

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE TOPOLOGIA DO ESPAÇO DE TRABALHO DE MANIPULADORES 3R ORTOGONAIS

Giovana Trindade da Silva Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Av. João Naves de Ávila 2121 – Campus Santa Mônica – CEP 38400-902, Uberlândia, MG.
gtrindade@mecanica.ufu.br

Sezimária Fátima Pereira Saramago

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática.
Av. João Naves de Ávila 2121 – Campus Santa Mônica – CEP 38400-902, Uberlândia, MG.
saramago@ufu.br

Resumo: Uma classificação de uma família de manipuladores com 3 juntas rotacionais (3R) é estabelecida. Esta classificação é baseada na topologia de seu espaço de trabalho. A topologia do espaço de trabalho é definida conforme o número de soluções do modelo cinemático, o número de cúspides e nós que aparecem nas curvas singulares. O espaço dos parâmetros de projeto é dividido em nove domínios com diferentes topologias do espaço de trabalho, onde os manipuladores possuem propriedades cinemáticas globais similares. Cada superfície de separação é dada como uma expressão explícita dos parâmetros de Denavit-Hartenberg.

Palavras-chave: manipulador 3R ortogonal, espaço de trabalho, topologia dos manipuladores, singularidade.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo classificar uma família de manipuladores baseando-se na topologia do seu espaço de trabalho.

A família estudada é composta de manipuladores com 3 juntas rotacionais, com eixos ortogonais ($\alpha_2 = -90^\circ$ $\alpha_3 = 90^\circ$) e sem defasagem sobre o último eixo ($r_3 = 0$). O estudo deste tipo de manipulador é feito em função dos Parâmetros de Denavit-Hartenberg (Khalil and Dombre, 1999). As variáveis θ_1 , θ_2 , θ_3 representam os ângulos de entrada dos atuadores. A topologia será estudada em função dos parâmetros d_2 , d_3 , d_4 e r_2 , uma vez que considera-se $r_3=0$.

A Figura 1 apresenta a arquitetura cinemática de um manipulador da família estudada na configuração zero.

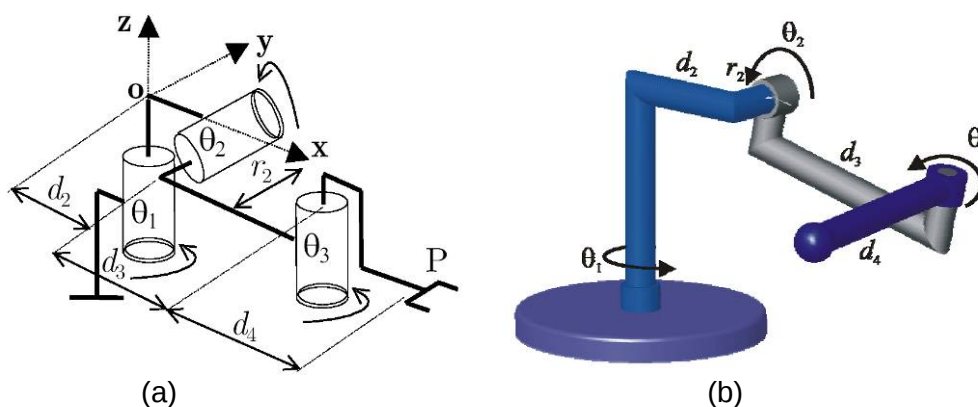


Figura 1: Manipulador Ortogonal Estudado

A abordagem do trabalho começa pelo modelo geométrico direto (MGD) dado pela Equação 1:

$$\begin{aligned} x &= [d_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] c_1 - (r_2 + d_4 s_3) s_1 \\ y &= [d_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] s_1 - (r_2 + d_4 s_3) c_1 \\ z &= -(d_3 + d_4 c_3) s_2 \end{aligned} \quad (1)$$

A matriz jacobiana J do manipulador pertencente a esta família é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} -s_3 c_2 d_4 - c_2 r_2 & 0 & -s_3 d_4 \\ s_3 s_2 d_4 + s_2 r_2 & d_3 + c_3 d_4 & 0 \\ c_2 d_3 + c_2 c_3 d_4 + d_2 & 0 & c_3 d_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

E o seu determinante é dado conforme a Equação 3:

$$\det(J) = d_4 (d_3 + d_4 c_3) [d_2 s_3 + (d_3 s_3 + (d_3 s_3 - r_2 c_3) c_2)] \quad (3)$$

O estudo da família de manipuladores se baseia na topologia das superfícies de singularidades no espaço de trabalho. Estas singularidades são definidas como os lugares onde o $\det(J)$ se anula. Tais lugares dividem o espaço articulado em diferentes zonas (domínios conexos do domínio articulado acessíveis) desprovidas de singularidades. Para a maioria dos manipuladores industriais estas zonas são domínios de unicidade das soluções do modelo geométrico inverso (MGI). Borrel (1986) afirma que uma zona está associada a uma posição do manipulador.

O conhecimento dos lugares de singularidades é importante para o comando dos robôs no espaço de trabalho, pois existe uma relação entre as propriedades cinemáticas globais de um manipulador e a topologia dos lugares das singularidades.

A topologia de uma superfície de singularidade no espaço de trabalho pode ser caracterizada pelo número de soluções do modelo cinemático, número de cúspides e nós. Um ponto de *nó* é a interseção de duas singularidades. El Omri (1996) classifica como manipuladores cuspidais os manipuladores com 3 graus de liberdade que podem mudar de posição sem passar por uma posição singular, se e somente se, existem em seu espaço de trabalho 3 soluções do MGI que coincidem. Tal ponto é denominado *ponto de cúspide*. Neste trabalho será visto que um manipulador pode ter 0, 2 ou 4 pontos de cúspides, 0, 1, 2, 3 ou 4 pontos de nós e que existem exatamente 9 topologias diferentes de espaço de trabalho. Estes pontos singulares são um modo eficaz para caracterizar a topologia do espaço de trabalho.

