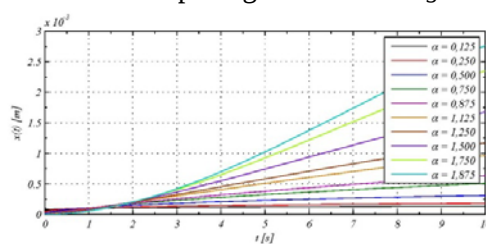


Figura 9. Comportamento dinâmico de  $x(t)$  para uma entrada do tipo degrau unitário e  $g = 10000$ .

Os resultados da simulação permitem concluir que a utilização do cálculo fracionário para controle do sistema é bem justificada e merece atenção de projetistas de controladores, uma vez que os controladores fracionários são associados a uma maior flexibilidade de projeto.

## REFERÊNCIAS

- DORCAK, L., 1994, **Numerical models for the simulation of the fractional-order control systems**, Slovak Academy of Sciences, Institute of Experimental Physics, Technical University of Kosice, pp. 261-264.
- HARTLEY, T. T., LORENZO, C. F., 2002, **Dynamics and control of initialized fractional-order systems**, Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp. 201-233.
- PODLUBNY, I., 1994, **Fractional-order systems and fractional-order controllers**, Slovak Academy of Sciences Institute of Experimental Physics.
- PODLUBNY, I.; DORCAK, L., KOSTIAL, I., 1997, **On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and  $PI^\lambda D^\mu$  controllers**, Proceedings of the 36<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, December 10–12, San Diego, pp. 4985–4990. ISBN 0780341902.