Métodos numéricos ou gráficos podem ser utilizados para verificar as condições de existência de pontos de cúspides (El Omri, 1996). Uma vez que a existência de um ponto de cúspide prova que o manipulador é cuspidal, isso pode ser utilizado como critério de classificação. Para isto, é necessário que o polinômio $P(t)$ obtido através do modelo geométrico inverso (MGI), dado na Equação 4, admita uma ou várias raízes triplas. Se existir pelo menos uma, pode-se afirmar que o manipulador é cuspidal, e reciprocamente.

$$P(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e, \text{ onde, } t = \tan(\theta_3/2) \quad (4)$$

O polinômio admite raízes triplas quando o sistema (5) possui solução (Buchberger, 1982).

$$S(t, a, b, c, d, e) = \begin{cases} P(t) = 0 \\ \frac{\partial P(t)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

A Figura 2 mostra a seção do espaço no plano (r, z) (Bergamaschi, 2004) de um manipulador que não tem pontos de cúspides nem nós. O espaço de trabalho forma uma região central interna sem solução e uma região externa com 2 soluções no MGI (envoltória regular).

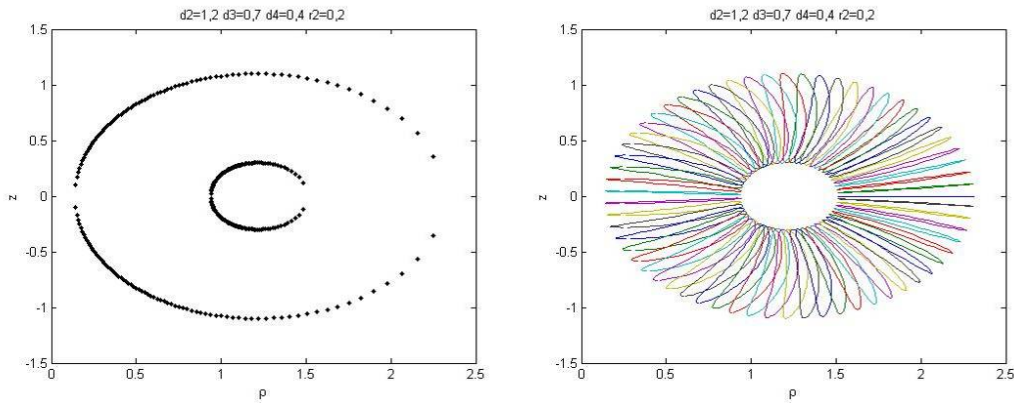


Figura 2: Manipulador com 0 pontos de cúspide e 0 nós

A Figura 3 mostra a seção do espaço de trabalho de outro manipulador da mesma família. Contudo, verifica-se a formação de 4 pontos de cúspide, mas sem a presença de nós. Na seção do manipulador pode-se observar também uma região interna com 4 soluções no MGI e uma região externa com 2 soluções no MGI.

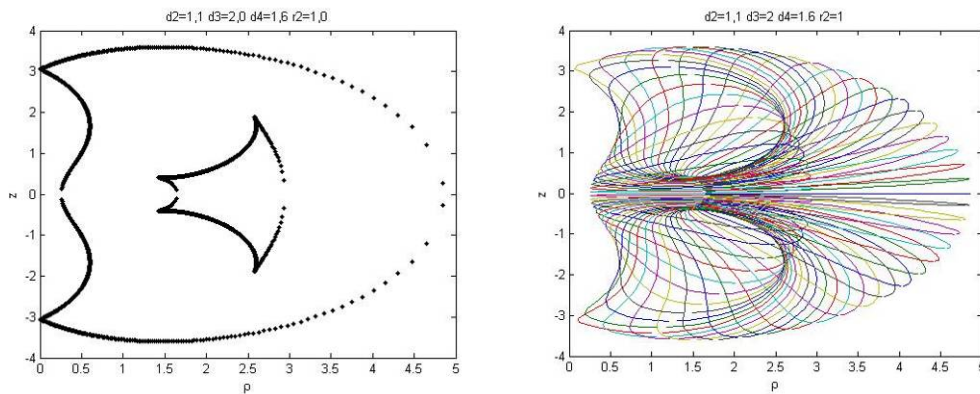


Figura 3: Manipulador com 4 pontos de cúspide e 0 nós

Observando a Figura 4 pode-se notar a existência de 4 pontos de cúspide, 4 nós, 2 regiões com 2 soluções no MGI e 3 regiões com 4 soluções no MGI.

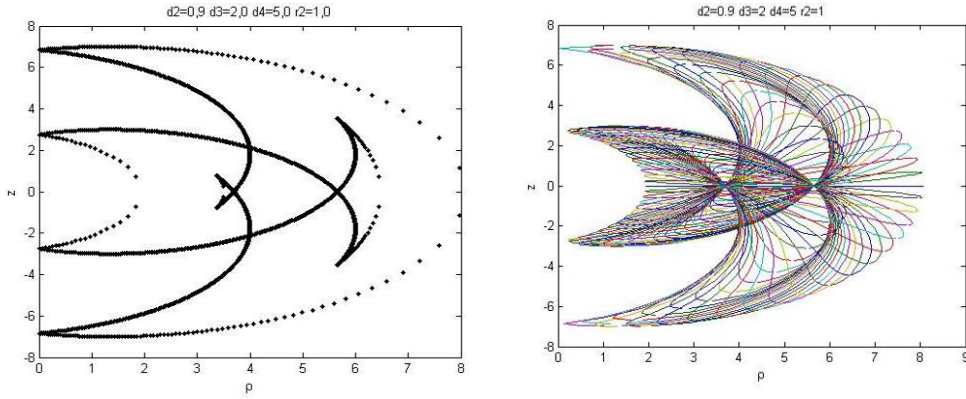


Figura 4: Manipulador com 4 pontos de cúspide e 4 nós

Estes três exemplos de manipuladores dão uma idéia da diversidade das topologias do espaço de trabalho que pode ser encontrado na família do manipulador estudado. Em outras palavras, eles demonstram a importância de estudar as singularidades no espaço de trabalho e mais precisamente a presença ou não de pontos de cúspide e nós.

A resolução do sistema polinomial S dado pela Equação 5 consiste em dividir o primeiro quadrante do espaço dos parâmetros d_3 , d_4 e r_2 em várias regiões onde o número de soluções do problema é constante. Efetuando várias mudanças de variáveis das bases de Groebner tem-se um sistema triangular (Corvez, 2002). Assim, a resolução do problema inicial reduz-se a resolução de um novo sistema triangular. O estudo e análise deste sistema triangular permite obter 5 polinômios, dados abaixo.

$$f_1 : r_2^2 + d_3^2 - d_4^2 = 0 \quad (6)$$

$$f_2 : d_4^2 \left[(1 + r_2^2 + d_3^2)^2 - 4d_3^2 \right] (r_2^2 - d_3^2 - d_4^2) - r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (7)$$

$$lct : r_2^2 d_4 - d_3 + d_4 = 0 \quad (8)$$

$$Z_{01} : (d_3 - 1)^2 (d_3^2 - d_4^2) + r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (9)$$

$$Z_{02} : (d_3 + 1)^2 (d_3^2 - d_4^2) + r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (10)$$

Cada combinação de sinal dos 5 polinômios define várias regiões onde todos os manipuladores têm o mesmo número de pontos de cúspide. Estas superfícies permitem dividir o espaço dos parâmetros, tendo 0, 2 ou 4 pontos de cúspide. O problema se dá em poder reagrupar o máximo de regiões adjacentes em um domínio. Um domínio é caracterizado por um conjunto de manipuladores tendo as mesmas propriedades. Em outras palavras, o domínio é dado pelos pontos que pertencem às superfícies definidas por: f_1 , f_2 , lct , Z_{01} e Z_{02} .

A Figura 5 mostra a seção plana (d_3 , d_4) para um r_2 dado, fornecendo uma idéia sobre o número de domínios que se pode ter, bem como as superfícies de separação. Esta seção é dividida em várias zonas correspondentes a um mesmo número de pontos de cúspide. Para cada par de parâmetros (r_2 , d_3 , d_4) há um manipulador correspondente.

No caso da família de manipuladores estudado existem três casos de manipuladores, com 0, 2 e 4 pontos de cúspide. Estes três casos são divididos em 5 domínios diferentes delimitados por 4 superfícies, C_1 , C_2 , C_3 e C_4 (Baili, 2004). Vê-se claramente a existência de duas zonas correspondentes aos manipuladores tendo 4 pontos de cúspide (domínios 2 e 4), uma zona correspondente aos manipuladores tendo 2 pontos de cúspide (domínio 3) e duas zonas correspondentes aos manipuladores não cuspidais (domínios 1 e 5).

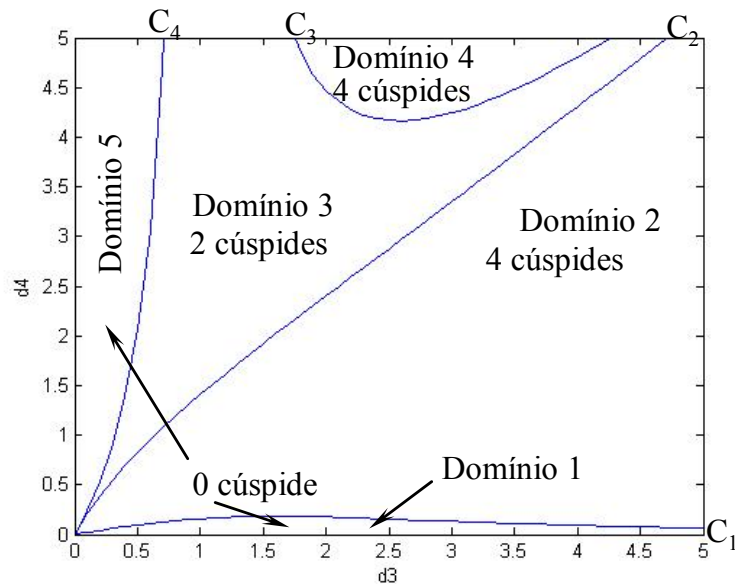


Figura 5: Seção plana de (d_3, d_4) do espaço de trabalho para $r_2=2,0$

É possível mostrar que existem somente 5 tipos diferentes de manipuladores, determinar as equações das superfícies de separação e estudar as transições entre os 5 tipos de manipuladores (Baili, 2004). A abordagem começa pela representação destes 5 tipos de manipuladores determinando em seguida as equações das superfícies que delimitam os 5 domínios correspondentes.

2. APRESENTAÇÃO DOS 5 TIPOS DE MANIPULADORES CORRESPONDENTES AOS 5 DOMÍNIOS

Os domínios segundo o número de pontos de cúspide é dividido em vários sub-domínios que contenham um mesmo número de nós, conforme apresentado na Figura 6. Cada sub-domínio define uma topologia do espaço de trabalho denotado $WT_i(\alpha, \beta)$, onde α representa o número de pontos de cúspide e β o número de pontos de nós. As superfícies que separam duas topologias de espaço de trabalho diferentes em um mesmo domínio podem ser obtidas de forma geométrica, sendo dadas por C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , E_1 e E_2 (Baili, 2004).

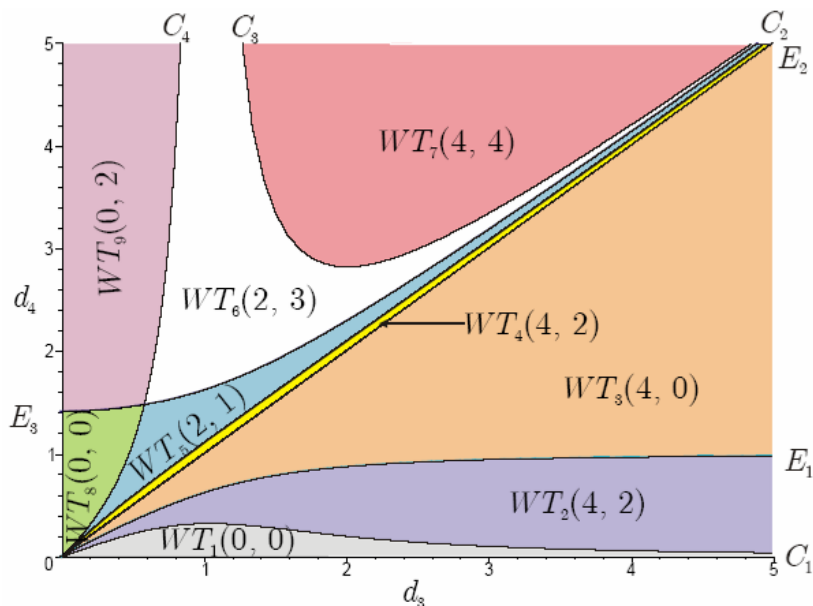


Figura 6: Divisão do espaço dos parâmetros segundo o número de pontos de cúspide e nós, considerando $r_2 = 1$

2.1 Domínio 1

Todos os manipuladores que pertencem a este domínio são binários e têm uma cavidade toroidal no seu espaço de trabalho, não possuem pontos de cúspides e nem nós. O manipulador apresentado na Figura 7 caracteriza o primeiro tipo de manipulador. Esta topologia do espaço de trabalho é denominada de WT_1 .

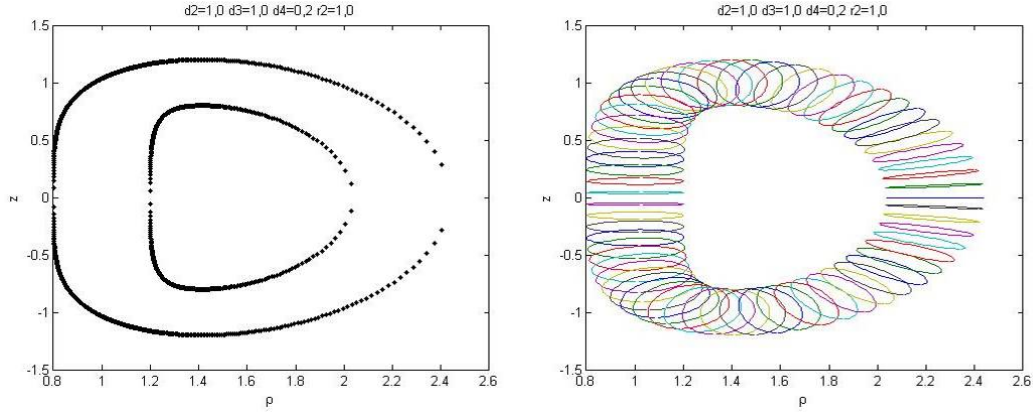


Figura 7: Manipulador do tipo 1, $WT_1(0,0)$

2.2 Domínio 2

As Figuras 3 e 8 caracterizam dois manipuladores que pertencem ao domínio 2, possuem 4 pontos de cúspide, mas não apresentam o mesmo número de nós: 0 nós no primeiro e 2 nós no segundo. A topologia do espaço de trabalho WT_2 é representada pela Figura 8 (manipulador quartenário com 4 pontos de cúspide, 2 nós, uma cavidade toroidal, duas zonas com 4 soluções e uma zona com 2 soluções no MGI) enquanto que WT_3 (manipulador com 4 pontos de cúspide, 0 nós, sem cavidade toroidal, uma zona com 4 soluções e outra com 2 soluções no MGI) é representado pela Figura 3.

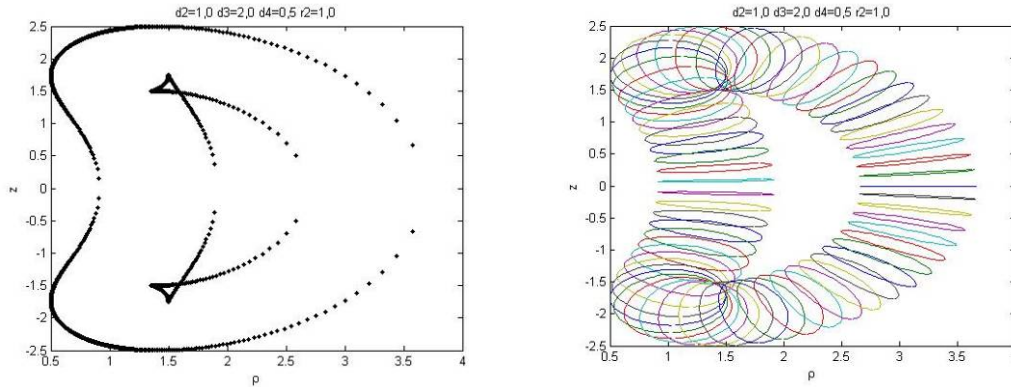
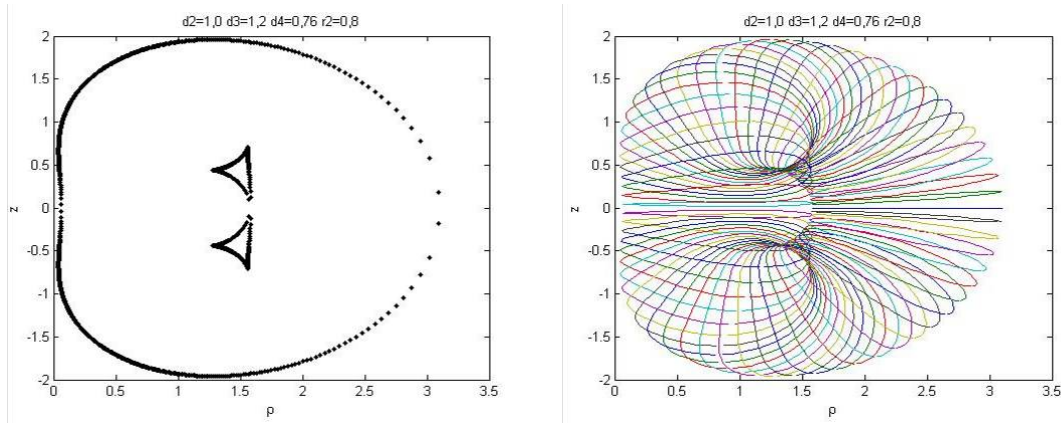


Figura 8: Manipulador do tipo 2, $WT_2(4,2)$

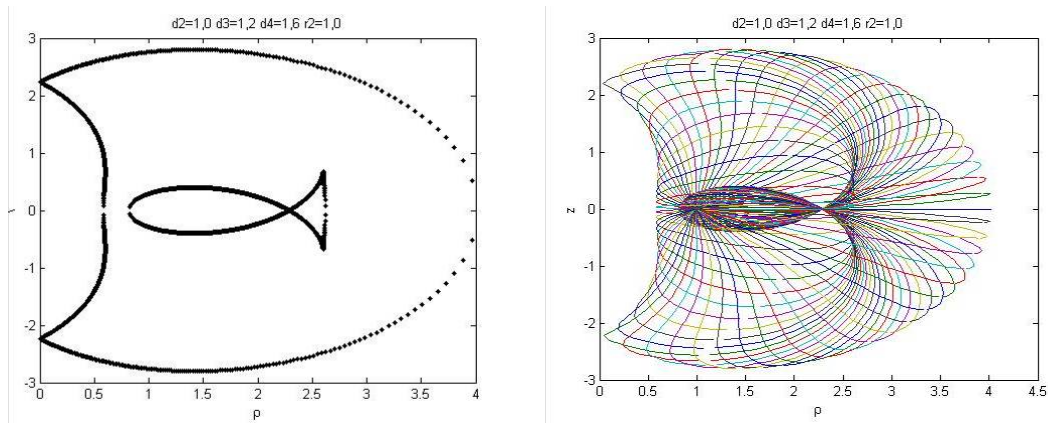
A transição entre as topologias WT_2 e WT_3 é tal que os dois segmentos laterais da superfície de singularidade interior no espaço de trabalho são tangentes, conforme Figura 9.

Esta transição corresponde ao limite entre os manipuladores que contém e que não contém uma cavidade toroidal no seu espaço de trabalho.

Figura 9: Transição entre WT_2 e WT_3

2.3 Domínio 3

Os manipuladores que pertencem a este domínio possuem 2 pontos de cuspide sobre a superfície de singularidade interna e possui a forma de um peixe. As duas zonas contidas na superfície de singularidade interna tem 4 soluções no MGI, e a região delimitada pelas superfícies de singularidade interna e externa possui 2 soluções, conforme Figura 10.

Figura 10: Manipulador do tipo 3, $WT_5(2,1)$

Partindo do espaço de trabalho do manipulador caracterizado pela Figura 8 e aumentando progressivamente d_4 , a superfície de singularidade interna se deforma de uma maneira contínua e dá lugar a outro manipulador do tipo 2. Este manipulador tem 4 pontos de cuspide e 2 nós sobre sua superfície de singularidade interna: esta superfície forma 3 zonas com 4 soluções no MGI cujas duas situações nas extremidades se assemelham a 2 rabos de peixe (Figura 11). Quando se aumenta muito d_4 , a superfície de singularidade interna continua a se deformar e obtém-se o manipulador correspondente à Figura 10.

Uma outra topologia do espaço de trabalho representada pelo manipulador caracterizado pela Figura 11 está contida no domínio 2. Esta topologia do espaço de trabalho denotada WT_4 contém 4 pontos de cúspides e 2 nós no plano $z=0$. Estes nós são diferentes daqueles do WT_2 , pois não delimitam uma cavidade toroidal, mas uma região de 4 soluções no MGI.

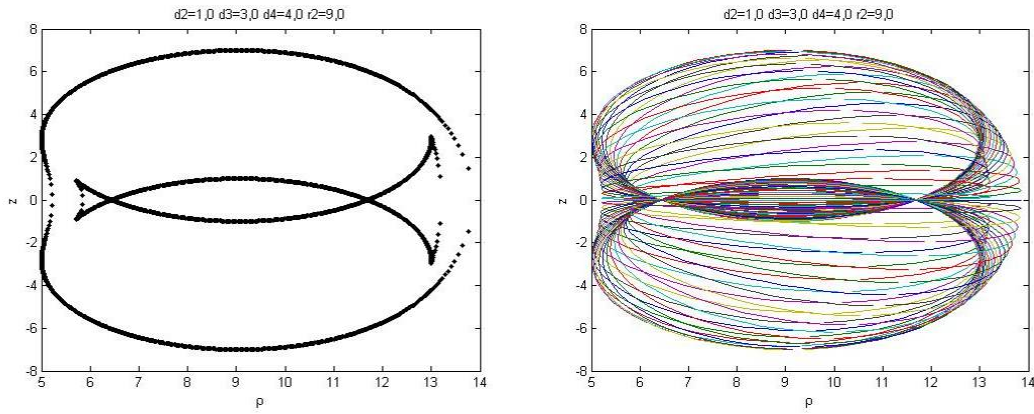


Figura 11: Topologia do espaço de trabalho WT_4 , $WT_8(4,2)$

A transição entre as topologias dos espaços de trabalho WT_3 e WT_4 é tal que os segmentos singulares superior e inferior no espaço de trabalho são tangentes. O manipulador caracterizado pela Figura 12 ilustra esta transição.

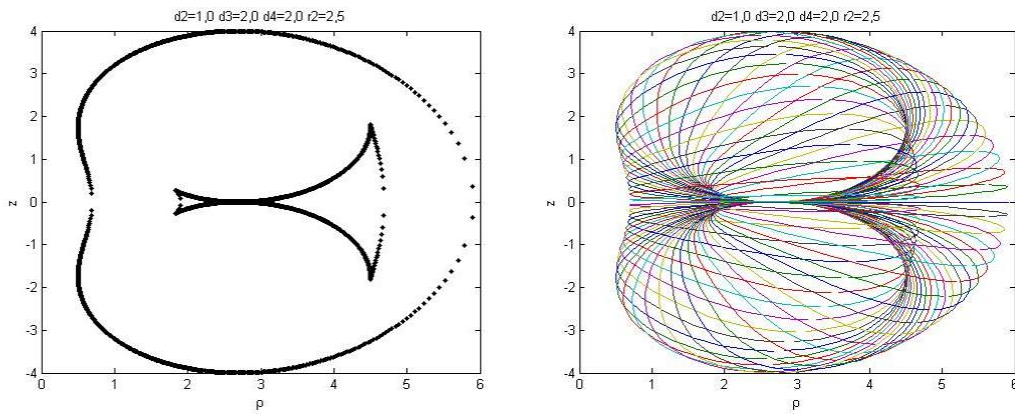


Figura 12 Transição entre WT_3 e WT_4

2.3.1 Domínio 3 e 5

No espaço de trabalho, a superfície interna contém 2 pontos de cúspide (domínio 3) ou 0 pontos de cúspide (domínio 5). Esta superfície de singularidade interna pode ser inteiramente contida na superfície de singularidade externa (caso das Figuras 10 e 13). Mas ela também pode interceptar a superfície de singularidade externa, o que faz aparecer dois nós. Assim, a Figura 14 caracteriza um manipulador que pertence à topologia do espaço de trabalho WT_6 , que tem 2 pontos de cúspide e 3 nós.

A Figura 13 corresponde a um manipulador sem pontos de cúspide do tipo 5, $WT_8(0,0)$. Ao contrário de um manipulador do tipo 1, a superfície de singularidade interna não é definida por uma cavidade toroidal, mas sim por uma zona com 4 soluções no MGI.

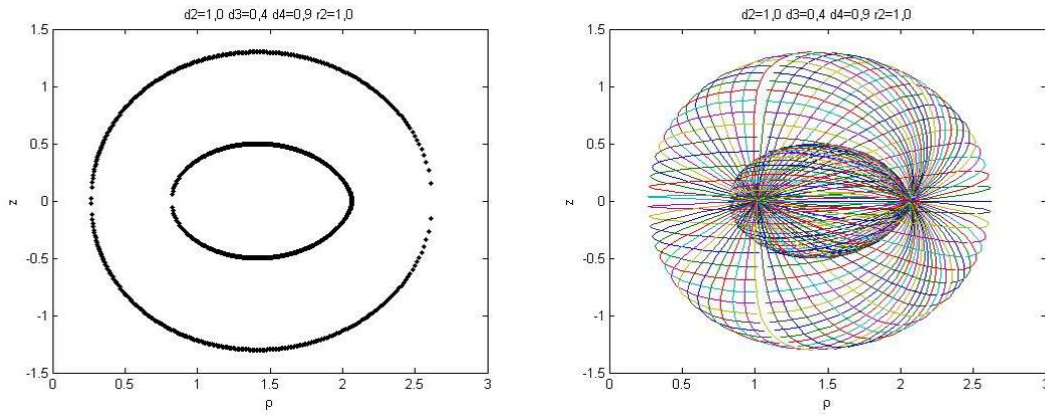


Figura 13: Manipulador do tipo 5, $WT_8(0,0)$

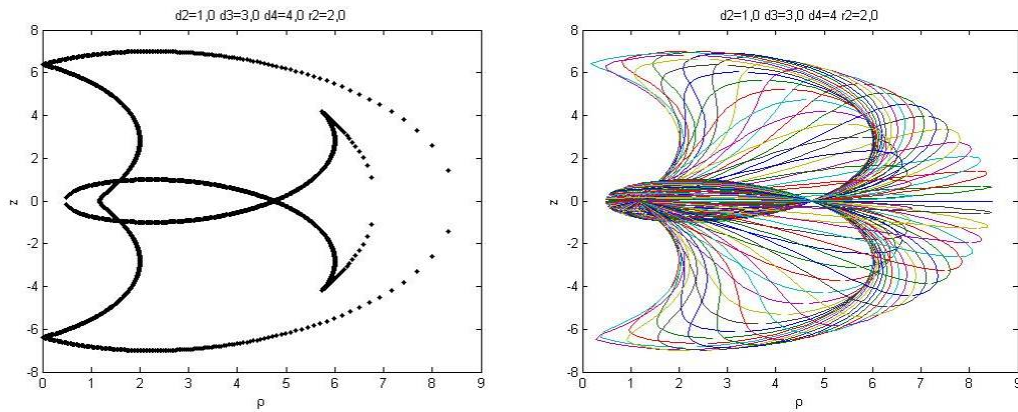


Figura 14: Topologia do espaço de trabalho $WT_6(2,3)$

Da mesma forma, a Figura 15 caracteriza um manipulador que pertence à topologia do espaço de trabalho WT_9 , esta topologia corresponde ao manipulador tendo 0 pontos de cuspide e 2 nós.

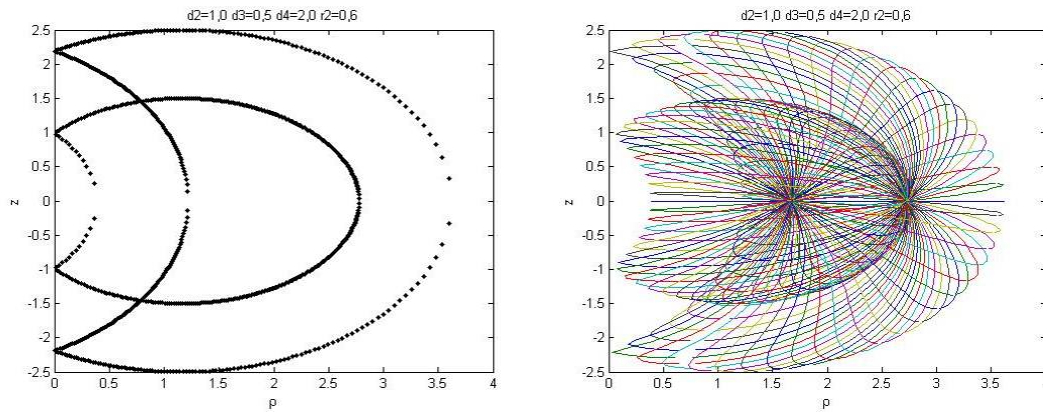
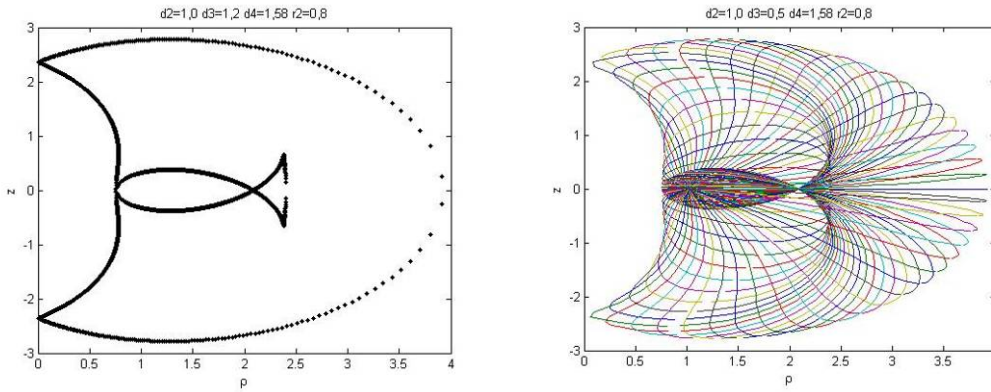
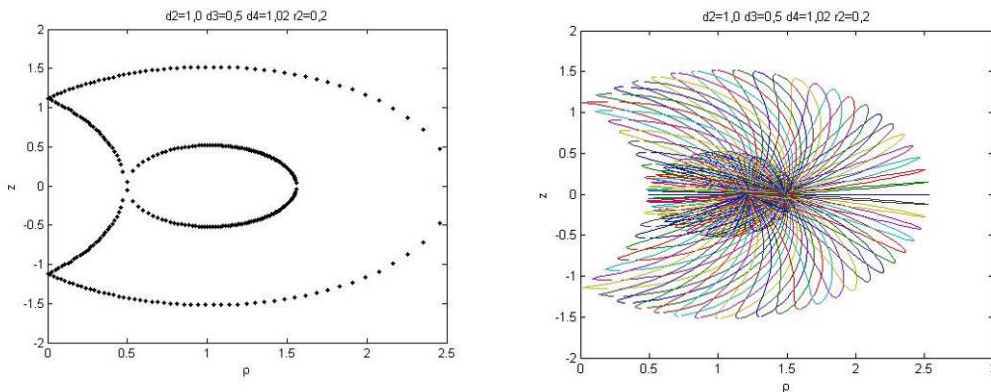


Figura 15: Topologia do espaço de trabalho $WT_9(0,2)$

A transição de WT_5 e WT_6 e a transição entre WT_8 e WT_9 são definidas pelos manipuladores cuja superfície de singularidade interna é tangente à superfície de singularidade externa. A Figura 16 caracteriza um manipulador cujos parâmetros de DH conferem a equação da superfície de separação das duas topologias do espaço de trabalho WT_5 e WT_6 .

Figura 16: Transição entre WT_5 e WT_6

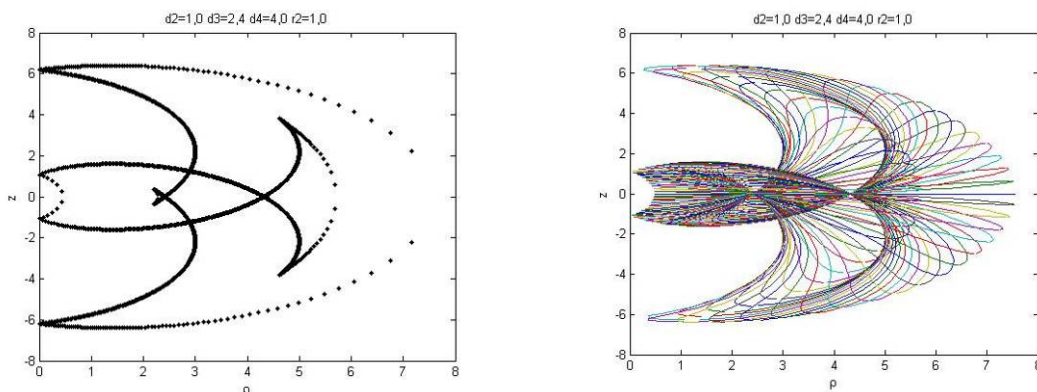
A Figura 17 caracteriza um manipulador que pertence à superfície que separa as duas topologias do espaço de trabalho WT_8 e WT_9 .

Figura 17: Transição entre WT_8 e WT_9

Geometricamente, esta transição se produz quando se deixa diretamente o espaço de trabalho, saindo da região com 4 soluções no MGI (delimitado pela superfície de singularidade interna) mudando-se no plano $z=0$ e aproximando-se do eixo $r=0$ (Figuras 16 e 17).

2.4. Domínio 4

Os manipuladores são do tipo 4 (WT_7) e possuem 4 pontos de cúspide e 4 nós (Figura 18). Os 4 pontos de cúspide são compartilhados com igualdade entre as superfícies de singularidade interna e externa. Aumentando o parâmetro d_4 , obtém-se um manipulador entre aquele da Figura 10 e o da Figura 18. Este manipulador intermediário é do tipo 3 com 2 nós suplementares resultantes da interseção entre as superfícies de singularidade interna e externa no espaço de trabalho.

Figura 18: Manipulador do tipo 4, $WT_7(4,4)$

3. CONCLUSÕES

Uma família de manipuladores com eixos ortogonais, considerando $r_3=0$, foi classificada segundo a topologia do espaço de trabalho, considerando o número de pontos de cúspides e de nós e o número de soluções no MGI. Foram apresentados 5 tipos de manipuladores e os 5 domínios correspondentes. Os 5 domínios foram subdivididos em função do número de nós, sendo possível identificar 9 regiões (WT₁ a WT₉). Em cada topologia foi identificado o número de zonas com 2 ou 4 soluções no MGI.

4. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte da FAPEMIG.

5. REFERÊNCIAS

- Baili, M. and Wenger Ph., Chablat D., 2004, “Analyse et Classification de Manipulateur 3R à axes Orthogonaux”, Thèse de Doctorat - University of Nantes, France.
- Bergamaschi, P. R., 2004, “Projeto Ótimo de Manipuladores 3R Considerando Características de seu Espaço de Trabalho”, Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.
- Borrel, P., and Liegeois, A., 1986, “A Study of Manipulator Inverse Kinematic Solutions With Application to Trajectory Planning and Workspace Determination” Proc. IEEE Int. Conf. Rob. and Aut., pp 1180-1185.
- Buchberger, B. and Collins G. E., Loog R., 1982, “Computer Algebra: Symbolic & Algebraic Computation”, Springer-Verlag, Wien, pp. 115-138.
- Corvez, S., Rouillier, F., 2002, “Using computer algebra tools to classify serial manipulators”, Proceeding Fourth International Workshop on Automated Deduction in Geometry, Lins.
- El Omri, J., Wenger, P., 1996, “Changing Posture For Cuspidal Robot Manipulators,” IEEE Int. Conf. Rob. And Aut., pp 3173-3178, Minneapolis, USA.
- Khalil, W., Dombre, E., 1999, “Modélisation identification et commande des robots”, Hermès Science Publications, 2^a edition, Paris.

AN INTRODUCTION ABOUT WORKSPACE TOPOLOGY OF ORTHOGONAL 3R MANIPULATORS

Giovana Trindade da Silva Oliveira

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering
2160 João Naves de Ávila Av., Campus Santa Mônica, CEP 38400-902, Uberlândia, Brazil
gtrindade@mecanica.ufu.br

Sezimária Fátima Pereira Saramago

Federal University of Uberlândia, School of Mathematics
2160 João Naves de Ávila Av., Campus Santa Mônica, CEP 38400-902, Uberlândia, Brazil
saramago@ufu.br

Abstract: A classification of a family of 3-revolute (3R) manipulators is established. This classification is based on the topology of their workspace. The workspace topology is defined by the number of kinematic solutions, the number of cusps and nodes that appear on these singular curves. The design parameters space is shown to be divided into nine domains of distinct workspace topologies, in which all manipulators have similar global kinematics properties. Each separating surface is given as an explicit expression in the Denavit-Hartenberg parameters.

Keywords: orthogonal 3R manipulator, workspace, manipulator topology, singularity.